УДК 534

РАСЧЕТ АВТОРЕЗОНАНСНЫХ СИСТЕМЫ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ СЛУЧАЙНЫХ СИЛ

Крупенин В.Л.

Продолжено изучение авторезонансных виброударных систем. В качестве примера выбрана система, содержащая датчик импульсов удара. Основная цель работы разработка методики расчета систем при наличии малых случайных возмущений. Дана соответствующая методика расчета, основанная на определении флуктуационных поправок к решениям, получаем методом усреднения. Получены необходимые расчетные соотношения. Приведены примеры расчетов для двух типов возмущений – малыми случайными силами типа белого шума и силами с малым временем корреляции. Полученные решения имеют ясную механическую трактовку.

1. Проведем расчет одной авторезонансной системы со специфический обратной связью [1, 2]. Рассмотрим устройство, изображенное на рис.1. Линейный осциллятор совершает колебания с соударениями о неподвижный ограничитель 2, на котором установлен датчик импульсов удара, формирующий сигнал, пропорциональный *J*. Предположим, что зазор является малой величиной ($\Delta=\varepsilon\Delta_1>0$) и задача становится квазиизохронной [1, 2] (виброударная система с нулевым зазором оказывается изохронной с частотой 2Ω). На рис 1 показана схема анализируемой системы: ограничитель 2, на котором установлен датчик импульсов удара, формирующий сигнал, пропорциональный *J*. Этот сигнал преобразуется в некоторую функцию $\varepsilon K(J)$, которая .после перемножения с сигналом x_t, поступающим с датчика " скорости 1, подается на возбудитель колебаний *4*.

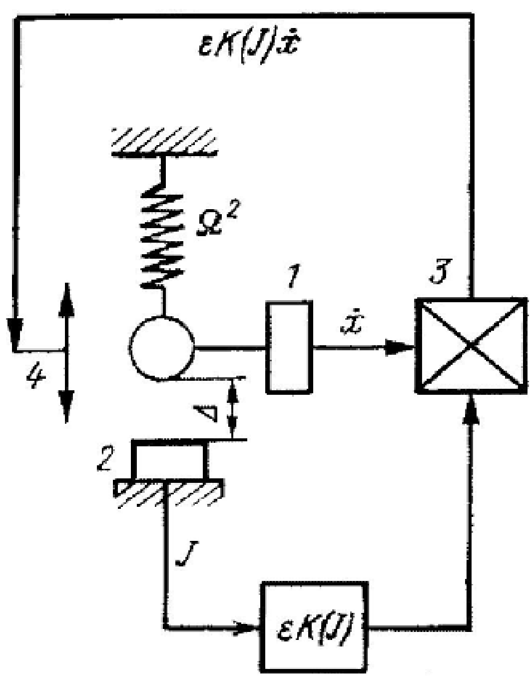

Рис.1.

Считая, что потери энергии при ударе описываются коэффициентом восстановления R ($1 — R = \varepsilon r$) и преобразователи работают безынерционно, уравнение движения запишем в виде

$$x_{tt} + \Omega^2 x+\Phi(x-\Delta,x_t)=-\varepsilon[\Phi_2(x,x_t)+K(J)x_t +2bx_t], \qquad (1)$$

причем нижняя индексация по независимой переменной обозначает операцию дифференцирования, а функция $\Phi_2(x,x_t)$ – выражает потери энергии при ударах. Примем для определенности $K(J)=K_0 J^{-1}$, $K_0>0$.

Будем решать уравнение (1) методом усреднения в квазиизохронном приближении [1, 2]. Совершив замену переменных, перейдем к переменным «импульс-фаза» (J, ψ) :

$$x=-J\chi(\psi,\omega);\ x_t=-\omega J\chi_{\psi}(\psi,\omega), \qquad (2)$$

где периодическая функция Грина (ПФГ) – суть реакция линейной части системы на $2\pi/\omega$-периодическую δ-функцию Дирака [1, 2]. В соответствии с методиками усреднения будем иметь систему с быстрой фазой:

$$J_t=-\varepsilon[(r\pi^{-1}\Omega+b)J - 0{,}5\ K_0],\quad \psi_t=2\Omega(1-2\varepsilon\Omega\Delta_1 J^{-1}\pi^{-1}). \qquad (3)$$

