

**Крупенин В.Л., Асташев В.К.**

*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт  
машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук, Москва, Россия*

*[v\\_astashev@mai.ru](mailto:v_astashev@mai.ru)*

**Аннотация.** Дается обзор задач об описании виброударных волновых процессов в распределенных системах, колеблющихся с соударениями около препятствий различного типа. Приводится решение задачи о продольных колебаниях упругого стержня, взаимодействующего с односторонним ограничителем. Методами частотно-временного анализа получены точные решения, описывающие свободные и вынужденные колебания. Построены частотные характеристики системы. Дается сравнение найденных точных и полученных ранее приближенных решений.

**Ключевые слова:** распределенные ударные элементы, струны, стержни, нелинейные стоячие волны, изломанные профили волн, периодические функции Грина, негладкие преобразования, скелетные кривые, динамические эффекты.

## DISTRIBUTED SYSTEMS, VIBRATION AROUND OBSTACLES

Vladimir K. Astashev , Vitaly L. Krupenin

*Federal Budget-Funded Mechanical Engineering Research Institute, RAS, Moscow, Russia*

*[v\\_astashev@mai.ru](mailto:v_astashev@mai.ru)*

**Abstract.** The review of the tasks of describing vibro wave processes in distributed systems , vibrating with collisions around the obstacles of various types. The solution of the problem of longitudinal oscillations of an elastic rod interacting with a one-way stop . Time - frequency methods of analysis we obtain exact solutions describing the free and forced vibrations. Built frequency response of the system. Compares found accurate and previously obtained approximate solutions.

**Keywords :** distributed percussive elements , strings , rods , nonlinear standing waves , the broken wave profiles, the periodic Green's function , not smooth conversion , skeletal curves , dynamic effects.

**1. Краткий обзор.** В работах [1-15] теоретически и экспериментально изучались виброударные системы с параллельными ударными парами и (или) распределенными ударными элементами и, в частности, установлена возможность существования синхронных периодических режимов движения типа "хлопков". При их реализации пространственно удаленные части ударных элементов - сосредоточенных или распределенных – могут синхронно соударяться с соответствующими частями различного рода ограничителей. В то же время в работах [1-3, 6, 10, 13 - 15] изучались струны, взаимодействующие с точечными ограничителями хода, и, например, в работах [13 - 15] описаны результаты экспериментов и приведены данные о том, что некоторые из теоретически предсказанных динамических эффектов наблюдаются на практике.

Комбинация прямых протяженных и точечных ограничителей приводит к тавровым препятствиям. Соответствующие задачи рассмотрены, например, в работах [9, 14]. Рассмотренные в данной работе однотавровые ограничители моделируются при помощи составного объекта, состоящего из прямого протяженного и точечного ограничителей хода.

Показано, что профили реализуемых стоячих волн несут черты обоих случаев - хлопков и стоячих волн с выстоями.

Общность моделей позволяет рассмотреть и другие задачи относящиеся к расчету систематических соударяющихся своими торцами стержней с неподвижными препятствиями, которые возникают при расчетах разнообразных элементов машинных конструкций и, в частности, при анализе динамики ультразвуковых технологических машин [16 - 19]. Главные динамические эффекты, проявляющиеся в такой системе, рассмотрены в [17, 19]. Используемые в цитируемых работах методы расчета, основанные на идеях эквивалентной линеаризации, позволили не только провести первоначальное теоретическое исследование системы, но и получить соотношения, необходимые для построения реальных машин. Однако, круг вопросов, связанных со свойствами законов движения системы, остался до конца не исследованным и будет, по крайней мере, частично рассмотрен далее.

Рассмотрим примеры. На рис.1, а и б показана наиболее хорошо изученная система: струна, соударяющаяся с неподвижным ограничителем рис. 1, а отвечает равновесному состоянию системы, рис 1, б – реализации трапецевидной стоячей волны – хлопка.

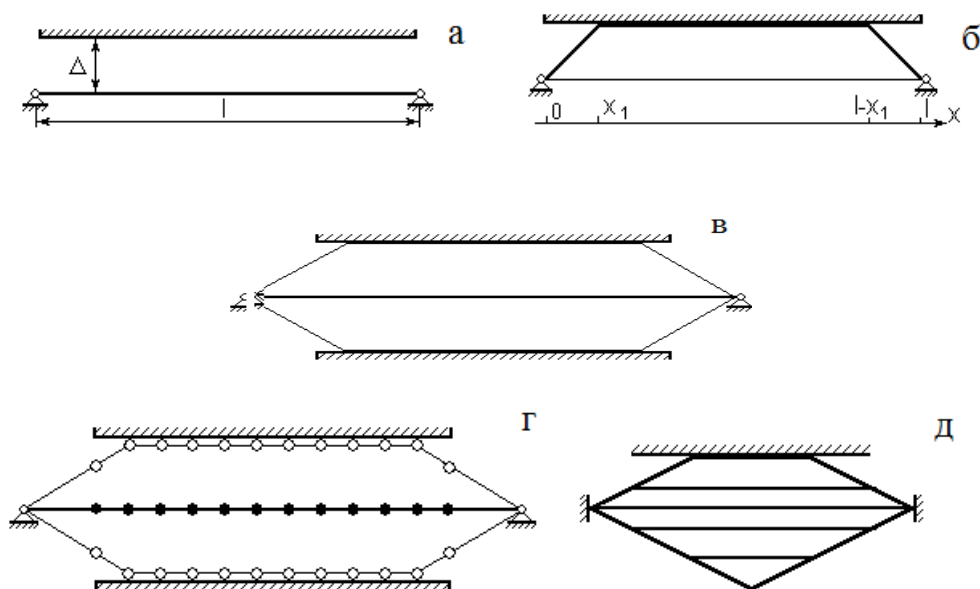


Рис.1.

