

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ФИНАНСИРОВАНИЯ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЕКТОВ

А. Ю. Шаталова

ФГБОУ ВПО «Кубанский государственный университет», Краснодар

Аннотация

У С. Р. Хачатряна рассмотрена задача планирования инвестиций с учетом рисков и методика ее решения средствами линейного программирования в случае, когда срок жизни инвестиционного портфеля составляет 6 месяцев¹. В данной работе рассмотрена цепочка задач, последовательно обобщающих эту задачу и их программная реализация в среде MatLab «Оптимизация инвестиционного проекта с учетом рисков»². Рассмотренные задачи в конечном итоге позволяют построить общую модель планирования, учитывающую различные ограничения, которые должны учитываться на практике.

Введение

Инвестиционный процесс – явление сложное и противоречивое. При начальной цели – увеличении дохода компании, финансовые вложения могут не вернуться вообще или с значительной временной задержкой. Оттоки доступных денежных средств в сферу будущей прибыли могут в значительной мере сказаться на прибыли, получаемой в настоящий момент. И, тем не менее, природа инвестиций амбивалентна. Отказавшись от получения малых прибылей сегодня, компания может обеспечить себе благополучное прибыльное «завтра». Так же инвестиции обладают мощной регулятивной функцией. Кроме этого, на макроуровне они являются основой для осуществления политики расширенного воспроизводства, ускорения научно-технического прогресса, улучшения качества и конкурентоспособности продукта, обеспечивая структурную перестройку экономики и сбалансированное развитие всех ее отраслей, создавая необходимую сырьевую базу промышленности, развивая

¹ Хачатрян С. Р. Методы и модели решения экономических задач / М. В. Пинешня, В. П. Буянов. – М.: Экзамен, 2005. – 384 с.

² Программа оптимизации инвестиционного портфеля с учетом рисков: пат. 218788 Рос. Федерация : МКП7 Н 04 В 1/38, Н 04 J 13/00 / Шаталова А. Ю., Семенчин Е. А. ; заявитель и патентообладатель Краснодар. ФГБОУ ВПО «Кубанский государственный университет». – № 2012661369; заявл. 31.10.12 ; опубл. 13.12.12, Бюл. № 2012619324.

социальные сферы, решая проблемы обороноспособности страны и вопросы ее безопасности, проблемы безработицы, охраны окружающей среды и др. По этим причинам, одним из наиболее важных факторов развития экономики являются инвестиции.

При оптимизации инвестиционных вложений предприятие (банк) сталкивается с необходимостью рассмотреть различные задачи. Возможные способы финансирования инвестиционных проектов рассмотрены в математических задачах.

1. Задача оптимального финансирования инвестиционных проектов, позволяющая минимизировать начальные вложения

Рассмотрим случай, когда срок жизни инвестиционного портфеля составляет заданное число месяцев³.

Предприятие рассматривает m различных инвестиционных проектов⁴. Через n месяцев ему необходимо получить доход размером в x рублей, при этом возвратность кредита через ν месяцев должна составить y долларов.

В течение каждого месяца средний индекс риска инвестиционных проектов s_{cp} не превышает l , т.е. $s_{cp} \leq l$, и в начале каждого месяца средняя продолжительность погашения инвестиционных проектов не превышает t месяцев. Необходимо при данных способах инвестирования и утвержденном графике выплат минимизировать сумму денег, которую предприятие должно затратить на инвестирование проектов.

Обозначим через $k_1, k_2, k_3, \dots, k_j, \dots, k_m$ – все возможные делители числа n , $k_m = n$, $k_1 < k_2 < k_3 < k_j < \dots < k_m$, где k_j совпадает с периодом инвестирования предприятием j -го, $j=1, 2, \dots, m$, проекта, т. к. вложенные в проекты денежные средства должны вернуться к концу n -го месяца, L_j , $j=1, 2, \dots, m-2$, – заключительный момент инвестирования j -го $j=2, 3, \dots, m-1$ проекта.

Все возможные случаи инвестирования рассматриваемых проектов представлены в таблице 1.

Таблица 1. ВОЗМОЖНЫЕ ВАРИАЦИИ ИНВЕСТИРОВАНИЯ ПРОЕКТОВ В ТЕЧЕНИЕ n МЕСЯЦЕВ

№	Периодичность	Моменты	Процент	Индекс
---	---------------	---------	---------	--------

³ Семенчин, Е. А. Обобщенная математическая модель инвестирования предприятий с учетом рисков / Е. А. Семенчин, А. Ю. Шаталова // Фундаментальные исследования. – 2011. – № 12 (часть 1). – С. 228–232.

⁴ Семенчин, Е. А. Инвестиционный портфель с переменным объемом фонда инвестирования / Е. А. Семенчин, А. Ю. Шаталова // Фундаментальные исследования. – 2012. – № 9. – С. 739–744.

инвестиционного проекта	инвестирования проекта (мес.)	инвестирования проекта	прибыли	риска
1	1	1, 2, 3, ..., n	δ_1	s_1
2	k_2	$\underbrace{1, 1+k_2, 1+2k_2, \dots, L_1}_{\frac{n}{k_2}}$ где $L_1 < n, n-L_1 < k_2$	δ_2	s_2
3	k_3	$\underbrace{1, 1+k_3, 1+2k_3, \dots, L_2}_{\frac{n}{k_3}}$ где $L_2 < n, n-L_2 < k_3$	δ_3	s_3
...
J	k_j	$\underbrace{1, 1+k_j, 1+2k_j, \dots, L_{j-1}}_{\frac{n}{k_j}}$ где $L_{j-1} < n, n-L_{j-1} < k_j$	δ_j	s_j
...
M	N	1	δ_m	s_m

Обозначим через $X_i(j)$ объем финансирования в i -ом месяце ($i = 1, 2, \dots, n$) j -го инвестиционного проекта ($j = 1, 2, \dots, m$). В соответствии с таблицей 1 для каждого j -го проекта переменная $X_i(j)$ в каждом i -ом месяце будет иметь вид⁵:

⁵ Семенчин, Е. А. Обобщенная математическая модель инвестирования предприятий с учетом рисков / **Е. А. Семенчин, А. Ю. Шаталова** // Фундаментальные исследования. – 2011. – № 12 (часть 1). – С. 228–232. Семенчин, Е. А. Математическая модель максимизации прибыли, получаемой банком за счет реализации инвестиционных проектов / **Е. А. Семенчин, А. Ю. Шаталова** // Фундаментальные исследования. – 2012. – № 6 (часть 1). – С. 258–262. Семенчин, Е. А. Инвестиционный портфель с переменным объемом фонда инвестирования / **Е. А. Семенчин, А. Ю. Шаталова** // Фундаментальные исследования. – 2012. – № 9. – С. 739–744. Семенчин Е.А., Шаталова А. Ю. Оценка эффективности оптимального инвестиционного портфеля // Вестник КубГУ. Естественные науки. 2012. Семенчин, Е.А. Методика оценки эффективности оптимального инвестиционного портфеля. **Е.А. Семенчин, А. Ю., Шаталова.** «Экономическое развитие России в условиях глобальной нестабильности: тенденции и перспективы». Сочи. КубГУ. Естественные науки. 2012. Семенчин, Е. А. Оптимизация инвестиционного портфеля с ограниченным объемом инвестирования / **Е. А. Семенчин, А. Ю.**

для 1-го проекта:

$$\underbrace{X_1(1), X_2(1), X_3(1), \dots, X_i(1), \dots, X_n(1)}_n$$

для 2-го проекта:

$$\underbrace{X_1(2), X_{1+k_2}(2), X_{1+2k_2}(2), \dots, X_{1+(i-1)k_2}(2), \dots, X_{L_1}(2)}_{\frac{n}{k_2}}$$

для 3-го проекта:

$$\underbrace{X_1(3), X_{1+k_3}(3), X_{1+2k_3}(3), \dots, X_{1+(i-1)k_3}(3), \dots, X_{L_2}(3)}_{\frac{n}{k_3}}$$

.....
для j -го проекта:

$$\underbrace{X_1(j), X_{1+k_j}(j), X_{1+2k_j}(j), \dots, X_{1+(i-1)k_j}(j), \dots, X_{L_{j-1}}(j)}_{\frac{n}{k_j}}$$

.....
для m -го проекта:

$$X_1(m),$$

(1)

где $n, \frac{n}{k_1}, \frac{n}{k_2}, \frac{n}{k_3}, \dots, \frac{n}{k_m} = 1$ – число различных объемов инвестирования в i -ом месяце ($i=1, 2, \dots, n$), индексы L_j ($j=1, 2, \dots, (m-2)$) в (1) представляют собой заключительные (последние) моменты инвестирования.