Здесь существует единственный стационарный режим $J^0= K_0[2(r\pi^{-1}\Omega+b)]^{-1}$. Общее решение первого из двух выписанных уравнений (3):

$$J=J^0\{1—\exp[-\varepsilon[(r\pi^{-1}\Omega+b)\underline{t}]\}+J(0)\exp[-\varepsilon[(r\pi^{-1}\Omega+b)t] \qquad (4)$$

свидетельствует о самовозбуждаемости этой системы, а также об устойчивости стационарного решения (декремент $\lambda = \varepsilon\,(r\pi^{-1}\Omega+b)$).

Частота авторезонансного режима

$$\omega_0=2\Omega\ [1- 4\ \varepsilon\ \Delta_1(r\pi^{-1}\Omega+b)\Omega\pi^{-1}\ K_0^{-1}]. \qquad (5)$$

2. Пусть на эту систему действует еще случайная сила $\xi(t)$, описываемая центрированным стационарным случайным процессом, удовлетворяющим условию сильного перемешивания, которое записывается с оценкой на его корреляционную функцию $K_{\xi}(\tau)$:

$$|K_{\xi}(\tau)| < M_0 e^{-\alpha\tau},\ M_0,\alpha= \text{const} > 0. \qquad (6)$$

Уравнение движения запишем в виде

$$x_{tt} + \Omega^2 x+ \Phi(x, x_t)= \varepsilon\ [-2bx_t-\Omega^2\Delta_1 + K_0 J^{-1}x_t+ \xi(t)]. \qquad (7)$$

Переходя к переменным «импульс — фаза» (R=1), получим систему в стандартной форме

$$J_t =-4\varepsilon[2bJ\chi_t\ (t -\varphi) - K_0\chi_t(t - \varphi) + \xi (t) - \Omega^2\Delta_1]\ \chi_t(t - \varphi),$$

(8)

$$\varphi_t = -4\ \varepsilon\ J^{-1}[2bJ\chi_t(t - \varphi) - K_0\chi_t(t - \varphi) - \Omega^2\Delta_1 + \xi (t)]\ \chi(t - \varphi).$$

Виду изохронности вырожденной системы здесь $T=\pi\Omega^{-1}$ и

$$\chi(t) = (2\,\Omega)^{-1} \sin\Omega t,\qquad \chi_t(t)=0{,}5\cos\Omega t,\ t\in [0, \pi\Omega^{-1} [.$$

Усредняя правые части системы (8) по явно входящему времени, учтем что $\mathbf{M}\xi=0$ и, используя [1, 2] получим:

$$J_t=-\varepsilon(bJ-0{,}5K_0);\quad \varphi_t = 2\,\varepsilon\,\Omega\Delta_1 J^{-1}\pi^{-1} \tag{9}$$

Первое уравнение (9) даст единственное устойчивое стационарное решение

$$J_0= K_0 / 2b, \tag{10}$$

которому соответствует фаза $\varphi_0(t)= 2\,\varepsilon\,\Omega\Delta_1 J^{-1}\pi^{-1}t$, где коэффициент при переменной t дает поправку к частоте авторезонанса 2Ω (см. (5)).

3. Вернемся к стохастическому уравнению движения (7). При малом уровне стохастических сил естественно ожидать, что параметры режима движения должны содержать также малую случайную составляющую. В связи с этим возникает естественное желание получить *флуктуационную поправку* к решению, даваемому методом усреднения. Способы получения таких поправок дают методики, разработанные Р. JI. Стратоновичем [3] и Р. 3. Хасьминским [4]