На рис. 1,в показана система с двусторонним ограничителем, а на рис. 1,г дан пример дискретного аналога такой системы. Здесь также наблюдаются трапецевидные профили стоячих волн, но могут фиксироваться также и иные динамические явления [5, 7, 8]. В системе с односторонним ограничением (рис. 1,д) начальный профиль представляет собой треугольник с вершиной, обращенной вниз. Все промежуточные профили – трапецевидные.

Приложения подобных моделей весьма широки [5, 7]: они используются при расчетах гибких нитей, проводов, тросов, тонкостенных трубок, ремней и других подобных объектов, вибрирующих около протяженных препятствий.

Рассмотрим теперь точечные ограничителя хода распределенных систем. Начнем с примера (рис. 2). В работе [20], например, рассматривалась методика, позволяющая проводить измерения сил, в частности, сил тяжести, при посредстве устройств, содержащих взаимодействующую с точечным ограничителем распределенную систему. Если такую систему описать при помощи натянутой струны, то можно прийти к схеме, данной на рис 2.

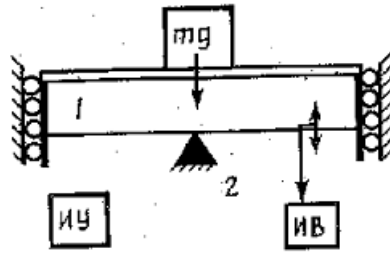


Рис.2

Натянутая струна 1, возбуждаемая каким-либо источником возбуждения (ИВ), совершает резонансные колебания, взаимодействуя с точечным ограничителем 2. Из-за неизохронности колебаний резонансные частоты такой системы занимают, вообще говоря, некоторый промежуток. В зависимости от величины измеряемой силы (в данном случае силы тяжести  $mg$ ) изменяется зазор (натяг) и соответственно резонансная частота, регистрируемая измерительным устройством (ИУ), которая ставит ей в соответствие значение величины искомой силы. Изучение таких систем является весьма нетривиальной и важной задачей [2].

Рассмотрим, наконец, тавровые ограничители (Рис. 3, а-в) [9, 14]

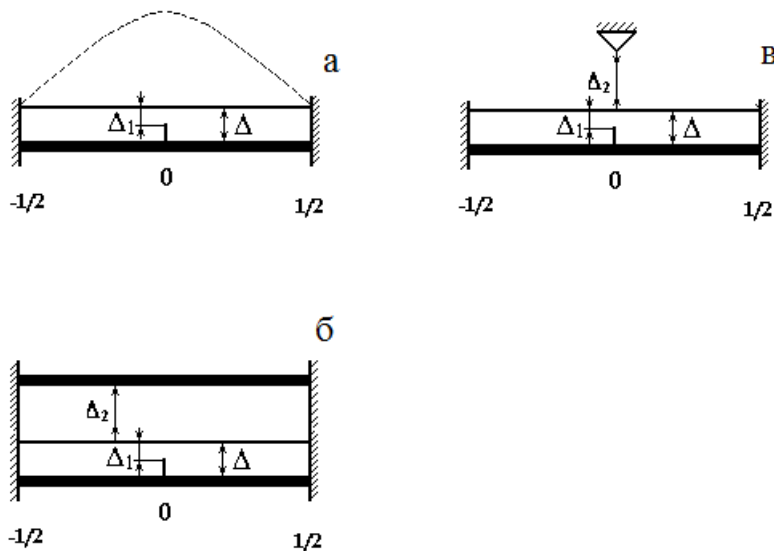


Рис.3

На рис.3,а показан ограничитель, состоящий из прямой протяженной и точечной частей. На рис.3, б показана система, содержащая тавровый и верхний прямой ограничители; на рис.3, в над струной расположен точечный ограничитель, в то время как под ней – тавровый. Смысл приведенных и последующих обозначений понятен из рисунков. Профили устанавливающейся стоячей волны показаны рис 4, а, б.

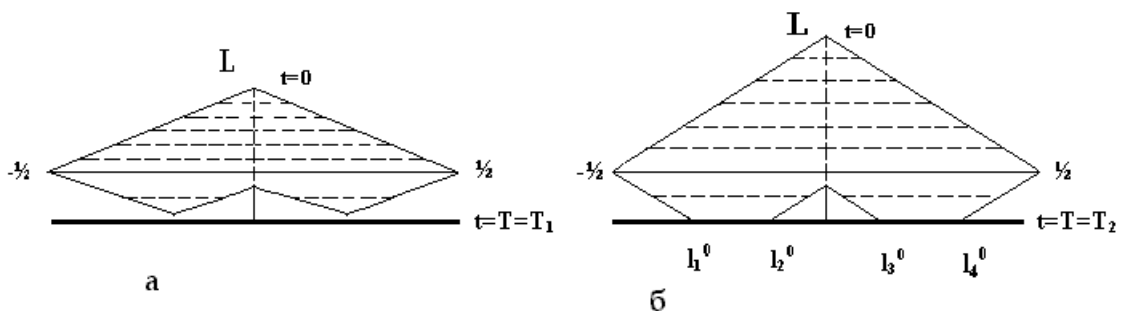


Рис.4.

