# АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ С КОМПЕНСАЦИЕЙ СИЛ ДИССИПАЦИИ

**Виталий Львович Крупенин**

*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук, Москва, Россия*

krupeninster@gmail.com

***Аннотация.*** *Рассмотрены специальный класс автоколебательных (авторезонансных) систем, при возникновении в которых периодических режимов, имеет место точная взаимная компенсация сил внешнего возбуждения и диссипации в каждый момент времени. В результате, по крайней мере, на модельном уровне, в таких системах возможны режимы движения, соответствующие идеальному случаю отсутствия трения. Рассмотрены особенности данных моделей и даны методы их анализа. В качестве примера рассмотрены виброударные системы и один класс распределенных автоколебательных систем типа струн или тонких стержней, возбуждаемых силами, моделируемыми полиноминальными функциями вязкого трения.*

***Ключевые слова:*** *автоколебания, периодические режимы, виброударные системы, колебания струн и стержней, периодические стоячие волны, консервативные модели, принцип энергетического баланса.*

# DYNAMICS OF SELF-OSCILLATORY SYSTEMS WITH COMPENSATION OF FRICTION FORCES IN EACH TIMEPOINT

**Vitaly L. Krupenin**

*Federal Budget-Funded Mechanical Engineering Research Institute, RAS, Moscow, Russia*

krupeninster@gmail.com

Are considered a special class of autoresonant systems, at emergence in which periodic modes, exact mutual compensation of forces of external excitement and dissipation takes place. As a result, at least, at model level, in such systems movement modes, in accuracy corresponding to an ideal case of absence of friction are possible. Features of these models are considered and methods of their analysis are given. As an example vibro-impact systems and one class of the distributed self-oscillatory systems like strings or the thin cores excited by forces, modeled polynominal functions of viscous friction are considered.

***Key words***: *self-oscillations, periodic regimes, vibro-impact systems, the vibration of the strings and the rods, periodical standing waves, a conservative model, the energy balance principle.*

1. Понятие об авторезонансных механических системах было введено в классической фундаментальной монографии А. А. Андронова, А.А. Витта и С.Э. Хайкина [1]. В работах [2—8] были предложены основные принципы организации и научные основы проектирования авторезонансных технологических вибрационных машин, в частности машин виброударного действия. В основу расчетов таких систем так или иначе непременно кладется принцип энергетического баланса, в соответствии с которым при осуществлении периодического автоколебательного режима работа сил диссипации на периоде движения компенсируется работой сил возбуждения.

Рассмотрим склерономную механическую систему с полной диссипацией и $n$ степенями свободы. Пусть симметричная положительно определенная матрица $K$ ($[n\times n]$) определяет кинетическую энергию системы, а функция $\Pi_0(x)\in \mathbf{R^n}$ ($x\in\mathbf{R^n}$ — вектор обобщенных координат) — потенциальную энергию. Если силы диссипации даются функцией $g_1(x,\dot{x})$, а силы возбуждения $[-g_2(x,\dot{x})]$ ($g_1, g_2\in \mathbf{R^n}$), то уравнение движения имеет вид

$$K\ddot{x} + F(x) + g_1(x,\dot{x}) = g_2(x,\dot{x}), F(x) = \mathrm{grad}\Pi_0(x) \quad (1)$$

В этом случае для T-периодического автоколебательного процесса $x_0(t)$ имеем в соответствии с принципом энергетического баланса [5, 6]:

$$\int_0^T [g_2(x_0,\dot{x}_0) - g_1(x_0,\dot{x}_0)]x_0 dt=0, \quad (2)$$

где под интегралом — скалярное произведение векторов.

Этот принцип может быть легко переформулирован, если уравнение движения задано в операторном виде или если оно представляет собой уравнение в частных производных. В первом случае, если, например, для наблюдаемой координаты $x(t)$ известен оператор динамической податливости $L(p)$ и операторное уравнение системы приводится к виду

$$x(t) = L(p)[\ g_2(x_0,\dot{x}_0) - g_1(x_0,\dot{x}_0)], \quad (3)$$

где теперь скалярные функции описывают соответственно возбуждение и диссипацию, вместо соотношения (2), при условии, что $x_0(t)$ − T-периодический режим, устанавливающийся в системе (3), имеем:

$$L^{-1}(p)\mathrm{x}_0(t) - g_2(x_0,\dot{x}_0) + g_1(x_0,\dot{x}_0)]x_0 dt=0, \quad (4)$$

Во втором случае, если, например, состояние системы описывает некоторая одномерная функция перемещения $u(x,\ t)$, а неконсервативные силы есть $g_{1,2}(u,u_t)$, (знаки расставляются как и ранее) имеем:

$$\int_X \int_0^T [g_2(u,u_t) - g_1(u,u_t)]u_t(x,t)dxdt = 0, \quad (5)$$

где $u(x,t)=u(x,t+T)$ при всех $x$ и $t$; интегрирование по переменной $x$ распространяется на заданное подмножество X множества её изменения.