Условие минимизации объема вложений предприятием в начальный момент в рассматриваемые проекты, согласно введенным обозначениям, будет иметь вид:

$$F = \sum_{j=1}^m X_1(j) \rightarrow \min_j \quad (2)$$

Укажем ограничения, которым должны удовлетворять объемы инвестирования $X_i(j)$ ($i=1, 2, \dots, n, j=1, 2, \dots, m$). Согласно условию задачи предприятию необходима возвратность инвестируемых вложений объемом y рублей через i месяцев, где $i=1, 2, \dots, n$; в моменты 1, 2, ..., $i-1, i+1, \dots, n-1, n$ месяцев дополнительные расходы не подразумеваются, а в n -ом месяце необходима возвратность инвестируемых вложений $(x-y)$ рублей для реализованных инвестиционных проектов. Согласно этим требованиям будем иметь соотношение:

$$\sum_{j: k_j \leq 1 \wedge k_j \neq 1} (1 + 0,01\delta_j) X_{1-k_j+1}(j) - \sum_{j: k_j \leq 1 \wedge k_j \neq 1} X_2(j) = 0 -$$

объемы вложений на конец первого месяца,

$$\sum_{j: k_j \leq 2 \wedge k_j : 2} (1+0,01\delta_j)X_{2-k_j+1}(j) - \sum_{j: k_j \leq 2 \wedge k_j : 2} X_3(j) = 0 -$$

объемы вложений на конец второго месяца;

$$\dots\dots\dots$$

$$\sum_{j: k_j \leq i \wedge k_j : i} (1+0,01\delta_j)X_{i-k_j+1}(j) - \sum_{j: k_j \leq i \wedge k_j : i} X_{i+1}(j) = y -$$

объемы вложений на конец i -го месяца;

$$\dots\dots\dots$$

$$\sum_{j: k_j \leq n \wedge k_j : n} (1+0,01\delta_j)X_{n-k_j+1}(j) = x - y -$$

объемы вложений на конец n -го месяца, т.к. все инвестиционные объемы должны вернуться до конца процесса инвестирования,

где $\sum_{j: k_j \leq i \wedge k_j : 1}$ – означает суммирование по тем $j, j=1, 2, \dots, m$, для которых

k_j не превосходит i и является делителем $i, i=1, 2, \dots, n$, т. е. суммироваться будут только те объемы вложений, которые уже вернулись предприятию с учетом указанной прибыли на текущий момент времени.

Последнее соотношение не содержит отрицательных слагаемых (вычитаемого), т.к. вложения, согласно постановке задачи, не будут осуществляться в n -ом месяце.

Индекс среднего риска для каждого периода инвестирования не превышает величины l и удовлетворяет неравенству⁶:

$$\frac{X_1(1)s_1 + X_1(2)s_2 + \dots + X_1(m)s_m}{X_1(1) + X_1(2) + \dots + X_1(m)} \leq l,$$

для второго периода –

$$\frac{X_2(1)s_1 + X_1(2)s_2 + \dots + X_1(m)s_m}{X_2(1) + X_1(2) + \dots + X_1(m)} \leq l,$$

.....

для периода $i (i \neq 1)$, –

$$\frac{\sum_{j: k_j < i \wedge k_j : (i-1)} X_i(j)s_j + \sum_{j: k_j < i \wedge k_j : i} X_\psi(j)s_j + \sum_{j: k_j \geq i} X_1(j)s_j}{\sum_{j: k_j < i \wedge k_j : (i-1)} X_i(j) + \sum_{j: k_j < i \wedge k_j : i} X_\psi(j) + \sum_{j: k_j \geq i} X_1(j)} \leq l,$$

.....

для периода n –

$$\frac{\sum_{j: k_j < n \wedge k_j : (n-1)} X_i(j)s_j + \sum_{j: k_j < n \wedge k_j : n} X_\psi(j)s_j + X_1(m)s_m}{\sum_{j: k_j < n \wedge k_j : (n-1)} X_i(j) + \sum_{j: k_j < n \wedge k_j : n} X_\psi(j) + X_1(m)} \leq l,$$

⁶ Хачатрян С. Р. Методы и модели решения экономических задач / М. В. Пинешня, В. П. Буянов. – М.: Экзамен, 2005. – 384 с.

где $\sum_{j/k_j < i \wedge k_j \div (i-1)}$ – означает суммирование по тем $j, j=1, 2, \dots, m$, для которых $k_j < i$ и k_j является делителем $(i-1)$, $i=1, 2, \dots, n$, $\sum_{j/k_j < i \wedge k_j \nmid (i-1)}$ – означает суммирование по тем $j, j=1, 2, \dots, m$, для которых $k_j < i$ и k_j не является делителем $(i-1)$, ψ – индекс, совпадающий с индексом слагаемого из предыдущего соотношения для $(i-1)$ -го месяца, которое зависит от того же j -го, $j=1, 2, \dots, m$ инвестиционного проекта, т. е. суммироваться будут только те объемы вложений, которые уже вернулись компании с учетом указанной прибыли на текущий момент времени.

Из соотношений (4) следует:

$$\begin{aligned} (s_1 - l)X_1(1) + (s_2 - l)X_1(2) + \dots + (s_m - l)X_1(m) &\leq 0; \\ \dots & \\ \sum_{j:k_j < i \wedge k_j \div (i-1)} X_i(j)(s_j - l) + \sum_{j:k_j < i \wedge k_j \nmid (i-1)} X_\psi(j)(s_j - l) + \sum_{j:k_j \geq i} X_1(j)(s_j - l) &\leq 0; \\ \dots & \\ (s_1 - l)X_n(1) + \dots + (s_m - l)X_1(m) &\leq 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Средняя продолжительность инвестирования в течение первого месяца, учитывая, что она не должна превосходить t , имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{X_1(1) + X_1(2)k_2 + \dots + X_1(m)n}{X_1(1) + X_1(2) + \dots + X_1(m)} &\leq t, \\ \text{второго месяца} - \\ \frac{X_2(1) + X_1(2)(k_2 - 1) + \dots + X_1(m)(n-1)}{X_2(1) + X_1(2) + \dots + X_1(m)} &\leq t, \\ \dots & \\ \text{месяца } i \ (i \neq 1), - \\ \frac{\sum_{j:k_j < i \wedge k_j \div (i-1)} X_i(j)k_j + \sum_{j:k_j < i \wedge k_j \nmid (i-1)} X_\psi(j)(k_j - (i-1)) + \sum_{j:k_j \geq i} X_1(j)(k_j - (i-1))}{\sum_{j:k_j < i \wedge k_j \div (i-1)} X_i(j) + \sum_{j:k_j < i \wedge k_j \nmid (i-1)} X_\psi(j) + \sum_{j:k_j \geq i} X_1(j)} &\leq t, \\ \dots & \\ \text{месяца } n - \\ \frac{\sum_{j:k_j < n \wedge k_j \div (n-1)} X_i(j)k_j + \sum_{j:k_j < n \wedge k_j \nmid (n-1)} X_\psi(j)(k_j - (i-1)) + X_1(m)}{\sum_{j:k_j < n \wedge k_j \div (n-1)} X_n(j) + \sum_{j:k_j < n \wedge k_j \nmid (n-1)} X_\psi(j) + X_1(m)} &\leq t, \end{aligned} \quad (6)$$

Из неравенств (5) следует, что

$$\begin{aligned} (1-t)X_1(1) + (k_2 - t)X_1(2) + \dots + (n-t)X_1(m) &\leq 0, \\ \dots & \\ \sum_{j:k_j < i \wedge k_j \div (i-1)} X_i(j)(k_j - t) + \sum_{j:k_j < i \wedge k_j \nmid (i-1)} X_\psi(j)((k_j - (i-1)) - t) + \sum_{j:k_j \geq i} X_1(j)((k_j - (i-1)) - t) &\leq 0 \\ , & \\ \dots & \end{aligned} \quad (7)$$

$$X_1(1), X_2(1), X_3(1), X_4(1), X_5(1), X_6(1), X_7(1), \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right| \quad (9.1)$$

