УДК 519.2

Приложение ветвящихся случайных процессов в квантовой оптике.I

Душутин Н.К.

ФГБОУ ВПО «Иркутский государственный университет

Аннотация: Излагаются методы теории ветвящихся случайных процессов с непрерывным временем, применяемые в задачах квантовой оптики со счетным числом фотонов. Переходные вероятности ветвящихся процессов (распределения по числу фотонов) определяются из решения некоторой системы дифференциально-разностных уравнений. Обсуждается вывод данной системы, её основные свойства и частные методы решения.

Ключевые слова: методы теории ветвящихся случайных процессов с непрерывным временем, задачи квантовой оптики со счетным числом фотонов.

Ветвящийся процесс — это случайный процесс, описывающий широкий круг явлений, связанных с размножением и превращением каких-либо объектов.

Термин «ветвящиеся процессы» был предложен А. Н. Колмогоровым в начале 1947 года и в силу своей удачности пришёл в другие языки в виде кальки: англ. *branching processes*, нем. *Verzweigungsprozesse*, швед. исследований, связанных с разработкой атомного оружия, работы по теории ветвящихся процессов были засекречены на пять лет, в связи с опасениями, что теория может служить общей моделью неких ядерных цепных реакций, пока академик Я. Б. Зельдович не дал заключение, что работы могут быть опубликованы. Основной вклад в исследование ветвящихся случайных процессов внес Бори́с Алекса́ндрович Севастья́нов (29 сентября 1923, Москва — 30 августа 2013, там же) — советский и российский математик, доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН (1984) [1], а также Андрей Михайлович Зубков и другие его ученики (обзор исследований в данной области математики [2]).

Ветвящиеся случайные процессы могут быть эффективно использованы при описании процессов в нелинейной оптике, кинетики лазерных сред и широкого круга явлений в физике, химии, биологии и других областях, где ситуация связана с размножением и превращением большого числа объектов (точнее бесконечного, но счетного множества). В работе [3] ветвящиеся случайные процессы были применены к моделям множественной генерации адронов.

Квантование поля излучения не только сохраняет классическую интерпретацию интерференционных экспериментов, но также дает и другой их тип: так называемые эксперименты со счетом фотонов. Адекватное описание данного типа экспериментов можно получить с помощью ветвящихся случайных процессов. В общем случае изучение ветвящихся процессов ведется с помощью производящих функций или функционалов, для которых выводятся нелинейные дифференциальные и интегродифференциальные уравнения. Групповая структура ветвящихся случайных процессов определяется полугруппами, т.е. множествами с ассоциативной бинарной операцией и единицей, но не допускающими, в отличие от групп, обращения элементов.

Основным математическим предположением, выделяющим ветвящиеся процессы в отдельный класс, является предположение независимости превращения объектов от предыстории и друг от друга.

Однородный во времени ветвящийся процесс с однотипными объектами определяется как Марковский процесс со счетным числом состояний в фазовом пространстве $|n\rangle$ (пространстве Фока), переходные вероятности $P_{ij}(t)$ которого удовлетворяют дополнительному условию ветвления:

$$P_{ij} = \sum P_{ij_1}(t) P_{ij_2}(t) \ldots P_{ij_k}(t) \delta_{ij}(j_1 + j_2 + \ldots + j_k - j) \qquad \text{(B.1)}$$

тем самым ветвящийся процесс представим в виде каскада элементарных процессов происходящих случайным образом.

Вероятность $P_{ij}(t)$ есть вероятность того, что за время t i объектов превращаются в j объектов, т.е. $P(\mu(t) = j | \mu(0) = i)$. Марковость процесса означает, что переходные вероятности удовлетворяют условию

$$P_{ij} = \sum_k P_{ik}(u) P_{kj}(t-u) \qquad \text{(B.2)}$$

тем самым превращение объектов не зависит от предыстории.

Кроме того, переходные вероятности должны быть неотрицательны и нормированы

$$P_{ij}(t) \geq 0\,; \qquad \sum_j P_{ij}(t) = 1 \qquad \text{(B.3)}$$

Начальные условия для ветвящегося процесса имеют вид:

$$P_{ij}(0) = \delta_{ij} \qquad \text{(B.4)}$$

Ветвящиеся процессы разделяются на процессы с дискретным временем (процессы Гальтона – Ватсона) и процессы с непрерывным временем. Подчеркнем, что речь идет о Марковском времени, т.е. о параметре развития процесса, под которым можно понимать как реальное время, так и пространственную область, в которой разыгрывается процесс, энергию источника, переходящую во вторичные частицы, и т.д. В теории излучения наиболее удобно рассматривать ветвящиеся процессы с непрерывным временем, а состояние $|n\rangle$ представляет собой источник + n фотонов. Таким образом, переходные вероятности можно обозначать $P_n(t) = P(\mu(t) = \text{источник} + n\ \text{фотонов} | \mu(0) = \text{источник})$

Начальное условие

$$P_n(0) = \delta_{0n} \qquad \text{(B.5)}$$

означает, что при $t = 0$ фотонов нет и распределение по их числу δ-образное. Различные ветвящиеся процессы соответствуют эквиареальным (сохраняющим площадь) преобразованиям (деформациям) данного распределения.