В этом пункте мы рассмотрим в качестве примера вопрос об алгоритме построения нормальных уклонений от усредненной системы [4]. Суть метода заключается в том, что искомая флуктуационная поправка находится из некоторого стохастического аналога уравнений в вариациях. Заметим, что задачи, рассматриваемые здесь, выходят за рамки теорем, обосновывающих формальные построения, поскольку они требуют гладкость входящих в уравнения движения членов, в то время, как виброударные системы относятся к негладким. Будем использовать предложенные алгоритмы формально, отложив математические аспекты проблемы на последующие работы. Рассмотрим систему в стандартной форме

$$\mathbf{z}_t = \varepsilon\boldsymbol{F}(t, z), \qquad \mathbf{z} \in \mathbf{R}^n, \tag{11}$$

где вектор F — случайный по t процесс, удовлетворяющий ряду условий и, в частности, условию *сильного перемешивания,* которое в прикладных задачах может пониматься как требование достаточно малого времени корреляции. Обозначим $\mathbf{z}(t)$ решение этой системы. Пусть снова $\mathbf{M}$ — оператор математического ожидания, а $\mathbf{z}^\circ(t)$ — решение усредненной системы

$$\mathbf{z}_t^\circ(t)= \varepsilon\mathbf{F}_0(z),\mathbf{F}_0(\mathbf{z})=\lim T^{-1}\int_\theta^{\theta+T} \mathbf{MF}(t, \mathbf{z})dt,\ (T\to\infty), \tag{12}$$

где θ - произвольный момент времени, а относительно подобных пределов здесь и ниже , разумеется, предполагается их равномерное существование по $\mathbf{z}$ и по θ. Переходя к медленному времени $\tau=\varepsilon t$, будем рассматривать решения $\mathbf{z}(\tau)$ и $\mathbf{z}^\circ(\tau)$ на конечном промежутке $[0, L_0]$, L_0 =const > 0. Можно ожидать, что $\mathbf{z}^\circ$ отличается от $\mathbf{z}$ на малую величину. Для достаточно гладких систем показано [4], что если представить точное решение в виде

$$\mathbf{z}(\tau)=\mathbf{z}^\circ(\tau)+(\varepsilon)^{1/2}\mathbf{y}^{\varepsilon}(\tau),$$

то при $\varepsilon\to0$ процесс $y^\varepsilon(\tau)$, представляющий собой искомую флуктуационную поправку, аппроксимируется на конечном отрезке времени решением $\mathbf{y}^\circ(\tau)$системы *стохастических дифференциальных уравнений Ито*

$$d\mathbf{y}^\circ(\tau)=[\partial\mathbf{F}_0(\mathbf{z}^\circ(\tau))/\partial\mathbf{z}^\circ]\mathbf{y}^0(\tau)d\tau+\boldsymbol{\sigma}[\mathbf{x}^0(\tau)]d\mathbf{w}(\tau). \tag{13}$$

При этом корреляционная матрица $\boldsymbol{\sigma}$ строится, исходя из условия $\boldsymbol{\sigma}\,\boldsymbol{\sigma}^{T}=[A_{kj}]$, причем значок «^{T}» обозначает транспонирование,

$$A_{kj}(\mathbf{z})=\lim T^{-1}\int_{\theta}^{\theta+T} ds\int_{\theta}^{\theta+T}\mathbf{M}\{[F_k(t,\mathbf{z})-\mathbf{M}F_k(t,\mathbf{z})]\mathbf{M}\{[F_j(t,\mathbf{z})-\mathbf{M}F_j(t,\mathbf{z})]\}dt,\ (T\to\infty) \qquad (14)$$

$\boldsymbol{w}(\tau)$- n-мерный винеровский процесс.

В случае, когда исходная система – детерминированная, уравнение Ито (13) превращается в уравнение в вариациях для усредненной системы. Кэффициент сноса $\partial\mathbf{F}_0/\partial\mathbf{z}°$ указывает среднее значение, вокруг которого «распределена» флуктуационная добавка, определяемая, вообще говоря, матричным кэффициентом диффузии $\boldsymbol{\sigma}$.