для 2-го проекта:

$$X_1(2).$$

Условие минимизации объема вложений предприятием в начальный момент в рассматриваемые проекты, согласно (2), будет иметь вид:

$$F = X_1(1) + X_1(2) \rightarrow \min. \quad (10.1)$$

Укажем ограничения, которым должны удовлетворять объемы инвестирования, воспользовавшись (3):

$$\begin{aligned} 1,15X_1(1) - X_2(1) &= 0 && \text{— объемы вложений на конец} \\ \text{первого месяца,} &&& \\ 1,15X_2(1) - X_3(1) &= 0 && \text{— объемы вложений на конец} \\ \text{второго месяца;} &&& \\ 1,15X_3(1) - X_4(1) &= 90000 && \text{— объемы вложений на конец} \\ \text{третьего месяца;} &&& \\ 1,15X_4(1) - X_5(1) &= 0 && \text{— объемы вложений на конец} \\ \text{четвертого месяца;} &&& \\ 1,15X_5(1) - X_6(1) &= 0 && \text{— объемы вложений на конец пятого} \\ \text{месяца;} &&& \\ 1,15X_6(1) - X_7(1) &= 0 && \text{— объемы вложений на конец} \\ \text{шестого месяца;} &&& \\ 1,15X_7(1) + 1,18X_1(2) &= 110000 && \text{— объемы вложений на} \\ \text{конец седьмого месяца.} &&& \end{aligned} \quad (11.1)$$

Ограничения, связанные с индекс среднего риска, согласно формулам (4) и (5), будут иметь вид:

$$\begin{aligned} -X_1(1) + 3X_1(2) &\leq 0 && \text{— для первого месяца,} \\ -X_2(1) + 3X_1(2) &\leq 0 && \text{— для второго месяца,} \\ -X_3(1) + 3X_1(2) &\leq 0 && \text{— для третьего месяца,} \\ -X_4(1) + 3X_1(2) &\leq 0 && \text{— для четвертого месяца,} \\ -X_5(1) + 3X_1(2) &\leq 0 && \text{— для пятого месяца,} \\ -X_6(1) + 3X_1(2) &\leq 0 && \text{— для шестого месяца.} \\ -X_7(1) + 3X_1(2) &\leq 0 && \text{— для седьмого месяца.} \end{aligned} \quad (12.1)$$

Средняя продолжительность инвестирования с учетом (6) и (7) имеет вид:

$$\begin{aligned} -3,5X_1(1) + 2,5X_1(2) &\leq 0 && \text{— для первого месяца,} \\ -3,5X_2(1) + 1,5X_1(2) &\leq 0 && \text{— для второго месяца,} \\ -3,5X_3(1) + 0,5X_1(2) &\leq 0 && \text{— для третьего месяца,} \\ -3,5X_4(1) - 0,5X_1(2) &\leq 0 && \text{— для четвертого месяца,} \\ -3,5X_5(1) - 1,5X_1(2) &\leq 0 && \text{— для пятого месяца,} \end{aligned} \quad (13.1)$$

$-3,5X_6(1) - 2,5X_1(2) \leq 0$ – для шестого месяца,

$-3,5X_7(1) - 3,5X_1(2) \leq 0$ – для седьмого месяца.

Учитывая ограничения (8), (11.1)–(13.1) найдем оптимальное решение (10) с помощью разработанной программы «Оптимизация инвестиционного проекта с учетом рисков» в среде MatLab⁹: $F \approx 100529,5$.

$X_1(1) = 100529,5$; $X_2(1) = 115608,9$; $X_3(1) = 132950,3$; $X_4(1) = 62892,8$;
 $X_5(1) = 72326,7$; $X_6(1) = 83175,8$; $X_7(1) = 95652,1$; $X_1(2) = 0$.

Общий доход предприятия от реализации инвестиционных проектов составляет 200000 рублей, общая прибыль составила $200000 - 100529,5 = 99470,5$ рублей.

Пример 2. В банк обратились для получения кредитов три организации с различными инвестиционными проектами¹⁰. Через 9 месяцев банк планирует получить за кредит 950 000 долларов с учетом прибыли, возвратность кредита через 3 месяца должна составить 100 000 долларов. Длительность кредитования рассматриваемых проектов составляет соответственно 1, 3 и 9 месяцев. Процент кредитования каждой организации составляет соответственно 16 %; 24 %; 28 %. Индексы рисков для каждого инвестиционного проекта организаций составляют соответственно 5, 7, 9.

При данных способах инвестирования и утвержденном графике выплат необходимо минимизировать сумму денег, которую банк должен затратить на инвестирование проектов, учитывая, что в течение каждого месяца средний индекс риска инвестиционных проектов не превышает 6, и в начале каждого месяца средняя продолжительность погашения инвестиционных проектов не превышает 4,5 месяцев¹¹.

Согласно методике приведенной выше число 9 имеет три делителя: 1, 3 и 9, следовательно будем рассматривать два инвестиционных проекта с длительностью инвестирования 1, 3 и 9 соответственно. Введем переменные согласно (1):

Для 1-го проекта:

$X_1(1), X_2(1), X_3(1), X_4(1), X_5(1), X_6(1), X_7(1), X_8(1), X_9(1)$

⁹ Программа оптимизации инвестиционного портфеля с учетом рисков: пат. 218788 Рос. Федерация : МКП7 Н 04 В 1/38, Н 04 J 13/00 / Шаталова А. Ю., Семенчин Е. А. ; заявитель и патентообладатель Краснодар. ФГБОУ ВПО «Кубанский государственный университет». – № 2012661369; заявл. 31.10.12 ; опубл. 13.12.12, Бюл. № 2012619324.

¹⁰ Хачатрян С. Р. Методы и модели решения экономических задач / М. В. Пинешня, В. П. Буянов. – М.: Экзамен, 2005. – 384 с.

¹¹ Семенчин, Е. А. Обобщенная математическая модель инвестирования предприятий с учетом рисков / Е. А. Семенчин, А. Ю. Шаталова // Фундаментальные исследования. – 2011. – № 12 (часть 1). – С. 228–232.

для 2-го проекта: $X_1(2), X_4(2), X_7(2)$ (9.2)

для 2-го проекта: $X_1(3)$

Условие минимизации объема вложений предприятием в начальный момент в рассматриваемые проекты, согласно (2), будет иметь вид:

$$F = X_1(1) + X_1(2) + X_1(3) \rightarrow \min. \quad (10.2)$$

Укажем ограничения, которым должны удовлетворять объемы инвестирования, воспользовавшись (3):

$$\begin{aligned} 1,16X_1(1) - X_2(1) &= 0 && \text{— объемы вложений на конец} \\ \text{первого месяца,} &&& \\ 1,16X_2(1) - X_3(1) &= 0 && \text{— объемы вложений на конец} \\ \text{второго месяца;} &&& (11.2) \\ 1,16X_3(1) + 1,24X_1(2) - X_4(1) - X_2(2) &= 100000 && \text{— объемы} \\ \text{вложений на конец третьего месяца;} &&& \\ 1,16X_4(1) - X_5(1) &= 0 && \text{— объемы вложений на конец} \\ \text{четвертого месяца;} &&& \\ 1,16X_5(1) - X_6(1) &= 0 && \text{— объемы вложений на конец} \\ \text{пятого месяца;} &&& \\ 1,16X_6(1) + 1,24X_4(2) - X_7(1) - X_7(2) &= 0 && \text{— объемы} \\ \text{вложений на конец шестого месяца;} &&& \\ 1,16X_7(1) - X_8(1) &= 0 && \text{— объемы вложений на конец} \\ \text{седьмого месяца;} &&& \\ 1,16X_8(1) - X_9(1) &= 0 && \text{— объемы вложений на конец} \\ \text{восьмого месяца;} &&& \\ 1,16X_9(1) + 1,24X_7(2) + 1,28X_1(3) &= 850000 && \text{— объемы} \\ \text{вложений на конец седьмого месяца.} &&& \end{aligned}$$