На рис. 4, а даны профили, порождаемые треугольной начальной конфигурацией, запас начальной потенциальной энергии определяется величиной  $L$ . Как и случае точечного ограничителя здесь происходит выстой струны, до момента  $t = T_1$ . И далее процесс идет в обратном направлении. Если величина  $L$  увеличивается, то получаются профили показанные на рис. 4,б. Здесь, наряду с выстоем центральной точки появляются парные хлопки соседних участков. После мгновенного удара в момент времени  $t = T_2 > T_1$ , процесс опять-таки идет в обратном направлении.

Практически все динамические эффекты, которые вначале были описаны теоретически находятся в удовлетворительном согласии с экспериментами. На рис. 5 показан трапецевидный профиль струны, с вибрирующими концами и соударяющейся с неподвижным ограничителем [7, 12-15].



Рис.5.

На рис.6,а-в даны три профили струны, взаимодействующей с «точечным ограничителем» [7, 14, 15].

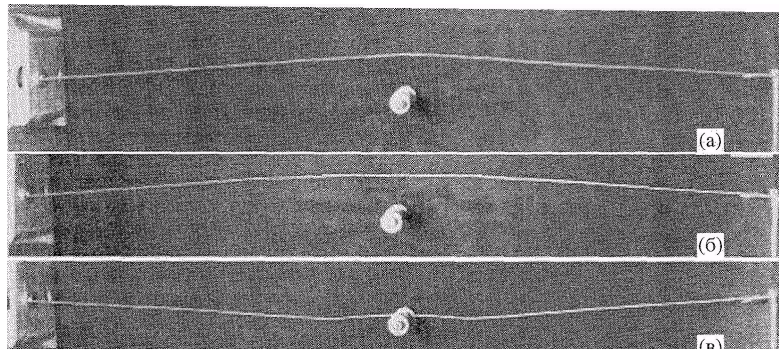


Рис.6

Наконец, на рис. 7, а-в показаны три профили струны, взаимодействующей с тавровым ограничителем [7, 14].



Рис.7

Любая из представленных моделей описывается при помощи нелинейного уравнения Клейна - Гордона, вообще говоря, с правой частью вида

$$\square u - \Phi(u) = \varepsilon H(t, x, u, u_x, \dots), \quad (1)$$

где  $u = u(x, t)$  - определяющая функция состояния, например прогиб струны в точках в момент времени  $t$ ;  $\square u \equiv u_{tt} - u_{xx}$  - оператор Д'Аламбера;  $\varepsilon$  - малый параметр;  $H$  - нелинейная  $T$ -периодическая функция времени, зависящая как от независимых переменных, так и от высших частных производных перемещения. Предполагается, что масштаб измерений выбран так, что скорость звука в линейной части системы равна единице. Предполагается также, что гладкость функции  $H$  обеспечивает существование и единственность решения хотя бы в обобщенном смысле [1, 3, 4, 6]. К уравнению (1) могут быть добавлены граничные или (и), если необходимо начальные условия.

Данная задача достаточно широко анализировалась.

**2. Задача о систематических торцевых соударениях тонких стержней.** Учитывая общность уравнений движения продольных колебаний стержня и изгибных колебаний струны, рассмотрим также задачу о расчете виброударных режимов движения тонких стержней. Пример системы – дан на рис. 8.

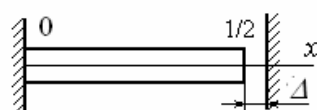


Рис.8

Наряду с этой системой могут быть рассмотрены и другие подобные модели: ограничители могут быть расположены как показано на рис.9

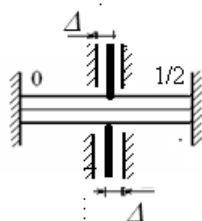


Рис.9.

В середине стержня выполнена проточка, в которую вставлена тонкая шпилька, расположенная между симметричными ограничителями. Модели такого типа имеют многочисленные приложения, связанные с расчетом соударяющихся протяженных объектов. Например, модель рис.8 возникает, в частности, при анализе динамики ультразвуковых технологических машин [16, 17]. Главные динамические эффекты, проявляющиеся в такой системе, рассмотрены в [18, 19]. Используемые в цитируемых работах методы расчета, основанные на идеях эквивалентной линеаризации, позволили не только провести первоначальное теоретическое исследование системы, но и получить соотношения, необходимые для осуществления реальных машин. Однако, круг вопросов, связанных со свойствами законов движения системы, остался до конца не исследованным.

Вернемся к уравнению (1) применительно к модели рис 8. Будем предполагать, что способы измерения независимых переменных  $x$  и  $t$ , определяющие искомое перемещения сечений стержня  $u(x, t)$  выбраны так, что линейная плотность стержня, а также величина  $ES$  ( $E$  и  $S$  – соответственно модуль упругости материала стержня и площадь его сечения ) равны единице. Тогда, как и отмечалось выше, при выбранных способах измерения, единичной оказывается и скорость звука в материале стержня. Без ограничения общности, можно считать координаты концов стержня, находящегося в статическом состоянии равными  $x=0$  и  $x=1/2$ .

Граничные условия поставим в виде:

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(1/2, t) = 0$$

В данном случае функция  $H$ , в частности, может моделировать присоединенный к концу стержня инструмент и обрабатываемую среду при расчете ультразвуковой технологической машины.