Соотношения типа (2), (4), (5) являются базовыми при проведении приближенного анализа автоколебательных систем. Как правило, подставляя в эти соотношения предполагаемые представления для искомых режимов, при их помощи отыскивают какие-либо неизвестные параметры законов движения.

Существуют, однако, системы, для которых условия типа (2), (4), (5) допускают существенное усиление. В этих системах при некоторых значениях параметров возможно установление периодических режимов, для которых имеет место не только баланс работ неконсервативных сил, но и баланс самих этих сил в любой момент времени. В этом случае будут реализовываться авторезонансные колебания и движение будет происходить так, как будто трение вообще отсутствует.

Рассмотрим для определенности систему (1). Пусть в консервативном случае ($g_1$=$g_2$=0) здесь можно построить двухпараметрическое семейство $T_0$-периодических решений $x=x_0(A;t-\varphi)$, где величина $A$ — интеграл движения, взаимно однозначно связанный с полной энергией; зависимость $A(\omega_0)(\omega_0 = 2\pi T_0^{-1})$ определяет скелетную кривую системы. Произвольную фазу φ далее без ограничения общности можно положить равной нулю. Предположим, что при некоторых значениях $A = A^0$ и $\omega_0 = \omega_{01}$, для системы (1) имеет место соотношение более сильное, чем (2):

$$g_1[x_0(A^0,t), \dot{x}_0(A^0,t)]= g_2[x_0(A^0,t), \dot{x}_0(A^0,t)] \quad (6)$$

для всех $t \in \mathbf{R}$.

Тогда из (1) следует, что в соответствии со сделанным предположением

$$K\ddot{x}_0(\mathrm{A}_0, \mathrm{t}) + F[x_0(\mathrm{A}_0, \mathrm{t})] \equiv 0$$

и именно поэтому при условии (6) автоколебательный режим $x_0(A^0;t)$, имеющий период $2\pi\omega_{01}^{-1}$ происходит как бы в условиях отсутствия трения.

Системы, допускающие режимы движения, удовлетворяющие условиям типа (6), и будем называть системами с компенсацией сил диссипации в каждый момент времени – (КСД –системами); они также получили наименование «*псевдоконсервативные*» [9]. Ниже приводятся примеры моделей подобных систем, и показывается, что классы таких моделей достаточно представительны. Методика, в соответствии с которой можно осуществить синтез псевдоконсервативной авторезонансной системы, дана, в частности, в [10].

2. Рассмотрим модель симметричной виброударной системы (рис. 1). Здесь тело массы $m$ находится в зазоре величиной $2\Delta$ и соударяется с неподвижными ограничителями. Возбуждение осуществляется за счет нелинейной характеристики трения $f(\dot{x})$, где координата $x$ отсчитывается от середины зазора. Уравнение (1) принимает вид

$$m\ddot{x} + F(x) = f(\dot{x}), \tag{7}$$

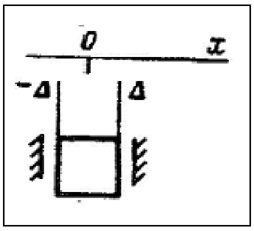


Рис. 1

где $F(x)$ — сила удара, представление которой определяет гипотеза ударного взаимодействия.

Если считать удар мгновенным и абсолютно упругим, то , обозначая произвольтный момент удара $t_0$, будем иметь [5]:

$$\dot{x}(t_0 - 0) = -\dot{x}(t_0 + 0), |x(t_0)| = \Delta, |x(t_0)| \le \Delta. \tag{8}$$

Эти соотношения полностью определяют вид функции F. Если предположить, что удары следуют периодически и происходят поочередно с каждым из ограничителей, и совместить момент удара, например, о правый ограничитель с началом отсчета времени, то можно записать [5]: $F[x(t)] = J\delta^{T/2}(t)$, где $J = 2m|\dot{x}(-0)|$ -импульс удара; $\delta^{T/2}(t)$- симметричная T-периодическая $\delta$-функция Дирака [5, 6]; $T=2\pi\omega^{-1}$ – период, в течении которого происходят два соударения – о правый, затем о левый ограничитель (рис. 1).