4. Вернемся к авторезонансной виброударной системе со случайной составляющей (7). Для отыскания нормального уклонения от решения (J^0, φ^0) – см. (10), можно выписать теперь уравнения (9) в виде:

$$J_t=-\varepsilon(bJ-0{,}5K_0)\equiv\varepsilon F_{01}(J);\quad \varphi_t=2\,\varepsilon\Omega\Delta_1 J^{-1}\pi^{-1}\equiv\varepsilon F_{02}(J). \qquad (15)$$

Найденному выше устойчивому стационарному режиму $J^0=K_0[2(\varepsilon\pi^{-1}\Omega+b)]^{-1}$ отвечает фаза $\varphi^0=2\,\varepsilon\,\Delta_1 J^{-1}\pi^{-1}\Omega t$. Для получения уравнения (13), необходимо продифференцировать (15) и перейти к медленному времени $\tau=\varepsilon t$. Имеем:

$$[\partial/\partial J^0]F_{01}(J)=-b,\ [\partial/\partial J^0]F_{02}(J)=2\,\Omega\Delta_1(J^0)^{-2}\pi^{-1},$$

$$[\partial/\partial\varphi^0]F_{01}=[\partial/\partial\varphi^0]F_{02}=0. \qquad (16)$$

С учетом периодичности ПФГ $\chi(t)$ и ее производной $\chi_t(t)$ компоненты корреляционной матрицы (14), вычисляемые в соответствии с уравнениями в стандартной форме и условием $\mathbf{M}\xi=0$, имеют вид:

$$A_{11}=(16/T)\int_0^T ds\int_{-\infty}^{\infty}\chi_t(t)\,\chi_s(s)K_\xi(t-s)dt, \qquad (17)$$

$$A_{12}=A_{21}=(16/T\,J^0)\int_0^T ds\int_{-\infty}^{\infty}\chi_t(t)\,\chi(s)K_\xi(t-s)dt, \qquad (18)$$

$$A_{22}=16T^{-1}(J^0)^{-2}\int_0^T ds\int_{-\infty}^{\infty}\chi(t)\,\chi(s)K_\xi(t-s)dt, \qquad (19)$$

и тем самым уравнение Ито (13) определено. Подставляя сюда нужные корреляционные функции, можно построить требуемое решение на основе известных правил [5].

Рассмотрим некоторые частные случаи, позволяющие подробно исследовать флуктуационную поправку к стационарному значению импульса J^0.

5. Пусть $\xi(t)$ – белый шум интенсивности S_0. Тогда корреляционная функция $K_\xi(t)=\pi S_0\delta(t)$, где $\delta(t)$ – δ – функция Дирака. В соответствии с видом ПФГ $\chi(t)$: $A_{12}=A_{21}=0$, и система (13) распадается. Для флуктуационной поправки $y_1^0(\tau)$ получаем следующее уравнение Ланжевена:

$$y_{1\tau}^{0}(\tau)=-\gamma\,y_1^{0}+\xi_0(t),\qquad \tau=\varepsilon t, \qquad (20)$$

где $\xi_0(t)$ – белый шум интенсивности $4\pi S_0$, $\gamma=b$ – декремент колебаний в детерминированной системе. Решая выписанное уравнение, найдем для корреляционной функции случайного процесса $y_1{}^0(\tau)$:

$$K_y(\tau)=\sigma^2_y\exp(-\gamma|\tau|),$$

где дисперсия процесса $\sigma^2_y=4\pi S_0\,\gamma^{-1}$.

6. Пусть теперь $\xi(t)$-случайный процесс, отличный от белого шума, но с малым временем корреляции, так что в оценке (6) $\alpha T<<1$. Оказывается, что для флуктуационной поправки снова можно получить уравнение Ланжевена, с другим коэффициентом диффузии. Вычислим представления для компонент матрицы A_{kj} в виде числовых рядов, воспользовавшись представлением для ПФГ и её производной через ряды Фурье:

$$\chi(t)=\mathrm{T}^{-1}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\exp(ik\omega t)[\Omega^2-k^2\omega^2]^{-1};\ \chi_t(t)=\mathrm{T}^{-1}\sum_{k=-\infty}^{\infty}ik\,\omega\exp(ik\omega t)[\Omega^2-k^2\omega^2]^{-1};\qquad(21)$$