Функция  $\Phi(u)$  в уравнении (1) описывает силу взаимодействия свободного конца стержня с неподвижным ограничителем (например, обрабатываемой поверхностью). Пусть взаимодействие осуществляется при  $u(1/2, t) = \Delta$ . Если  $\Delta > 0$ , имеем систему с зазором, при  $\Delta < 0$  - с натягом. Таким образом, при всех  $t$

$$u(1/2, t) \leq \Delta. \quad (2)$$

При возникновении контакта стержня с ограничителем его концевое сечение  $x = 1/2$  будет некоторое время покоиться, находясь в контакте с ограничителем. При этом в неравенстве (2) реализуется равенство. Если  $t_k$  - момент начала  $k$ -го взаимодействия, а  $\theta_k$  - его окончание, то равенство в (2) реализуется при  $t \in [t_k, \theta_k]$ , и поэтому

$$\Phi[u(1/2, t)] = \sum_k R_k(t) \delta(x - 1/2) [\eta(t - t_k) - \eta(t - \theta_k)], \quad (3)$$

где  $k = 1, 2, \dots$  - целые числа;  $\delta(x)$  и  $\eta(t)$  - функции Дирака и Хевисайда;

$$R_k(t) = u_x(1/2, t) \leq 0, \quad t \in [t_k, \theta_k] - \quad (4)$$

- сила реакции ограничителя.

Наличие выстоев контактирующего сечения стержня приводит к парадоксальной для традиционной теории удара, использующей предположение о мгновенном отскоке ударника, ситуации. Оказывается, что при ударе энергия не теряется, но она, тем не менее, оказывается подобным абсолютно неупругому.

Наличие выстоев контактирующего сечения стержня приводит к парадоксальной для традиционной теории удара, использующей предположение о мгновенном отскоке ударника, ситуации. Оказывается, что при ударе энергия не теряется, но она, тем не менее, оказывается подобным абсолютно неупругому.

При реализации в (2) строгого неравенства, в соотношении (4) реализуется равенство, и контакт прекращается. Таким образом, действие ограничителя равносильно возникновению систематических прижимов к нему конца стержня.

В предположении периодичности процесса, обозначим здесь и далее  $T$  - период стационарной стоячей волны, устанавливающейся в случае нелинейных периодических колебаний. В соответствии с методами частотно - временного анализа виброударных процессов, запишем интегральное уравнение периодического процесса в виде [5, 7, 11]:

$$u(x, t) = \int_0^{T/2} \int_0^{T/2} \chi(x, z, t - s) \{ \Phi[u(z, s)] + \epsilon H(s, x, u_t, u_x, \dots) \} dz ds, \quad (5)$$

где

$$\chi(x, z, t) = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin[(2k+1)\pi x] \sin[(2k+1)\pi z] \chi_{2k+1}(t). \quad (6)$$

$T$ -периодическая функция Грина (ПФГ) стержня с граничными условиями (1), причем функции

$$\chi_{2k+1}(t) = T^{-1} \left\{ \left[ (2k+1)\pi \right]^{-2} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[ (2k+1)^2 \pi^2 - (2n+1)^2 \omega^2 \right]^{-1} \cos(2k+1)\omega t \right\} -$$

ПФГ линейных осцилляторов с собственными частотами стержня  $\Omega_k = (2k+1)\pi$ ;  $\omega = 2\pi T^{-1}$ .

**3. Консервативная модель.** Для реализации общих схем приближенного изучения резонансных режимов, разработанных в [5, 11], рассмотрим вырожденную консервативную модель. Для этого положим в (1)  $\varepsilon=0$ . Поставим начальные условия в виде

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = 0, \quad (7)$$

причем для простоты ограничим рассмотрения начальными условиями, обеспечивающие в линейном случае стоячие волны, близкие к первой форме линейных колебаний (кривая 1 на рис.2,а). Поэтому предположим, что функция  $u_0(x)$  в (7) имеет единственный максимум на границе отрезка  $[0, \frac{1}{2}]$  при  $x = \frac{1}{2}$ .

Далее в этом пункте рассматривается один принципиальный пример. Пусть  $u_0(x) \equiv A_0(x) = -2E_0x$  (линия 2 на рис.10,а). Очевидно, параметр  $E_0 \geq 0$  однозначно определяет полную энергию системы. Обозначим искомое решение  $A(x,t)$ .

В линейном случае эпюры перемещений (профили стоячей волны) в любые моменты времени будут иметь трапецеидальный вид (рис.10,б) за исключением моментов времени  $t = \frac{1}{2}nT_0 = n$  ( $n=0,1,2,\dots$ ;  $T_0=2$  – период свободных колебаний стержня), где трапеции вырождаются в треугольники. Свободное сечение стержня движется с постоянной по величине скоростью  $v = 2D_0$ , которая через каждые полпериода меняет направление в моменты наибольших деформаций стержня.

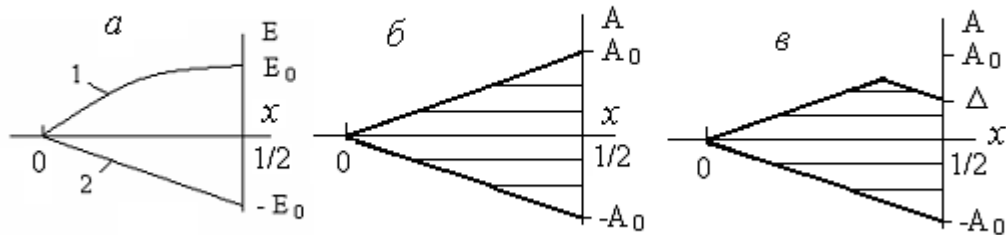


Рис.10

При наличии ограничителя в моменты времени  $t = t_k = t_1 + kT$ , когда выполняется равенство  $A(0, t_k) = \Delta$ , свободное сечение  $x = \frac{1}{2}$  стержня достигает ограничителя, мгновенно останавливается, и некоторое время остается в контакте с ограничителем. В течение удара профиль волны  $A(x,t)$  образует зубец (рис.10,в). В крайнем положении расположенная слева от вершины зубца часть стержня растянута, а левая - сжата. Затем волна движется в обратном направлении, и остановка сечения прекращается в моменты  $\theta_k = \theta_1 + kT$ . Моменты начала и окончания удара и период колебаний при естественном предположении  $E_0 > |\Delta|$  определяются равенствами

$$t_1 = (E_0 + \Delta)/2E_0, \quad \theta_1 = 1, \quad T = (3E_0 + \Delta)/2E_0. \quad (8)$$