Для силы $f(\dot{x}) = g_2(\dot{x}) - g_1(\dot{x})$ выбирают различные представления. Часто принимают $g_1(\dot{x}) = -\alpha\dot{x}$, $g_2(\mathrm{x}) = \beta\dot{x}^3$ или $g_1(\dot{x}) = -\beta\,\mathrm{sgn}\,\dot{x}$, $g_2(\dot{x}) = -2b\,\dot{x}$ ($\alpha,\beta,b > 0$) и т. д. Основные требования, предъявляемые к функции $f(y)$ — ее нечетность и гладкость по $y$ везде, кроме, быть может, точки $y = 0$, где она может иметь скачок, а также наличие так называемого «падающего» участка [1].

В консервативном случае ($f$=0) периодическое решение задачи дается «пилообразной» функцией [5, 6]

$x(t) = -J\chi_{0*}(t)$,

где удар о правый ограничитель совмещен с началом отсчета времени; зависимость импульса удара от частоты свободных колебании $\omega_0 = 2\pi T_0^{-1}$ ($J = 4\Delta m\omega_0\pi^{-1}$) определяет скелетную кривую системы (в данном случае это прямая); $\chi_{0*}(t) = -\chi_{0*}(t+½T_0)$ — симметричная $T_0$-периодическая функция Грина, представляющая собой установившуюся реакцию линейной части системы с оператором динамической податливости $l(p) = 1/mp^2$ на воздействие $\delta^{T0/2}(t)$ [5, 6]. В данном случае

$$\chi_{0*}(t) = 2(mT)^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)\omega_0^2\exp[i(2k+1)\omega_0 t \tag{10}$$

При $0 \le t < 0,5T_0$ данный рад записывается в конечной форме $\chi_{0*}(t)=m^{-1}(½t-⅛T_0)$, далее для всех $t$ эта линейная функция продолжается по периодичности, исходя из условий симметрии, так что получается пилообразная функция (треугольный косинус).

В случае автоколебаний в промежутках между ударами из (7) имеем уравнение движения $\ddot{x} = f(\dot{x})$. Понизив здесь порядок ($z=\dot{x}$), получим - элементарное легко интегрируемое уравнение

$$\dot{z} = f(z). \tag{11}$$

Используя методики припасовывания [3], можно исследовать систему полностью. Покажем, что среди режимов движения автоколебательной системы (7) есть такие, которые описываются формулой (9), т. е, система допускает режимы с компенсацией сил диссипации в каждый момент времени (КСД-системы) или псевдоконсервативна.

Стационарные режимы $\dot{z}=0$ отвечают корням уравнения $f(z)=0$. Так как $f(z)$ — нечетная функция, то здесь возможен корень $z_0 = 0$, соответствующий положению равновесия и отсутствию ударов, и ещё четное число корней $z=z_{\pm k}$ 0 ($k$ =1, 2, …), таких, что $z_{-k} = -z_k$. Выбираемые попарно, эти корни определяют пилообразные решения типа (9), такие, что $|\dot{x}| = |z_{\pm k}|$ = const При этом для каждого $k$ удовлетворяется первое условие удара (8): $\dot{x}(-0) = z_{-k} = -z_k = \dot{x}(+0)$. В формуле (9) импульс удара $J=J_k^0 = 2|z_{\pm k}|$. В соответствий с уравнением скелетной кривой $J(\omega_0)$ частоты автоколебаний определяются как $\omega^0_{0k} = ¼J^0_k\pi(\Delta m)^{-1}$.Для анализа устойчивости необходимо исследовать (11) и учесть условия удара.

Пусть $f(\dot{x}) = \alpha\dot{x} - \beta\dot{x}^3$. Можно показать, что положение равновесия $x=0$ неустойчиво, а виброударный режим движения (9) при $J = 2\sqrt{\alpha/\beta}$ асимптотически устойчив. Частота автоколебаний $\omega^0_{01} = ½\pi(\Delta m)^{-1}\sqrt{\alpha/\beta}$. Подробнее исследование устойчивости подобных систем описано в [1, 5, 6].

Приведенный пример представляет простейшую систему из рассматриваемого класса КСД - систем: для найденного решения $x(t)$ одновременно $m\ddot{x} + F(x)=0$ и $f(\dot{x})=0$. Из сказанного не следует, что в данной системе невозможны другие, отличные от (9) режимы движения. Численный анализ, однако, показывает, что при многих «типовых» аппроксимациях функции $f(\dot{x})$ режимы (9) весьма представительны и существуют в широких диапазонах изменения параметров системы.