Ограничения, связанные с индекс среднего риска, согласно формулам (4) и (5), будут иметь вид:

$$\begin{aligned} -X_1(1) + X_1(2) + 3X_1(3) &\leq 0 && \text{— для первого месяца,} \\ -X_2(1) + X_1(2) + 3X_1(3) &\leq 0 && \text{— для второго месяца,} \\ -X_3(1) + X_1(2) + 3X_1(3) &\leq 0 && \text{— для третьего месяца,} \\ -X_4(1) + X_4(2) + 3X_1(3) &\leq 0 && \text{— для четвертого месяца,} \\ -X_5(1) + X_4(2) + 3X_1(3) &\leq 0 && \text{— для пятого месяца,} \\ -X_6(1) + X_4(2) + 3X_1(3) &\leq 0 && \text{— для шестого месяца,} \\ -X_7(1) + X_7(2) + 3X_1(3) &\leq 0 && \text{— для седьмого месяца,} \\ -X_8(1) + X_7(2) + 3X_1(3) &\leq 0 && \text{— для восьмого месяца,} \\ -X_9(1) + X_7(2) + 3X_1(3) &\leq 0 && \text{— для девятого месяца.} \end{aligned} \quad (12.2)$$

Средняя продолжительность инвестирования с учетом (6) и (7) имеет вид:

$$\begin{aligned}
 & -3,5X_1(1) - 1,5X_1(2) + 4,5X_1(3) \leq 0 \text{ – для первого месяца,} \\
 & -3,5X_2(1) - 2,5X_1(2) + 3,5X_1(3) \leq 0 \text{ – для второго месяца,} \\
 & -3,5X_3(1) - 3,5X_1(2) + 2,5X_1(3) \leq 0 \text{ – для третьего месяца,} \\
 & -3,5X_4(1) - 1,5X_4(2) + 1,5X_1(3) \leq 0 \text{ – для четвертого месяца,} \\
 & -3,5X_5(1) - 2,5X_4(2) + 0,5X_1(3) \leq 0 \text{ – для пятого месяца,} \\
 & -3,5X_6(1) - 3,5X_4(2) - 0,5X_1(3) \leq 0 \text{ – для шестого месяца,} \\
 & -3,5X_7(1) - 1,5X_7(2) - 1,5X_1(3) \leq 0 \text{ – для седьмого месяца,} \\
 & -3,5X_8(1) - 2,5X_7(2) - 2,5X_1(3) \leq 0 \text{ – для восьмого месяца,} \\
 & -3,5X_9(1) - 3,5X_7(2) - 3,5X_1(3) \leq 0 \text{ – для девятого месяца.}
 \end{aligned}
 \tag{13.2}$$

Учитывая ограничения (8), (11.2)–(13.2) найдем оптимальное решение (10) с помощью разработанной программы «Оптимизация инвестиционного проекта с учетом рисков» в среде MatLab¹²: $F \approx 157711,2$.

$$\begin{aligned}
 X_1(1) &= 157711,2; & X_2(1) &= 182945,1; & X_3(1) &= 212216,3; & X_4(1) &= 146170,9; \\
 X_5(1) &= 169558,9; & X_6(1) &= 196687,5; & X_7(1) &= 409409,3; & X_8(1) &= 328743,8; \\
 X_9(1) &= 381342,8; & X_1(2) &= 0; & X_4(2) &= 146170,80066; & X_7(2) &= 328743,81188; \\
 X_1(3) &= 0.
 \end{aligned}$$

Общий доход предприятия от реализации инвестиционных проектов составляет 950 000 рублей, общая прибыль составила $950\ 000 - 157\ 711,2 = 792\ 288,76$ рублей.

Пример 3. Предприятие рассматривает различные инвестиционные проекты. Через 6 месяцев ему необходимо получить доход размером в 750 000 рублей, при этом возвратность кредита через 2 месяца должна составить $1/5$ всей суммы¹³.

В течение каждого месяца средний индекс риска инвестиционных проектов не превышает 6 и в начале каждого месяца средняя продолжительность погашения инвестиционных проектов не превышает 2,5 месяца. Необходимо при данных способах инвестирования и утвержденном графике выплат минимизировать сумму денег, которую предприятие должно затратить на инвестирование проектов, учитывая, что

¹² Программа оптимизации инвестиционного портфеля с учетом рисков: пат. 218788 Рос. Федерация : МКП7 Н 04 В 1/38, Н 04 J 13/00 / Шаталова А. Ю., Семенчин Е. А. ; заявитель и патентообладатель Краснодар. ФГБОУ ВПО «Кубанский государственный университет». – № 2012661369; заявл. 31.10.12 ; опубл. 13.12.12, Бюл. № 2012619324.

¹³ Хачатрян С. Р. Методы и модели решения экономических задач / М. В. Пинешня, В. П. Буянов. – М.: Экзамен, 2005. – 384 с.

длительность инвестирования этих проектов составляет соответственно 1, 2, 3, 6 месяцев. Процент прибыли от инвестирования составляет соответственно 1,5%, 3,5%, 6,0%, 11%. Индексы рисков для каждого инвестиционного проекта организаций составляют соответственно 1, 4, 9, 7.

Оптимальное решение, найденное с помощью разработанной программы «Оптимизация инвестиционного проекта с учетом рисков» в среде MatLab, имеет вид: $F=683\ 200$.

$X_1(1)=0$; $X_2(1)=851\ 611,7$; $X_3(1)=3267$; $X_4(1)=7668$; $X_5(1)=0$; $X_6(1)=0$;
 $X_1(2)=461800$; $X_3(2)=325300$; $X_5(2)=344500$; $X_1(3)=221300$; $X_4(3)=229700$;
 $X_1(4)=0$.

Общий доход банка от реализации инвестиционных проектов составляет 750000 рублей, общая прибыль составила $750\ 000 - 683\ 200 = 66\ 800$ рублей.

2. Задача оптимального финансирования инвестиционных проектов, позволяющая максимизировать получаемый доход предприятия

Рассмотрим задачу (тесно связанную с предыдущей) о максимизации дохода, которую может получить предприятие при инвестировании тех же проектов при фиксированном объеме инвестиционного фонда.

Инвестиционный фонд предприятия составляет s рублей. При условии сохранения тех же процентов прибыли, периодах инвестирования и ограничениях на средний индекс риска и среднюю продолжительность инвестирования проектов, что и в п. 1, предприятию необходимо распределить в течении n месяцев денежные средства инвестиционного фонда между имеющимися m инвестиционными проектами таким образом, чтобы полученный в конце доход был максимален¹⁴.

Воспользуемся таблицей 1 и обозначениями (1). Условие максимизации объема денежных средств, вложенных банком в рассматриваемые проекты, будет иметь вид:

$$F = \sum_{j: k_j: n} (1+0,01\delta_j)X_{n-k_j+1}(j) \rightarrow \max_j. \quad (9)$$

Укажем ограничения, которым должны удовлетворять объемы инвестирования $X_i(j)$ ($i=1, 2, \dots, n$, $j=1, 2, \dots, m$). Согласно условию задачи предприятие имеет s рублей для вложения в инвестиционные

¹⁴ Семенчин, Е. А. Математическая модель максимизации прибыли, получаемой банком за счет реализации инвестиционных проектов / Е. А. Семенчин, А. Ю. Шаталова // Фундаментальные исследования. – 2012. – № 6 (часть 1). – С. 258–262.