Внося (6) и (8) в (5), найдем

$$A(E_0, x, t) = 2E_0 \sum_{k=1}^{\infty} D_k(t^*; \omega, t) \sin[(2k+1)\pi x], \quad (9)$$

где  $t^* = (t_2 - t_1) = 1 - t_1$  - время удара;  $D_k(t^*; \omega, t) = t^* \left[ T(2k+1)^2 \pi t_1^2 \right]^{-1} +$   
 $+ 2T^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ (2n+1)\omega \right]^{-2} \left[ (2k+1)^2 \pi^2 - (2n+1)^2 \omega^2 \right]^{-1} \cos n\omega t.$

Решение  $A_0$  можно использовать в качестве порождающего при исследовании резонансных процессов. Однако оно отвечает начальным условиям специального вида и на первый взгляд не может претендовать на надлежащую общность. Пользуясь результатами работ [5. 6. 10], установим, что данное решение, полученное для начальных условий, в определенном смысле подобным порождающим первую форму линейных колебаний, обладает качествами, пригодными для анализа резонансных стоячих волн.

**4. Решение консервативной задачи.** Будем искать решение нелинейной задачи с начальными условиями, имеющими единственный экстремум при  $x=0$ , в виде

$$u(x,t) = A_0[z(x,t), \tau(x,t)]; \quad E_0 = 1, \quad (10)$$

где  $A_0$  – построенное в п.2 решение;  $z$  и  $\tau$  – новые переменные.

Рассматривая по-прежнему консервативную задачу, внесем (10) в (1) при  $\varepsilon = 0$  и после преобразований придем к выражению

$$(\tau_t^2 - \tau_x^2)A_{0\tau\tau} - (z_x^2 - z_t^2)A_{0zz} + (z_{tt} - z_{xx})A_{0z} + (\tau_{tt} - \tau_{xx})A_{0\tau} - \Phi[A_0(z, \tau)] = 0,$$

где дифференцирование, вообще говоря, понимается в смысле обобщенных функций.

Требую, чтобы преобразованное таким образом уравнение движения сохраняло свою структуру, наложим на функции  $z$  и  $\tau$  ограничения, положив

$$z(x,t) = g(x-t) + g(x+t), \quad \tau(x,t) = g(x-t) - g(x+t). \quad (11)$$

Тогда получаем

$$2g'(x-t)g'(x+t)[A_{0\tau\tau} - A_{0zz}] - \Phi[A_0(z, \tau)] = 0. \quad (12)$$

В силу (3), (4)  $\Phi > 0$  и из формулы (11) следует, что введенная функция  $g$  должна быть монотонной; из дальнейшего станет видно, что ее следует выбрать монотонно возрастающей, т.е.  $g' > 0$  на всей числовой оси. Выберем эту функцию, исходя из вида начального условия  $u_0(x)$ , определенного вначале на отрезке  $[0, 1/2]$ . Так как  $u_0(x) = A_0[z(x,0), 0] = -2x = 4|g(x)| - 1$ , то можно положить, доопределяя функцию  $g(x)$  антисимметрично на отрезке  $[1/2, 1]$

$$g(x) = \begin{cases} -1/4[1 + u_0(x)] & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 0 & x = 1/2 \\ 1/4[1 + u_0(x)] & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}. \quad (13)$$

Таким образом,  $g(x)$  – нечетная возрастающая на отрезке  $[-1/2, 1/2]$  функция. Доопределим ее на всю числовую ось при помощи двух равенств

$$g(x+1) = 1/2 + g(x), \quad g(-x) = -1/2 - g(x). \quad (14)$$

На рис.11 показаны графики возможной начальной конфигурации волны (рис.12,а) и отвечающей ей функции  $g(x)$  (рис.12,б). Из (14) и (11) следует, что  $z(x,t) \in [0, 1]$  и  $z(x,t+2) = z(x,t)$ , т.е. функция  $z$  имеет период, совпадающий с периодом свободных колебаний линейного стержня ( $T_0 = 2$ ). В то же время  $\tau(x,t+2) = \tau(x,t) + 2$ .

Установим, что представление (10) отвечает исходной задаче. Так как ограничитель действует на стержень только при его выходе на ограничитель в единственной точке  $x = 1/2$ , то представление решения, во-первых, должно удовлетворять волновому уравнению. Из (12) следует, что если  $A_0(x,t)$  – решение волнового уравнения, то и  $A_0[g(x-t) + g(x+t), g(x-t) - g(x+t)]$  – также решение волнового уравнения. Во-вторых, должно выполняться неравенство (2), но так как  $A_0$  – решение рассматриваемой



консервативной задачи, а функция  $g(x)$  – антисимметрична относительно  $x = 1/2$ , то  $u(x, t) = A_0[0, 2g(t)] \leq \Delta$ , и указанное неравенство действительно выполняется. В-третьих, должно иметь место неравенство (4).