3. Аналогично можно указать и другие примеры КСД-систем. Это, во-первых, системы, в которых неконсервативные силы задаются при помощи функции $g(x, t) = g_0(x,\dot{x})f(\dot{x})$, где $f(\dot{x})$ удовлетворяет сформулированным выше условиям, $g_0$-гладкая по совокупности аргументов функция.

Во-вторых, это системы, модели которых в консервативном приближении допускают режимы движения, описываемые при помощи различного рода периодических кусочно-линейных функций. Скорости таких режимов даются кусочнопостоянными функциями и при наличии соответствующих неконсервативных сил $f(\dot{x})$, определяющих множество корней уравнения $f(z)=0$, которое, как указывалось, имеет структуру $\{0; z_{\pm 1}; z_{\pm 2}; \ldots\ldots\ldots, z_{\pm k}\ldots\}$ ($|z_{-k}| = |z_k|$) можно добиться выполнения условия компенсации сил диссипации в каждый момент времени. К моделям такого рода можно прийти, например, рассматривая динамику так называемых «резонансных роботов» [9] , авторезонансных систем с обратными связями, строящими, исходя из измерения каких-либо полных интегралов движения [5, 6, 10, 11] и других подобных объектов.

Отметим, что весьма содержательные примеры псевдоконсервативных систем дают «струнные» или «стержневые» системы [14-16], возбуждаемые за счет «отрицательного трения» [11-13]. Динамический анализ таких систем приводит, например, к задаче

$$\rho u_{tt} - N_0 u_{xx} = g_2(u,u_t) - g_1(u,u_t), \qquad (12)$$

где $\rho$, $N_0>0$; $u(x,t)$ – искомое перемещение $g_{1,2}$ – плотности сил диссипации и возбуждения. Сюда также должны быть добавлены еще граничные условия.

Режимы движения КСД-систем должны одновременно удовлетворять (12) при $g_1 = g_2 = 0$ и при их реализации должно обратиться в нуль подынтегральное выражение в соотношении (5). Подобные условия заведомо выполняются при возникновении так называемых трапециевидных волн [15, 16]. Необходимо отметить, что механизмы возбуждения автоколебаний в распределенных системах и методы анализа таких систем даны в монографии П.С. Ланда [17].

В случае граничных условий вида $u(0, t) = u(l, t) = 0$, где $l$ — длина струны или продольно колеблющегося стержня, простейшая трапециевидная периодическая стоячая волна порождается в линейной консервативной системе (12) ($g_1 = g_2 = 0$) с начальными условиями $u(x, 0)=0$, $u_t(x, 0) = v_0 =$ const.

В этом случае каждая точка струны совершает либо равномерное движение со скоростью $v_0$, либо покоится. При этом длина движущегося отрезка все время уменьшается и, после вырождения его в точку, процесс идет в обратном направлении [15,16 ].

Если, как и ранее, $g_2(u,u_t) - g_1(u,u_t) = g(u,u_t) f(u_t)$, где функция $f(z)$ удовлетворяет сформулированным выше условиям, то при $|v_0| = |z_{\pm k}|$ трапециевидные стоячие волны могут осуществлять полную компенсацию сил диссипации.

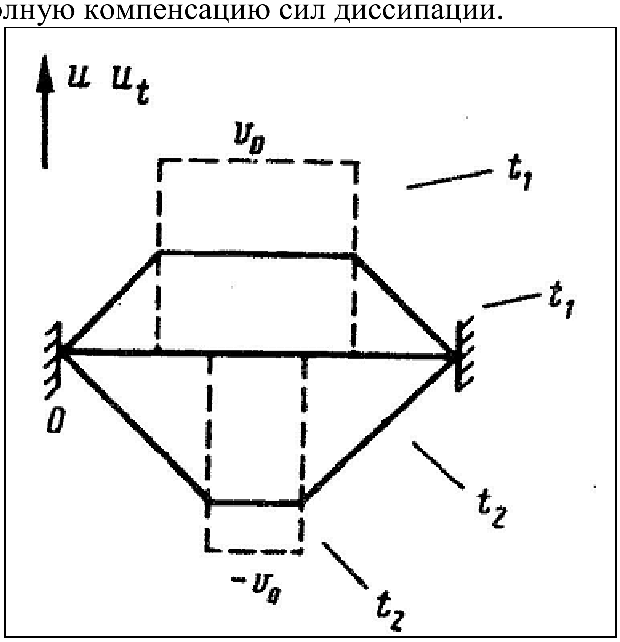


Рис.2

Это обстоятельство поясним на примере, для чего рассмотрим рис. 2, где в два момента времени $t_1$ и $t_2$ показаны два типичных трапециевидных профиля $u(x,t_1)$ и $u(x,t_2)$ стоячей волны. Здесь же пунктиром показаны разрывные профили $u_t(x,t_1)$ и $u_t(x,t_2)$.