проекты. Согласно этому условию в первый месяц объем всех денежных средств инвестируемых в рассматриваемые инвестиционные проекты должен быть равен c руб.:

$$\sum_{j=1}^m X_1(j) = c. \quad (10)$$

Т.к. объемы денежных средств, вложенные в i -ом месяце, вместе с прибылью не будут изыматься предприятием из процесса инвестирования, а будут снова вложены в $i+1$ месяце, то соотношения, отражающие динамику вложения и возврата денежных средств вместе с прибылью начиная со второго месяца, будут иметь вид:

$$\begin{aligned} & \sum_{j: k_j \leq 2 \wedge k_j \neq 2} (1+0,01\delta_j)X_{2-k_j+1}(j) - \sum_{j: k_j \leq 2 \wedge k_j \neq 2} X_3(j) = 0 - \\ & \text{объемы вложений на конец второго месяца;} \\ & \dots\dots\dots \\ & \sum_{j: k_j \leq i \wedge k_j \neq i} (1+0,01\delta_j)X_{i-k_j+1}(j) - \sum_{j: k_j \leq i \wedge k_j \neq i} X_{i+1}(j) = 0 - \\ & \text{объемы вложений на конец } i\text{-го месяца;} \\ & \dots\dots\dots \\ & \sum_{j: k_j \leq (n-1) \wedge k_j \neq (n-1)} (1+0,01\delta_j)X_{n-k_j}(j) = 0 - \\ & \text{объемы вложений на конец } n\text{-го месяца.} \end{aligned} \quad (11)$$

Соотношения (5), (7), (8), (9), (10), (11) позволяют в условиях рассматриваемой задачи максимизировать получаемый предприятием доход.

Пример 4. Пусть в отличие от предыдущего примера 1 (см. п. 1, пример 2) необходимо максимизировать денежные средства инвестиционного фонда банка размером в 500 000 рублей к концу 9-го месяца. Периодичность финансирования имеющихся инвестиционных проектов составляет 1, 3 и 9 месяцев. Процент прибыли по проектам составляет соответственно 16 %; 24 %; 28 %. Индексы рисков для каждого инвестиционного проекта составляют соответственно 5, 7, 9.

При заданных условиях требуется максимизировать сумму денег, которую банк получит по окончании инвестирования проектов, учитывая, что в течение каждого месяца средний индекс риска проектов не превышает 6, и в начале каждого месяца средняя продолжительность погашения инвестиционных средств в проекты не превышает 4,5 месяцев.

Оптимальное решение, найденное с помощью разработанной программы «Оптимизация инвестиционного проекта с учетом рисков» в среде MatLab, имеет вид: $F=3\ 546\ 873,6$.

$$X_1(1) = 2107723,9, X_2(1) = 1639336,9, X_3(1) = 1663926,8, X_4(1) = 0, \\ X_5(1) = 0, X_6(1) = 0, X_7(1) = 0, X_8(1) = 0, X_9(1) = 0, X_1(2) = 0, X_4(2) = 1688885,7, \\ X_7(2) = 1747996,7, X_1(3) = 1639336,8.$$

Общий доход банка от реализации инвестиционных проектов составил 866 443 рублей, общая прибыль – 3 546 873,6 рублей.

3. Задача о максимизации получаемого предприятием дохода, при периодическом изменении инвестиционного фонда

Рассмотрим задачу о максимизации дохода, получаемого предприятием от реализации в течении n месяцев данных проектов при условии, что инвестиционный фонд предприятия будет ежемесячно пополняться как за счет средств, специально выделяемых для инвестирования, так и за счет прибыли от инвестируемых проектов¹⁵.

Первоначальный объем инвестиционного капитала банка составляет g_1 рублей. Бюджет инвестиционного фонда будет пополняться банком каждый i -ый ($i=1, 2, \dots, n-1$) месяц на сумму g_i ($g_i \geq 0$) рублей ($i=1, 2, \dots, n-1$) за счет специально выделяемых банком денежных средств. Сумма g_i устанавливается заранее. Кроме того, предполагается, что пополнение инвестиционного фонда осуществляется в моменты k_j за счет прибыли, получаемой от реализации каждого $(j-1)$ -го инвестиционного проекта, $j=1, 2, \dots, m$.

При условии сохранения тех же процентов прибыли, периодах инвестирования и ограничениях на средний индекс риска и среднюю продолжительность инвестирования проектов, как и в п. 2, необходимо максимизировать прибыль предприятия, которую оно получит к концу n -го месяца за счет инвестирования всех рассматриваемых проектов на условиях, указанных выше.

Воспользуемся таблицей 1, обозначениями (1) и условием максимизации объема денежных средств (9). Текущие инвестируемые средства в рассматриваемые проекты в i -ом месяце будут равны сумме специально выделенных банком денежных средств (g_i рублей ($i=1, 2, \dots, n-1$)) плюс прибыль, полученная от реализации инвестиционных проектов за предыдущий период времени:

$$g_i = \sum_{j=1}^m X_1(j) -$$

объемы вложений на конец первого месяца;

¹⁵ Семенчин, Е. А. Инвестиционный портфель с переменным объемом фонда инвестирования / Е. А. Семенчин, А. Ю. Шаталова // Фундаментальные исследования. – 2012. – № 9. – С. 739–744.

$$(1+0,01\delta_1)X_1(1)+g_2=\sum_{j:k_j:2}X_2(j)-$$

объемы вложений на конец второго месяца;

$$\dots\dots\dots$$

$$\sum_{j:k_j:(i-1)}(1+0,01\delta_j)X_{i-1}(j)+g_i=\sum_{j:k_j:i}X_i(j)-$$

объемы вложений на конец i -го месяца;

$$\dots\dots\dots$$

$$\sum_{j:k_j:(n-2)}(1+0,01\delta_j)X_{n-2}(j)+g_{n-1}=\sum_{j:k_j:(n-1)}X_{n-1}(j)-$$

объемы вложений на конец $(n-1)$ -го месяца;

где $\sum_{j:k_j:i-1}$ – означает суммирование по тем j ($j=1, 2, \dots, m$), для которых k_j

является делителем $(i-1)$ ($i=1, 2, \dots, n-1$), т. е. суммируются только те объемы вложений, которые уже вернулись банку с учетом указанной прибыли на текущий момент времени.

Соотношения (5), (7), (8), (9), (12) позволяют определить максимальный доход предприятия при периодическом изменении инвестиционного фонда¹⁶.

Пример 6. Банку необходимо проинвестировать, реализовать и получить прибыль от 3-х проектов в течение $n=9$ месяцев.

Первоначальный объем инвестиционного капитала банка составляет 800 000 рублей. Бюджет инвестиционного фонда будет пополняться банком в 3-ом месяце на сумму 450 000 рублей и в 6-ом месяце на сумму 300 000 за счет специально выделяемых банком денежных средств (пополнения инвестиционного фонда вначале других месяцев равны нулю). Кроме того, пополнение инвестиционного фонда будет осуществляться в каждом месяце за счет прибыли, получаемой от реализации этих же инвестиционных проектов, т.к. наименьшая периодичность инвестирования равна 1 месяц.

Периодичность инвестирования имеющихся четырех инвестиционных проектов (№1, №2, №3) составляет соответственно 1, 3 и 9 месяцев. Процент прибыли по проектам составляет соответственно 1,5; 3,5; 6 процентов ежемесячно от инвестируемой суммы. Индексы рисков для инвестиционных проектов составляют соответственно 1, 4, 7. Средний индекс риска для всех проектов не превышает 6, средняя

¹⁶ Семенчин, Е. А. Инвестиционный портфель с переменным объемом фонда инвестирования / Е. А. Семенчин, А. Ю. Шаталова // Фундаментальные исследования. – 2012. – № 9. – С. 739–744.

продолжительность инвестирования этих проектов не превышает 4,5 месяца¹⁷.

При указанных способах и утвержденном графике инвестирования проектов необходимо найти максимальную сумму денег, которую банк может получить по окончании их реализации.

Воспользовавшись соотношениями (12), методикой решения задачи, описанной в данном п. 3 и программным продуктом «Оптимизация инвестиционного проекта с учетом рисков» в среде MatLab, найдем решение данной задачи:

$$F=885473,8,$$

$$\begin{aligned} X_1(1)=247811, X_2(1)=0, X_3(1)=0, X_4(1)=0, X_5(1)=0, X_6(1)=0, \\ X_7(1)=0, X_8(1)=0, X_9(1)=0, X_1(2)=0, X_4(2)=3654789, X_7(2)=123465, \\ X_1(3)=57813. \end{aligned} \quad (13)$$

Таким образом, максимальная прибыль составляет 885473 рубля, а соответствующие объемы инвестирования в требуемые моменты времени определяются (13).