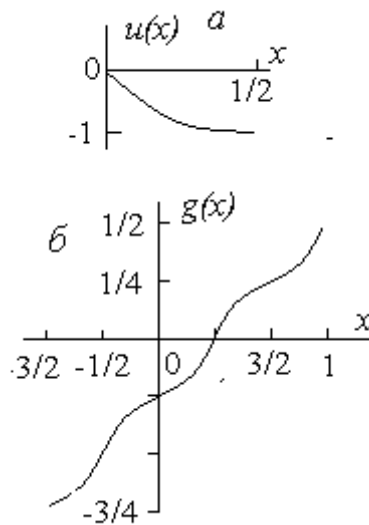


Рис.11

Ввиду того, что для волны  $A_0$  на протяжении всего времени высота стержня на ограничителе  $R_0 = A_{0,x}(+0) = 2$ , учитывая возрастание функции  $g$ , в соответствии с (10) находим  $R_0 = 4g'(t) > 0$ .

Таким образом, представление (10) действительно определяет искомый процесс. Поэтому с помощью формулы (9) при  $E_0 = 1$ ,  $t_1 = 1/2(1 + \Delta)$  найдем

$$u(x, t) = 8 \sum_{k=1}^{\infty} D_{2k+1} [(\omega; \tau(x, t))] \sin\{(2k + 1)\pi[z(x, t) + 1/2]\}. \quad (15)$$

Периоды функций  $D_{2k+1}$  по  $\tau$  равны  $T_\tau = (3 + \Delta)/2$ . Одновременно  $z(x, t + 2) = z(x, t)$ ,  $\tau(x, t + 2) = \tau(x, t) + 2$ . Поэтому периодичность стоячей волны (15) оказывается возможной только, когда числа  $T_0=2$  и  $\Delta$  численно несоизмеримы. Это, в свою очередь, возможно лишь в случае, когда значение  $\Delta$  является рациональным числом; при иррациональных значениях величины зазора формула (15) определяет почти-периодический процесс [3, 4, 10].

Таким образом,  $\{A_0(E_0, x, t)\}$ - единственное семейство периодических стоячих волн, слабо чувствительных к изменению значения зазора (натяга). Факт потери периодичности процесса при переходе от значения, дающегося рациональным числом, к иррациональному значению означает практическую невозможность установления периодического режима других типов. Поэтому представляется естественным предположение о том, что резонансный периодический режим, устанавливающийся в исходной системе при  $\varepsilon \neq 0$ , описывается при помощи элементов семейства  $\{A_0(E_0, x, t)\}$ .

**5. Частотные свойства решений.** Рассмотрим вначале частотные свойства режимов (15)  $A_0(E_0, x, t)$ . Учитывая, что  $T = 2\pi/\omega$ , где  $\omega$  – частота процесса, разрешим третье соотношение (8) относительно  $E_0(\omega) > 0$ . После преобразований получим

$$E_0(\omega) = \Delta \omega (4\pi - 3\omega)^{-1} \quad (16)$$

На рис.12 показаны графики зависимости (16) при различных величинах зазора. Для систем с зазором ( $\Delta > 0$ ) имеет место жесткий анизохронизм, и могут существовать волны лишь с частотами  $\pi < \omega < 4/3 \pi$ . При  $\Delta = 0$  частота  $\omega = 4/3 \pi$ , и имеет место изохронизм

движения. Наконец, для систем с натягом  $\Delta < 0$  имеет место мягкий анизохронизм и  $4/3\pi < \omega < 2\pi$ . Частота  $\omega = \pi$  отвечает линейным колебаниям с касанием ограничителя, происходящим при  $\Delta > 0$  и  $E_0 = \Delta$ . Частота  $\omega = 2\pi$  отвечает собственным колебаниям прижатого к ограничителю стержня при  $\Delta < 0$  и  $E_0 < \Delta$ . Приведенные кривые являются энергетическими аналогами скелетных кривых в теории нелинейных колебаний. При  $\Delta > 0$  скелетная кривая дополнена вертикальным отрезком  $\omega = \pi$ , отвечающим свободным колебаниям свободного конца стержня в пределах зазора при  $E_0 < \Delta$ .

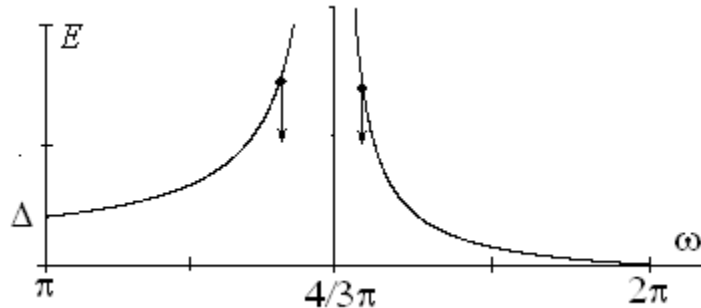


Рис.12

Имея в виду замечание, приведенное в конце п.4. будем искать резонансные режимы движения, описываемые при помощи семейства  $\{A_0(E_0, x, t)\}$ . Предположим  $\Delta \neq 0$ , и для определенности будем полагать, что в уравнении движения (1)  $\varepsilon H(t, x, u, u_x, \dots) = \varepsilon [P(x, t) - 2bu_t]$ .

