Оптимизация микросистемы на основе анализа частотного спектра

В.Л. Леонтьев

Ульяновский государственный университет 432000 Ульяновск,
ул. Льва Толстого, 42 e-mail: leontievvl@ulsu.ru

Рассмотрена система двух трубок длины 500 нм, упруго закрепленных на своих концах. Проводится анализ частот свободных колебаний системы, учитывающий не только поступательные, но и вращательные движения трубок. Предлагаются конструкции, состоящие из однослойных или из многослойных трубок и обеспечивающие совпадение низших частот их свободных поступательных и вращательных колебаний. Выявлены условия, при которых возникает резонанс поступательных и вращательных механических колебаний трубок.

Модель свободных механических колебаний трубок с упруго закрепленными концами

Рассматривается система, состоящая из двух одинаковых трубок длиной 500 нм и радиуса 2 нм, упруго закрепленных на своих концах и в недеформированном состоянии системы параллельных друг другу. Жесткости пружин попарно равны C_1 и C_2, масса каждой трубки равна M. Система представляется двумя абсолютно жесткими стержнями, каждый из которых имеет массу M, сосредоточенную в точке, лежащей на оси стержня и находящейся на расстоянии l_1 от пружины с жесткостью C_1 и на расстоянии $l_2 = l - l_1$ от пружины с жесткостью C_2. Момент инерции стержня J равен $M\rho^2$, где $\rho -$ радиус инерции.

Каждый из стержней может совершать как поступательное движение вместе с центром масс, так и вращательное движение относительно него. Кинетическая и потенциальная энергии абсолютно жесткого стержня (рис. 1), имеющего две степени свободы и движущегося в плоскости, записываются соответственно в виде:

$$T = \frac{1}{2}M\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}J\left(\frac{d\varphi(t)}{dt}\right)^2,$$

$$\Pi = \frac{1}{2}C_1(x + l_1\varphi)^2 + \frac{1}{2}C_2(x - l_2\varphi)^2,$$

где $x(t) -$ перемещение точки стержня, в которой сосредоточена его масса, в направлении перпендикулярном исходному расположению оси стержня; $\varphi(t) -$ угол поворота стержня.

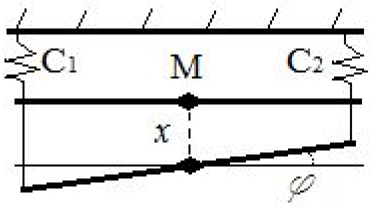

Рис.1.

Система уравнений Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial T}{\partial x}-\frac{\partial \Pi}{\partial x}=0, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \varphi}-\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}=0,$$

характеризующих свободные колебания стержня, записывается в виде

$$M\ddot{x}+C_1(x+l_1\varphi)+C_2(x-l_2\varphi)==M\ddot{x}+(C_1+C_2)x+(C_1l_1-C_2l_2)\varphi=0,$$

$$M\rho^2\ddot{\varphi}+C_1(x+l_1\varphi)l_1-C_2(x-l_2\varphi)l_2==M\rho^2\ddot{\varphi}+(C_1l_1-C_2l_2)x+(C_1l_1^2+C_2l_2^2)\varphi=0.$$

Эти уравнения в общем случае являются связанными друг с другом, и одна трубка характеризуется двумя частотами ее свободных колебаний. Однако, в случае, когда

$$C_1l_1=C_2l_2,$$

уравнения становятся несвязанными. Однако, спектр частот свободных колебаний отдельной трубки при этом будет содержать в общем случае две различные частоты свободных колебаний

$$\lambda_1=\sqrt{\frac{C_1+C_2}{M}}, \qquad \lambda_2=\sqrt{\frac{C_1l_1^2+C_2l_2^2}{M\rho^2}}.$$

Если параметры каждой трубки выбрать таким образом, чтобы выполнялось условие:

$$l_1l_2=\rho^2,$$

то частота λ_1 свободных поступательных колебаний $x(t)$ совпадет с частотой λ_2 свободных вращательных колебаний $\varphi(t)$, то есть

$$\lambda_2=\sqrt{\frac{(C_1+C_2)l_1l_2}{M\rho^2}}=\sqrt{\frac{C_1+C_2}{M}}=\lambda_1,$$

что приведет к одновременной реализации вынужденных резонансных поступательных и вращательных колебаний.

Возможны различные способы выполнения названных условий. В одних способах в состав системы включаются дополнительные компактные материальные элементы, в других способах используются многослойные композитные трубки. Это позволяет оптимизировать конструкции микросистем и систем с элементами размеров порядка 10-500 нм.