Пусть, например, $f(u_t) = \alpha u_t — \beta u_t^3$ Ясно, что при $\alpha=\beta v_0^2$: $f(u_t)=0$ и, следовательно, для $v_0 = \pm (\alpha/\beta)^{½}$ имеет место компенсация сил диссипации в любой момент времени.

Устойчивость режима, подобного указанному (при $g=1$), была установлена при численном моделировании [14]. Аналитическое исследование подобных решений в частном случае силы возбуждения, приложенной в единственной точке, выполнено в классической работе А. А. Витта [12], посвященной динамике скрипичных струн полуэкспериментальное изучение которых восходит к Г. Гельмгольцу [11].

Заметим, что подобные трапециевидные волны возникают и при автоколебаниях струн, взаимодействующих без потери энергия с прямыми одно- и двусторонними протяженными ограничителями хода [13].

Рассматриваемое свойство автоколебательных систем достаточно чувствительно к структуре выбранной модели. Если, например, в разделе 2 отказаться от гипотезы об отсутвии потерь энергии при соударениях и считать удар не абсолютно упругим, то проведенные рассмотрения могут рассматриваться только как приближенные. Это касается и механизма возбуждения автоколебаний. Например, если $f(x, \dot{x})=(a - bx^2)\dot{x}$, где $a,b>0$ то изученная система не является КСД-системой.

Выделение данного класса моделей имеет смысл не только в связи с возможностью построения эталонных точных решений существенно нелинейных задач динамики, но и (как в случае со струнами и стержнями) для объяснения экспериментально наблюдаемых динамических эффектов (например, возникновения трапециевидных волн [12 - 15]). Кроме того, можно синтезировать возбуждающее воздействие так, чтобы система целенаправленно реализовывала авторезонансный КСД-режим. При практическом использовании такие режимы оказываются наиболее эффективными и экономичными [5,6, 9-11].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 13-08-90419 Укр_ф_а).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 905 с.
2. Асташев В. К., Бабицкий В. И., Вульфсон И. И. и др. Динамика машин и управление машинами. М.: Машиностроение, 1988. 240 с.
3. Бабицкий В. И. Теория виброударных систем. М.: Наука, 1978. 352 с.
4. Герц М. Е. Предельные возможности и эффективность резонансных машин//Машиноведение. 1984. № 5. С. 15—22.
5. Бабицкий В. И., Крупенин В. Л. Колебания в сильно нелинейных системах. М.: Наука, 1985. 320 с.
6. Babitsky V.I.,. Krupenin V.L Vibration of Strongly Nonlinear Discontinuous Systems.- Berlin. Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 2001. 404 p.p.
7. . Astashev V.K., Babitsky V.I. Ultrasonic Processes and Machines. Dynamics, Control and Applications. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag. 2007. 338 p
8. Акинфиев Т. С., Бабицкий В. И., Крупенин В. Л. Манипуляционные системы резонансного типа//Машиноведение. 1982. № 1. С. 3—8.

9. Krupenin V. L. To the calculation of pseudo-conservative self-oscillation vibroimpact systems // Письма в интернет-журнал “Вестник научно-технического развития”. (vntr. ru). – 2010. – No 12. – (40). – P. 32–33.
10. Крупенин В.Л., Мягкохлеб К.Б. Об одном классе авторезонансных машин виброударного действия// Доповіді Національної академії наук України, 2014, №3. С. 65- 69
11. Hetmholz H. L. F. On the sensations of tone as a physiological basis for the theory of music. London: Longmans, Green and Co. 1895
12. Витт А. А. К теории скрипичной струны//ЖТФ. 1936. Т. 6. Вып. 9. С. 1459—1479.
13. Крупенин В. Л., Фельдман Д. С. К расчету автоколебательных режимов движения абсолютно гибких стержней//Нелинейные колебания механических систем. Горький, 1990. С. 156—157
14. Веприк А. М., Крупенин В. Л. О резонансных колебаниях системы с распределенным ударным элементом//Машиноведение. 1988. № 6. С. 39—47.
15. Крупенин В. Л. Трансформация форм колебательной струны, взаимодействующей с двумя протяженными преградами//ДАН СССР. 1990. Т. 313. № 6. С. 1390—1394.
16. Асташев В.К., Крупенин В.Л. Продольные колебания тонкого стержня, взаимодействующего с неподвижным ограничителем // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2007. №6. С. 41-48.
17. Ланда П.С. Автоколебания в распределенных системах. М.: Книжный дом "Либроком", 2010. – 320 с.