4. Задача о максимизации дохода предприятия при периодическом изменении инвестиционного фонда с учетом альтернативных источников инвестирования

Пусть в дополнении к условию задачи п. 3 предприятие может получать по t процентов в месяц за краткосрочный вклад в банк (альтернативный источник вложения денежных средств, которые не были проинвестированы в текущем месяце¹⁸). Существует также ограничение на объемы инвестирования рассматриваемых проектов: не более p рублей в месяц в каждый проект.

1) ¹⁷ Семенчин, Е.А. Методика оценки эффективности оптимального инвестиционного портфеля. Е.А. Семенчин, А. Ю., Шаталова. «Экономическое развитие России в условиях глобальной нестабильности: тенденции и перспективы». Сочи. КубГУ. Естественные науки. 2012.

¹⁸ Семенчин, Е. А. Оптимизация инвестиционного портфеля с ограниченным объемом инвестирования / Е. А. Семенчин, А. Ю. Шаталова / Экономика и эффективность организации производства № 17/ Брянская государственная инженерно-техническая академия, Брянск, 2012. С.91–95. Ткаченко И. Ю. Инвестиции: учеб. пособие для студ. высш. учеб. Заведений / И. Ю. Ткаченко, Н. И. Малых. – М.: Издательский цент-академия, 2009. – 240 с. Хачатрян С. Р. Методы и модели решения экономических задач / М. В. Пинешня, В. П. Буянов. – М.: Экзамен, 2005. – 384 с.

Воспользуемся таблицей 1 и обозначениями (1). Обозначим через $X_i(B)$ ($i=1, 2, \dots, n$) – объемы денежных средств, вложенных предприятием в дополнительный источник инвестирования.

Условие максимизации объема дохода, получаемого предприятием от реализации рассматриваемых инвестиционных проектов, будет иметь вид:

$$F = \sum_{j: k_j: n} (1+0,01\delta_j)X_{n-k_j+1}(j) + (1+0,01t)X_n(B) \rightarrow \max_j \quad (14)$$

Укажем ограничения, которым должны удовлетворять объемы вложений $X_i(j)$ ($i=1, 2, \dots, n, j=1, 2, \dots, m$). Согласно постановке задачи, первоначальный объем инвестиционного капитала предприятия составляет c рублей (см. п. 3). Согласно этому условию объем всех денежных средств на конец 1-ого месяца, инвестируемый в имеющиеся инвестиционные проекты, должен быть равен этой сумме:

$$\sum_{j=1}^m X_1(j) + X_1(B) + g_1 = c - \quad (15)$$

суммарный объем вложений в инвестиционные проекты на конец первого месяца.

Текущие инвестируемые средства в рассматриваемые проекты в i -ом месяце будут равны сумме специально выделенных предприятием денежных средств (g_i рублей ($i=1, 2, \dots, n-1$)) плюс прибыль, полученная от реализации инвестиционных проектов (в том числе и альтернативных) за предыдущий период времени:

$$(1+0,01\delta_1)X_1(1) + (1+0,01t)X_1(B) + g_2 = X_2(B) + \sum_{j: k_j: 2} X_2(j) -$$

объемы вложений на конец второго месяца;

.....

$$\sum_{j: k_j: (i-1)} (1+0,01\delta_j)X_{i-1}(j) + (1+0,01t)X_{i-1}(B) + g_i = X_i(B) + \sum_{j: k_j: i} X_i(j) - \quad (16)$$

объемы вложений на конец i -го месяца;

.....

$$\sum_{j: k_j: (n-2)} (1+0,01\delta_j)X_{n-2}(j) + (1+0,01t)X_{n-1}(B) + g_{n-1} = X_n(B) + \sum_{j: k_j: (n-1)}$$

$X_{n-1}(j)$

объемы вложений на конец $(n-1)$ -го месяца;

где $\sum_{j: k_j: i-1}$ – означает суммирование по тем j ($j=1, 2, \dots, m$), для которых k_j

является делителем $(i-1)$ ($i=1, 2, \dots, n$), т. е. суммируются только те объемы

вложений, которые уже вернулись предприятию с учетом указанной процентной ставки прибыли на текущий момент времени.

Соотношения (5), (7), (8), (14), (15), (16) позволяют максимизировать получаемый предприятием доход, при периодическом изменении инвестиционного фонда с учетом альтернативных источников инвестирования.

Пример 7. В компании рассматривается 3 проекта с целью их инвестирования в течение $n=9$ месяцев и получения от них за счет этого максимального дохода.

Первоначальный объем инвестиционного капитала банка составляет 800 000 рублей. Бюджет инвестиционного фонда будет пополняться банком в 3-ом месяце на сумму 350 000 рублей за счет специально выделяемых предприятием денежных средств (пополнения инвестиционного фонда вначале остальных месяцев за счет дополнительных денежных средств равны нулю). Кроме того, пополнение инвестиционного фонда будет осуществляться в каждом месяце за счет дохода, получаемого от реализации этих же инвестиционных проектов, т. к. наименьший период инвестирования равен одному месяцу. Периоды инвестирования рассматриваемых трех инвестиционных проектов (№1, №2, №3) равны соответственно 1, 3 и 9 месяцам; проценты прибыли проектов равны соответственно 5; 7; 9; 11 ежемесячно от инвестируемой суммы; индексы рисков составляют соответственно 1, 4, 7. Средний индекс риска для всех проектов не превышает 6, средняя продолжительность инвестирования проектов не превышает 4,5 месяца. Кроме того в компании предполагают получать дополнительную прибыль в размере 6% в месяц за краткосрочный вклад в банк тех денежных средств, которые не были вложены в инвестиционные проекты в данном месяце.

При указанных способах и утвержденном графике инвестирования проектов необходимо найти максимальный доход, который предприятие может получить по окончании реализации этих проектов.

Воспользовавшись описанной выше методикой, найдем решение данной задачи: $F=885473,8$,

$$\begin{aligned} X_1(1)=247811, \quad X_2(1)=147895, \quad X_3(1)=0, \quad X_4(1)=0, \quad X_5(1)=0, \\ X_6(1)=0, \quad X_7(1)=0, \quad X_8(1)=0, \quad X_9(1)=0, \quad X_1(2)=0, \quad X_4(2)=472143, \\ X_7(2)=488668, \quad X_1(3)=14785. \end{aligned} \quad (17)$$

Таким образом, максимальный доход, который может получить предприятие после реализации рассматриваемых проектов, составляет 1885473 рубля, а объемы инвестирования в рассматриваемые моменты времени определяются равенствами (17).

4. Оценка эффективности оптимального инвестиционного портфеля

Все описанные решения рассмотренных задач позволяют оптимизировать инвестиционные проекты и вычислять величину максимального дохода от произведенных вложений или минимизировать начальные вложения, но портфель, являющейся доходным, не всегда является эффективным (прибыльным).

Рассмотрим методику оценки эффективности (прибыльности) инвестиционного портфеля, приносящего максимальный доход¹⁹.

Компания рассматривает m , $m \geq 1$, инвестиционных проектов, длительность инвестирования каждого из них – n месяцев, $n \geq 1$. После определения соответствующих объемов инвестирования, осуществляемых в заданные фиксированные моменты времени, величины максимального дохода, получаемого от этого инвестирования и рассчитанного согласно вышеизложенной методике (п. 2), требуется оценить эффективность инвестиционных проектов (до начала процесса инвестирования)²⁰, т.е. ожидаемую прибыль, отнесенную к ожидаемым затратам.

В работе предложена формула для оценки эффективности инвестиционного портфеля (NPV), учитывающая чистую текущую стоимость проектов

$$NPV = CF_0 + \frac{CF_1}{1+r} + \frac{CF_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{CF_n}{(1+r)^n} = \sum_{t=0}^n \frac{CF_t}{(1+r)^t}, \quad (18)$$

где CF_t ($t=0, 1, \dots, n$) – чистый денежный поток в момент времени t т.е. разность между притоком денежных средств и суммой инвестиций (затрат) в t -ом месяце, $r = \text{const}$, – норма дисконта, т. е. процентная ставка, используемая для перерасчета возможных доходов в единую величину текущей стоимости.

На основании значения NPV можно сделать вывод об эффективности рассматриваемых инвестиционных проектов и принять решение о необходимости их инвестирования:

- 1) если $NPV \geq 0$, то проект эффективен;
- 2) если $NPV < 0$, то проект неэффективен.