Основным аналитическим аппаратом в теории ветвящихся процессов являются производящие функции:

$$F(z,t)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(t)z^n \qquad (В.6)$$

Производящая функция $F(z,t)$ определена для всех z из единичного круга $|z|\leq 1$ комплексной плоскости и аналитична внутри этого круга. Условия нормировки (В.3) и начальные условия (В.5) превращаются в следующие соотношения для производящей функции:

$$F(z=1,t)=F(z,t=0)=1 \qquad (В.7)$$

Каждому распределению переходных вероятностей соответствует только одна производящая функция и, наоборот, каждой функции $F(z,t)$, аналитичной внутри единичного круга, соответствует только одно распределение вероятностей, которые могут быть определены следующим образом:

$$P_n(t)=\frac{1}{2\pi i}\oint F(z,t)\frac{dz}{z^n}=\frac{1}{n!}\frac{\partial^n F}{\partial z^n}\bigg|_{z=0} \qquad (В.8)$$

Можно показать, что производящая функция суммы двух независимых случайны величин $\xi_1+\xi_2=\xi$ (независимых источников излучения) равна произведению производящих функций данных случайных величин $F(z,t)=F_1(z,t)F_2(z,t)$.

Распределение вероятностей в данном случае представляет собой дискретную свертку

$$P_n(t)=\sum_k P_{n-k}^{(1)}(t)P_k^{(2)}(t) \qquad (В.9)$$

Производящая функция задает также факториальные моменты распределения вероятностей α_k, корреляционные параметры f_k (проинтегрированные корреляционные функции) и вероятности образования кластеров π_k (объектов, распадающихся по истечению некоторого времени на несколько вторичных частиц и, таким образом, учитывающих в процессах многочастичной генерации корреляцию этих вторичных частиц):

$$\alpha_k=\sum_n n(n-1)\ldots(n-k+1)P_n(t)=\frac{\partial^k F}{\partial z^k}\bigg|_{z=1}$$

$$f_k=\frac{\partial^k \ln F}{\partial z^k}\bigg|_{z=1}; \qquad \pi_k=\frac{\partial^k \ln F}{\partial z^k}\bigg|_{z=0} \qquad (В.10)$$

С теоретико-вероятностной точки зрения ветвящийся процесс можно однозначно определить как переходными вероятностями $P_n(t)$, так и производящей функцией $F(z,t)$, либо набором его моментов (факториальных, центральных, начальных, корреляционных параметров и т.п.).

Для вывода системы дифференциально-разностных уравнений переходных вероятностей выделим в интервале времени ветвящегося процесса небольшой отрезок Δt и рассмотрим изменение переходных вероятностей за этот отрезок времени $P_n(t+\Delta t)$. Очевидно, что это изменение будет определяться следующими элементарными процессами:

- некогерентного излучения. Фотоны излучаются независимо с вероятностью за единицу времени λ_1;

- когерентного излучения. Одним или несколькими источниками испускаются k (два и более) фотонов с вероятностью за единицу времени λ_k;

- индуцированного излучения, с вероятностью λ_u умноженной на число фотонов в системе;

- поглощения, с вероятностью λ_n умноженной на число фотонов в системе.

С учетом всех элементарных процессов имеем для $P_n(t+\Delta t)$ следующее выражение:

$$\begin{aligned} P_n(t+\Delta t) &= P_n(t)\left[1-\lambda_u n\Delta t-\lambda_n n\Delta t-\lambda_1\Delta t-\ldots-\lambda_k\Delta t\right]+ \\ &+P_{n-1}(t)(n-1)\lambda_u\Delta t+P_{n+1}(t)(n+1)\lambda_n\Delta t+P_{n-1}(t)\lambda_1\Delta t+\ldots+P_{n-k}(t)\lambda_k\Delta t \end{aligned} \qquad (В.11)$$

В этом соотношении первый член соответствует ситуации, когда в течение отрезка времени Δt не происходит изменения числа фотонов. Вероятность такого «элементарного процесса» определяется как вероятность противоположного события по отношению ко всем другим элементарным процессам.

Производя элементарные преобразования и переходя к пределу $\Delta t\to 0$, получаем из соотношения (В.11) следующее дифференциально-разностные уравнение для $P_n(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{dP_n}{dt} &= -(\lambda_u+\lambda_n)nP_n+\lambda_u(n-1)P_{n-1}+\lambda_n(n+1)P_{n+1}+ \\ &+\lambda_1P_{n-1}+\ldots+\lambda_kP_{n-k}-\sum_{i=1}^{k}\lambda_iP_n \end{aligned} \qquad (В.12)$$

При выводе данного уравнения значения переменной n никоим образом не фиксировалось, поэтому аналогичное уравнение справедливо для любого значения $n\in[0,\infty)$, и для полного набора переходных вероятностей $P_n(t)$ имеет место бесконечная система.

Решение данной системы может быть получено методом последовательных подстановок, когда вначале решается уравнение для P_0, затем решение подставляется в уравнение для P_1 и решается это уравнение и т.д. В некоторых случаях эффективно также преобразование Лапласа, которое переводит систему дифференциальных уравнений в систему алгебраических уравнений.

ЛИТЕРАТУРА:

1.Севастьянов В.А. Ветвящиеся процессы. Наука, М., 1978, 436 с.
Прохоров Ю.В. Теория вероятностей. Наука, М., 1981, 496 с.

2. *Ватутин В. А., Зубков А. М.* Ветвящиеся процессы. I // *Итоги науки и техники. Серия «Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика»*. — М.: ВИНИТИ, 1985. — Т. 23. — С. 3–67.

3. *Душутин Н.К., Мальцев В.М. Ветвящиеся процессы и модели множественной генерации адронов. //Сообщения ОИЯИ, Р2-89-375, 1989, 26с.*

Branching Stochastic Processes with Continuous Time in Quantum Optic

N.K.Dushutin

Annotation: The methods of the theory for branching stochastic processes with continuous time are presented. These methods are used for description quantum optic situation with number photons. The conditional probabilities of branching stochastic processes may be obtained by solving some system of differential-difference equations. The basis of this system, its properties and solving are discussed.

Key worlds: branching stochastic processes with continuous time, quantum optic with number photons.