Пусть сила возбуждения

$$P(x, t) = P(x) \cos(\omega_1 t + \psi) = \sum_{m=1}^{\infty} P_m \sin m\pi x \sin \pi x \cos(\omega_1 t + \psi). \quad (17)$$

При этом предполагается, что начало отсчета времени совпадает с началом какого-либо взаимодействия стержня и ограничителя, а фаза  $\psi$  - неизвестна. Полученная выше зависимость  $E_0(\omega)$  и приведенные ее свойства позволяют сделать вывод о том, что резонансные режимы типа  $u(x, t) \approx A_0(E_0, x, t) + \dots$ , где  $E_1 = E_0(\omega) = \Delta \omega (4\pi - 3\omega)^{-1}$ , могут существовать при  $\Delta > 0$  только в частотном диапазоне  $\pi < \omega < 4/3 \pi$ , а при  $\Delta < 0$  - только в частотном диапазоне  $4/3 \pi < \omega < 2\pi$ . Изохронизм движения не рассматривается.

Для приближенного описания резонансных стоячих волн близких (при малых  $\varepsilon$ ) к волнам  $\{A_0(E_1, x, t)\}$ , воспользуемся, как обычно [5, 7, 11], принципом энергетического баланса, в соответствии с которым при реализации  $T_1$  - периодического процесса, например,  $u(x, t)$ , поддерживаемого  $T_1$  - периодической силой (17) за период движения должны сбалансироваться работы сил возбуждения и диссипации, т.е.

$$\int_0^T P(x) \cos(\omega_1 t + \psi) u_t(x, t) dt = \int_0^T 2bu_t^2(x, t) dt. \quad (18)$$

Для определения неизвестной фазы  $\psi$  выполним необходимые подстановки переменных в уравнение (17). Имеем:

$$\sin \psi \sum_{k=1}^{\infty} P_k \frac{\sin(\omega t_1 / 2)}{k^2 (\pi^2 - \omega_1^2)} = 16bE_1 (\pi \omega_1)^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(\omega t_1 / 2)}{(m^2 \pi^2 - n^2 \omega^2)^2}. \quad (19)$$

Здесь и в (15)  $m = 2q + 1$ . Обозначая правую часть (19)  $bE_1 Y(\omega_1)$  и ограничиваясь случаем  $P(x, t) = P_1 \sin \pi x \cos(\omega_1 t + \psi)$ , получим два возможных значения фазы и условие существования резонансных режимов движения ( $|\sin \psi| \leq 1$ )

$$\psi_1 = \arcsin \left[ b P_1^{-1} E_1 \left| Y(\omega_1) (\pi^2 - \omega_1^2) \sin^{-1}(\omega_1 t_1 / 2) \right| \right], \quad \psi_2 = \pi - \psi_1;$$

$$b E_1 \left| Y(\omega_1) (\pi^2 - \omega_1^2) \right| \leq P_1 \left| \sin(\omega_1 t_1 / 2) \right|.$$

Анализ последнего неравенства показывает, что при  $\omega_1 \rightarrow \pi/3$   $\pi \pm 0$  (знаки «+» и «-» отвечают соответственно неравенствам  $\Delta < 0$  и  $\Delta > 0$ )  $|Y(\omega_1)| \rightarrow \infty$  ( $1/2 \omega_1 t_1 \rightarrow \pi/3$ ). На рис.4 точками отмечены границы области существования, где выполняются равенства в условии существования. Очевидно, что в этих точках, расположенных в окрестности «предельной частоты»  $\omega = \pi/3$  происходят срывы колебаний, как это показано вертикальными стрелками на рис.12. Найденная выше зависимость (16) и рис.12 показывают также возможность проявления здесь известных в традиционной теории виброударных систем [5, 7, 11] явления затягивания по частоте.

Заметим, что, если  $\Delta < 0$  и  $\omega_1 \rightarrow \pi$ , время взаимодействия стержня и ограничителя  $t_1 \rightarrow 0$ , стержень совершает линейные колебания в пределах зазора, не касаясь ограничителя. Если  $\Delta > 0$  и  $\omega_1 \rightarrow 2\pi$  (период колебаний  $T_1=1$ ), время взаимодействия  $t_1 \rightarrow T_1=1$ , и стержень совершает колебания без отрывов от ограничителя такие же как стержень с обоими закрепленными концами.

Отметим кроме того, что если при  $\Delta < 0$  изначально покоящийся стержень установлен с натягом, так что  $u_0(x) = 2\Delta x$ , то для получения резонансных колебаний рассматриваемого типа его необходимо предварительно отвести от ограничителя, т.е. осуществить жесткий запуск стоячей волны [5, 7, 11]. Наконец, легко показать, что, как и в традиционных виброударных системах, здесь оказывается возможным реализовать затягивание резонансных колебаний по амплитуде. Указанные нелинейные эффекты неоднократно наблюдались в натуральных и численных экспериментах.

Таким образом, найденные режимы, как и режимы трапециевидных стоячих волн в системах с распределенными ударными элементами, дают возможность провести аналогию между достаточно сложной рассматриваемой системой и элементарной виброударной системой типа «ударный осциллятор» [5, 7, 11].

**5. Сравнение с приближенными решениями.** Полученное выше решение нелинейной задачи является точным. Поэтому мы имеем редкую возможность сравнить результаты точного и полученного ранее в [1] приближенного решений. Проведем сравнение, сопоставив частотные характеристики свободных колебаний. Для удобства запишем результаты полученного выше решения в размерной форме.