Т.к. CF_i – разность между суммарным притоком денежных средств и суммарной величиной инвестиций (затрат) в i -ом месяце ($i=1, \dots, n$), то:

$$CF_i = \sum_{j: k_j \leq i} (1 + 0,01\delta_j) X_{i-k_j+1}(j) - \sum_{j: k_j \leq i} X_{i-k_j+1}(j). \quad (19)$$

¹⁹ Семенчин Е.А., Шаталова А. Ю. Оценка эффективности оптимального инвестиционного портфеля // Вестник КубГУ. Естественные науки. 2012.

²⁰ Ткаченко И. Ю. Инвестиции: учеб. пособие для студ. высш. учеб. Заведений / И. Ю. Ткаченко, Н. И. Малых. – М.: Издательский центр-академия, 2009. – 240 с.

Из соотношений (18), (19), следует, что:

$$NPV = \sum_{j=1}^m X_1(j) + \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j:k_j \leq i} (1 + 0,01\delta_j) X_{i-k_j+1}(j) - \sum_{j:k_j \leq i} X_{i-k_j+1}(j)}{(1+r)^i}, \quad (20)$$

$r = \text{const}$, – норма дисконта, т. е. процентная ставка, используемая для перерасчета возможных доходов в единую величину текущей стоимости.

Соотношение (20) позволяет оценить эффективности оптимального инвестиционного портфеля²¹.

Пример 8. Пусть требуется оценить эффективность инвестиционного портфеля из трех инвестиционных проектов: N_1, N_2, N_3 . Объем инвестиционного фонда составляет 500 000 руб. Периодичность инвестирования каждого из проектов N_1, N_2, N_3 , и прибыль, получаемая от их инвестирования, составляют соответственно 1, 3, 9 лет, и 1,5; 3,5; 6 процентов. Ставка дисконтирования $r = 7\%$. Максимальный доход, который можно получить от производимых инвестиций равен 885473,8 руб. Объемы инвестирования в указанные моменты времени равны:

$$\begin{aligned} X_1(1) = 247811, \quad X_2(1) = 147895, \quad X_3(1) = 0, \quad X_4(1) = 0, \quad X_5(1) = 0, \\ X_6(1) = 0, \quad X_7(1) = 0, \quad X_8(1) = 0, \quad X_9(1) = 0, \quad X_1(2) = 0, \quad X_4(2) = 472143, \\ X_7(2) = 488668, \quad X_1(3) = 14785. \end{aligned} \quad (21)$$

Из формул (18)–(21) следует:

$$\begin{aligned} CF_1 &= (1 + 0,015)X_1(1) - X_1(1) = 2678,565, \\ CF_2 &= (1 + 0,015)X_2(1) + (1 + 0,035)X_1(2) - X_2(1) - X_1(2) = 1703095, \\ CF_3 &= (1 + 0,015)X_3(1) + (1 + 0,06)X_1(3) - X_3(1) - X_1(3) = 82863,8, \\ CF_4 &= (1 + 0,015)X_4(1) + (1 + 0,035)X_2(2) - X_4(1) - X_2(2) = 21457, \\ CF_5 &= (1 + 0,015)X_5(1) - X_5(1) = 54781, \\ CF_6 &= (1 + 0,015)X_6(1) + (1 + 0,035)X_3(2) + (1 + 0,06)X_2(3) + (1 + 0,11)X_1(4) - \\ &- X_6(1) - X_3(2) - X_2(3) - X_1(4) = 14578, \\ CF_7 &= (1 + 0,015)X_4(1) + (1 + 0,035)X_2(2) - X_4(1) - X_2(2) = 21457, \\ CF_8 &= (1 + 0,015)X_5(1) - X_5(1) = 54781, \\ CF_9 &= (1 + 0,015)X_6(1) + (1 + 0,035)X_3(2) + (1 + 0,06)X_2(3) + (1 + 0,11)X_1(4) - \\ &- X_6(1) - X_3(2) - X_2(3) - X_1(4) = 14578. \\ NPV &= 500\,000 + \frac{2678,565}{1-0,07} + \frac{1703095}{(1-0,07)^2} + \frac{82863,8}{(1-0,07)^3} + \frac{21457}{(1-0,07)^4} + \\ &+ \frac{54781}{(1-0,07)^5} + \frac{14578}{(1-0,07)^6} + \frac{14578}{(1-0,07)^7} + \frac{14578}{(1-0,07)^8} + \frac{14578}{(1-0,07)^9} = 45778,4. \end{aligned}$$

²¹ Семенчин Е.А., Шаталова А. Ю. Оценка эффективности оптимального инвестиционного портфеля // Вестник КубГУ. Естественные науки. 2012.

Т. к. $NPV = 4578,4 > 0$, то построенный в п. 2 оптимальный инвестиционный портфель является прибыльным.

6. Вероятностная оценка эффективности оптимального инвестиционного портфеля

В методике, описанной в п. 5 и позволяющей осуществить оценку эффективности оптимального инвестиционного портфеля, была использована формула чистого приведенного эффекта, в которой учитываются дисконтированные денежные потоки и ставки дисконтирования²². На практике задача определения ставки дисконтирования часто оказывается достаточно сложной, особенно сложной она является для молодых компаний с присущей им неопределенностью оценки их будущих доходов и прибыли²³.

Компания рассматривает m , $m \geq 1$, инвестиционных проектов, длительность инвестирования каждого из них – n месяцев, $n \geq 1$. Ставка дисконтирования для определения стоимости денежных потоков четко не определена. Эксперты компании предполагают, что она является случайной величиной. После определения соответствующих объемов инвестирования, осуществляемых в заданные фиксированные моменты времени, величины максимального дохода, получаемого от этого инвестирования и рассчитанного согласно методике, предложенной в [4], требуется оценить эффективность всего инвестиционного портфеля (до начала процесса инвестирования)²⁴, т.е. оценить ожидаемую прибыль, отнесенную к ожидаемым затратам.

В данном пункте будем предполагать, что r является случайной величиной, закон распределения которой $p(x)$ определяется с помощью критериев согласия по статистическим данным²⁵. Тогда вместо NPV следует рассматривать математическое ожидание $M[NPV]$. В качестве $p(x)$ удобнее всего выбирать бета-распределение

$$p(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, \quad B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx, \quad x \in (0;1), \quad \alpha, \beta \geq -1.$$

²² Семенчин Е.А., Шаталова А. Ю. Оценка эффективности оптимального инвестиционного портфеля // Вестник КубГУ. Естественные науки. 2012.

²³ Колемаев, В. А. Математические методы и модели исследования операций: Учебник / В. А. Колемаев. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2008.

²⁴ Семенчин, Е.А. Методика оценки эффективности оптимального инвестиционного портфеля. Е.А. Семенчин, А. Ю., Шаталова. «Экономическое развитие России в условиях глобальной нестабильности: тенденции и перспективы». Сочи. КубГУ. Естественные науки. 2012.

²⁵ Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В. Е. Гмурман // ФГУП «Издательство «Высшая школа», 2004. – 342 с.

из следующих соображений:

- 1) $x \in (0,1)$, т. к. r – процентная ставка [9];
- 2) через бета-распределение могут быть выражены практически все применяемые на практике распределения вероятностей, в том числе и дискретные.

Тогда

$$M[NPV] = - \sum_{j=1}^m X_1(j) + \sum_{i=2}^n \frac{\sum_{j:k_j \wedge j < i} (1+0,01\delta_j) X_{v-k_j+1}(j) - \sum_{j:k_j \wedge j < i} X_{v-k_j+1}(j)}{\left(1 + \int_0^1 \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^\alpha (1-x)^{\beta-1} dx\right)^{i-1}}, \quad (21)$$

Пример 9. Пусть требуется оценить эффективность инвестиционного портфеля из трех инвестиционных проектов: N_1, N_2, N_3 . Объем инвестиционного фонда составляет 500 000 руб. Периодичность инвестирования каждого из проектов N_1, N_2, N_3 и прибыль, получаемая от их инвестирования, составляют соответственно 1, 3, 9 лет и 1,5; 3,5; 6 процентов. Ставка дисконтирования r – случайная величина, результаты наблюдений над которой приведены в табл. 2.