Для коэффициента A_{12} после интегрирования по t найдем:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\chi_t(t)\,K_\xi(t-s)dt=\mathrm{T}^{-1}\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi\,\mathrm{i}\,\mathrm{k}\,\omega S(k\omega)\exp(ik\omega t)[\Omega^2-k^2\omega^2]^{-1},\qquad(22)$$

где фигурирует спектральная плотность процесса $\xi(t)$ на частоте $k\omega=2k\Omega$:

$$S(k\omega)=(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}K_\xi(\tau)e^{ik\omega\tau}d\tau.\qquad(23)$$

Внесем (22) в (18) и затем выполним интегрирование по s:

$$A_{12}=(16/T\,J^0)\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi\,i\,k\,\omega S(k\omega)[\Omega^2-k^2\omega^2]^{-2}.\qquad(24)$$

Ряд (24) можно приближенно просуммировать при помощи приёма, предложенного в [1, 2]. Введём вспомогательную функцию

$$h(t)=(16/T\,J^0)\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi\,\mathrm{i}\,\mathrm{k}\,\omega S(k\omega)\exp(ik\omega t)[\Omega^2-k^2\omega^2]^{-2},\qquad(25)$$

такую, что $h(0)=h(2\pi\,\omega^{-1})=A_{12}$. Эту функцию можно записать в конечном виде на отрезке $[0,T]$ при помощи подсчета вычетов функции комплексного переменного

$$Z(p)=pL_0(p)(p^2+\Omega^2)^{-2},$$

где $L_0(p)$ – преобразование Лапласа корреляционной функции. Если время корреляции мало, то вычеты $L_0(p)$ лежат далеко от мнимой оси и существенный вклад в искомое представление вносят только полюсы $p_{1,2}=\pm i\,\Omega$.Следовательно,

$$A_{12}=(16/TJ^0)\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi\,\mathrm{i}\,\mathrm{k}\,\omega S(\Omega)[\Omega^2-k^2\omega^2]^{-2}+\ \ldots.\qquad(26)$$

Но входящий в (26) бесконечный ряд равен нулю, так как

$$\int_0^T \chi_t(t)\chi(t)\,dt = \mathrm{T}^{-1}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{i}\,k\,\omega[\Omega^2-k^2\omega^2]^{-2}=(8\Omega)^{-1}\int_0^{\Theta}\sin 2\Omega t\,dt=0 \qquad (\Theta=\pi/\Omega;\ \omega=2\Omega).$$

Поэтому с точностью до членов высоких порядков малости, получаем, что

$$A_{11}\approx 4\pi\ S(\Omega). \qquad (27)$$

Следовательно, уравнение Ланжевена (20) для уклонения $y_1{}^0(\tau)$ содержит белый шум $\xi_0(t)$ интенсивности $4\pi S(\Omega)$, а дисперсия $\sigma^2{}_y=4\pi^2 S(\Omega)\gamma^{-1}$.

Этот результат физически оправдан тем обстоятельством, что вне зависимости от вида малого широкополосного воздействия, флуктуации воспринимаются системой главным образом на частоте резонанса линейной части системы.

Подобным образом могут быть разобраны и другие частные случаи, а также использованы другие способы подсчета флуктуационных поправок [1, 2].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № № 13-08-01235-а и 13-08-90419 Укр-ф-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бабицкий В.И., Крупенин В.Л. Колебания в сильно нелинейных системах. М.: Наука, 1985.320 с. .
2. . Babitsky V.I.,. Krupenin V.L Vibration of Strongly Nonlinear Discontinuous Systems.- Berlin. Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 2001. –404 p.p
3. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флюктуаций в радиотехнике. – М.: Советское радио, 1961. – 558 с.
4. Хасьминский Р.З. О случайных процессах, определяемых дифференциальными уравнениями с малым параметром.// Теория вероятностей и её применения, 1966, т. 11, №2. –С. 240-259.
5. Болотин В.В. Случайные колебания упругих систем. – М.: Наука.1979. – 339 с.
6. Крупенин В.Л. К расчету псвдоконсервативных автоколебательных виброударных систем.//Проблемы машиностроения и надежности машин. -№2, 1993 - С. 90-96..