Таблица 2. РЕЗУЛЬТАТЫ НАБЛЮДЕНИЙ ЗНАЧЕНИЙ СТАВКИ ДИСКОНТИРОВАНИЯ r

Номер интервала	Границы интервала	Эмпирические частоты
1	[0;0,02)	4
2	[0,02;0,04)	10
3	[0,04;0,06)	12
4	[0,06;0,08)	15
5	[0,08;0,10)	13
6	[0,10;0,12)	12
7	[0,12;1)	0

По выборочным данным находим оценки математического ожидания $M(r)=0,067$ и дисперсии $D(r)=0,0004$ ²⁶.

$$M_r = \frac{\alpha + 1}{\alpha + \beta + 2}, \quad D_r = \frac{(\alpha + 1)(\beta + 1)}{(\alpha + \beta + 2)^2(\alpha + \beta + 3)}, \quad \text{то}$$

$$\begin{cases} 0,067 = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}, \\ 0,0004 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}. \end{cases} \quad (22)$$

Из системы (22) находим $\alpha=0,35$, $\beta=0,25$ ²⁷.

Т.к. $f(x;0,25;0,35) = \frac{(0,25 + 0,35 + 1)!}{0,25!0,35!} \int_0^x z^{0,35}(1-z)^{0,25} dz$, то используя табл. 2,

построим табл. 3:

Таблица 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

X_i	$F(x)$	m_i	$P_{i \text{ теор}}$	$\frac{(m_i - np_{i \text{ теор}})^2}{np_{i \text{ теор}}}$
0,01	0,249095191	4	0,006	0,0102
0,03	1,606329295	10	0,0162	0,026480165
0,05	2,153946306	12	0,0283	0,102593939
0,07	2,448991001	15	0,0415	0,151643017
0,09	1,933748771	13	0,0594	0,524007692
0,11	1,705746322	12	0,0711	0,547652795

Из табл. 3 находим $\chi_{набл}^2 = 10,18$.

Т.к. число степеней свободы $k=5$ и уровень значимости $\alpha=0,05$, то $\chi^2=11,1$ ²⁸. Гипотеза, выдвигаемая экспертами о бета-распределении генеральной совокупности с математическим ожиданием $M(r)=0,067$,

²⁶ Колемаев, В. А. Математические методы и модели исследования операций: Учебник / В. А. Колемаев. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2008.

²⁷ Семенчин, Е. А. Оптимизация инвестиционного портфеля с ограниченным объемом инвестирования / Е. А. Семенчин, А. Ю. Шаталова / Экономика и эффективность организации производства № 17/ Брянская государственная инженерно-техническая академия, Брянск, 2012. С.91–95.

²⁸ Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В. Е. Гмурман // ФГУП «Издательство «Высшая школа», 2004. – 342 с.

среднеквадратичным отклонением $\sigma = \sqrt{D_r} = 0,0004$ рассматриваемой случайной величины при уровне значимости $\alpha = 0,05$, не отвергается, т. к. $\chi_{набл}^2 < \chi^2$.

Максимальный доход, который можно получить, от производимых инвестиций, равен 885473,8 руб. Объемы инвестирования в указанные моменты времени равны²⁹:

$$\begin{aligned} X_1(1) = 178571, \quad X_2(1) = 465165, \quad X_3(1) = 0, \quad X_4(1) = 0, \quad X_5(1) = 0, \quad X_6(1) = 0, \\ X_1(A_2) = 0, \quad X_3(2) = 472143, \quad X_5(2) = 488668, \quad X_1(3) = 285714, \quad X_4(3) = 302857, \\ X_1(4) = 35714. \end{aligned} \quad (23)$$

Кроме того,

$$(1 + 0,015)X_1(1) - X_1(1) = 2678,565,$$

$$(1 + 0,015)X_2(1) + (1 + 0,035)X_1(2) - X_2(1) - X_1(2) = 1703095,$$

$$(1 + 0,015)X_3(1) + (1 + 0,06)X_1(3) - X_3(1) - X_1(3) = 82863,8,$$

$$(1 + 0,015)X_4(1) + (1 + 0,035)X_2(2) - X_4(1) - X_2(2) = 21457,$$

$$(1 + 0,015)X_5(1) - X_5(1) = 54781,$$

$$\begin{aligned} (1 + 0,015)X_6(1) + (1 + 0,035)X_3(2) + (1 + 0,06)X_2(3) + (1 + 0,11)X_1(4) - \\ - X_6(1) - X_3(2) - X_2(3) - X_1(4) = 14578. \end{aligned}$$

Тогда по формуле (21) с помощью [6] находим

$$\begin{aligned} M[NPV] \approx & -499999 + \frac{2678,565}{1 + 1,05 \int_0^1 x^{0,35} (1-x)^{-0,75} dx} + \frac{1703095}{(1 + 1,05 \int_0^1 x^{0,35} (1-x)^{-0,75} dx)^2} + \\ & + \frac{82863,8}{(1 + 1,05 \int_0^1 x^{0,35} (1-x)^{-0,75} dx)^3} + \frac{21457}{(1 + 1,05 \int_0^1 x^{0,35} (1-x)^{-0,75} dx)^4} + \frac{54781}{(1 + 1,05 \int_0^1 x^{0,35} (1-x)^{-0,75} dx)^5} + \\ & + \frac{14578}{(1 + 1,05 \int_0^1 x^{0,35} (1-x)^{-0,75} dx)^6} \approx 3457,21 \end{aligned}$$

²⁹ Семенчин, Е. А. Инвестиционный портфель с переменным объемом фонда инвестирования / Е. А. Семенчин, А. Ю. Шаталова // Фундаментальные исследования. – 2012. – № 9. – С. 739–744.

Т. к. $M[NPV]=3457,21>0$, то рассматриваемый инвестиционный портфель является эффективным (прибыльным).

Тогда по формуле (21) с помощью [6] находим

7. Обобщенная математическая модель оптимального финансирования инвестиционных проектов

В результате решения задач об оптимальном инвестировании проектов предприятием была построена обобщенная математическая модель оптимального финансирования инвестиционных проектов (2)-(22).

Соотношения (2) представляет собой целевую функцию, позволяющую найти минимальные начальные вложения и способ оптимального финансирования инвестиционных проектов с учетом ограничений (3), (5), (7), (8)³⁰.

Соотношения (9), (10), (11) позволяют максимизировать получаемый предприятием доход³¹.

Соотношение (12) позволяет определить максимальный доход предприятия при периодическом изменении инвестиционного фонда³².

Соотношения (14), (15), (16) позволяют максимизировать получаемый предприятием доход, при периодическом изменении инвестиционного фонда с учетом альтернативных источников инвестирования³³.

Соотношение (20) позволяет оценить эффективности оптимального инвестиционного портфеля³⁴.

Соотношение (22) представляет собой вероятностную оценку эффективности оптимального инвестиционного портфеля.

³⁰ Семенчин, Е. А. Обобщенная математическая модель инвестирования предприятий с учетом рисков / Е. А. Семенчин, А. Ю. Шаталова // *Фундаментальные исследования*. – 2011. – № 12 (часть 1). – С. 228–232.

³¹ Семенчин, Е. А. Математическая модель максимизации прибыли, получаемой банком за счет реализации инвестиционных проектов / Е. А. Семенчин, А. Ю. Шаталова // *Фундаментальные исследования*. – 2012. – № 6 (часть 1). – С. 258–262.

³² Семенчин, Е. А. Инвестиционный портфель с переменным объемом фонда инвестирования / Е. А. Семенчин, А. Ю. Шаталова // *Фундаментальные исследования*. – 2012. – № 9. – С. 739–744.

³³ Семенчин, Е. А. Оптимизация инвестиционного портфеля с ограниченным объемом инвестирования / Е. А. Семенчин, А. Ю. Шаталова / *Экономика и эффективность организации производства* № 17/ Брянская государственная инженерно-техническая академия, Брянск, 2012. С.91–95.

³⁴ Семенчин Е.А., Шаталова А. Ю. Оценка эффективности оптимального инвестиционного портфеля // *Вестник КубГУ. Естественные науки*. 2012.