Положим, что длина стержня равна  $l$ . Тогда период свободных колебаний стержня с одним свободным и вторым закрепленным концом  $T_0 = 4l/c$ , а его первая собственная частота  $\omega_0 = 2\pi/T_0 = \pi c/2l$ , где  $c$  – скорость звука в материале стержня. По аналогии с рис 3,а примем, что стержень предварительно сжат, причем начальное смещение свободного конца равно  $A > |\Delta|$ . Тогда амплитуда его колебаний с соударениями об ограничитель

$$a = (A + \Delta) / 2, \tag{20}$$

период колебаний  $T = (3 + \Delta/A)T_0/4$ , а частота колебаний

$$\omega = 4\omega_0 / (3 + \Delta/A). \tag{21}$$

Из условия  $A > |\Delta|$  следует, что частота колебаний с соударениями  $\omega > \omega_0$ . Из (21) и (20) найдем следующую зависимость частоты от амплитуды колебаний

$$\omega = \omega_0 \frac{4 - 2\Delta/a}{3 - \Delta/a}. \tag{22}$$

Обратная (22) функция определяет скелетную кривую

$$a = \Delta \frac{2 - \omega/\omega_0}{4 - 3\omega/\omega_0} \tag{23}$$

Из (22), (23) легко найти области существования скелетных кривых, которые совпадают с полученными в п.4 (см. рис.12). Скелетные кривые, построенные по формуле (23), показаны на рис.13 сплошными линиями.

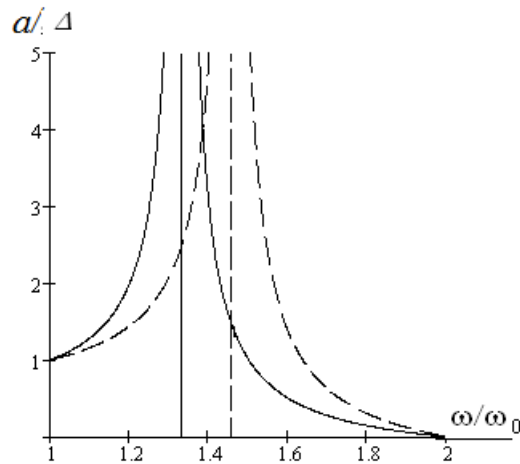


Рис.13

В [1] при решении той же задачи методом гармонической линеаризации получена следующая зависимость для скелетных кривых:

$$a = 4\Delta \left( \pi \frac{\omega}{\omega_0} \operatorname{ctg} \frac{\pi\omega}{2\omega_0} + 4 \right) \quad (24)$$

Скелетные кривые, построенные по формуле (24), показаны на рис.13 штриховыми линиями. Асимптоты скелетных кривых находятся решением уравнения

$$\pi \frac{\omega}{\omega_0} \operatorname{ctg} \frac{\pi\omega}{2\omega_0} + 4 = 0, \text{ которое дает следующее значение частоты изохронных колебаний}$$

при  $\Delta = 0$ :

**6. О динамических эффектах.** Как и в других случаях изучения нелинейных волновых процессов в распределенных виброударных системах [4, 5, 7, 11], проделанные опыты выявили аналогию между поведением традиционных виброударных систем с одной сосредоточенной ударной парой и рассматриваемых систем всех типов (с точечными, протяженными и тавровыми ограничителями, а также более подробно изученных здесь стержневых систем) при реализации в них описанных выше стоячих волн с и изломанными профилями, состоящими из отрезков прямой.

**8.1.Затягивание по частоте.** Все указанные типы стоячих волн в режиме вынужденных колебаний могут быть затянуты от частоты близкой к собственной частоте  $f_0$  линейных колебаний струны, до некоторой частоты "срыва" колебаний, лежащей выше частоты  $f_0$ . Конкретные проявления явления затягивания и др.(см. далее) зависят от специфики системы.

**8.2. Двухзначность амплитудно-частотных характеристик.** При синусоидальном возбуждении существует частотная область двухзначности амплитудно-частотных характеристик. При полигармоническом периодическом возбуждении возможно существование стольких пар режимов, сколько кратных гармоник имеется в возбуждении.

**8.3.Срывы колебаний.** После реализации предельных частот затягивания при дальнейшем увеличении частоты каждая нелинейная стоячая волна "срывается", т.е. виброударный процесс исчезает, и при синусоидальном возбуждении устанавливаются линейные стоячие волны с амплитудами, лежащими в пределах установки ограничителей. При уменьшении частоты возбуждения после прохода частоты срыва линейные волны не

исчезают до достижения частоты, при прохождении которой происходил срыв колебаний, на нелинейную ветвь и волны с изломанными профилями не появляются.

**8.4. Жесткий запуск.** Для возникновения режимов, соответствующих нелинейной ветви амплитудной - частотной характеристики, можно (и соответственно стоячих волн с изломанными профилями), как и в случае традиционных виброударных систем с одной ударной парой, необходимо придать системе дополнительную запускающую энергию, позволяющую установиться нелинейным волнам при тех же частотах возбуждения, что и линейные волны. Это свойство двузначности при синусоидальном возбуждении вполне аналогично известному свойству традиционных систем с одной ударной парой [7, 11]. Пользуясь той же аналогией, придание упомянутых запускающих начальных условий будем называть *жестким запуском* [7, 11].

Указанные эффекты сопровождают все типы экспериментально наблюдаемых периодических стоячих волн рассмотренного здесь вида.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 13-08-01235 и № 13-08-90419 Укр\_ф\_а).

#### Литература

1. Cabannes H., Haraus A. Mouvements presque – periodiques d'une corde vibrante en presence d'un obstacle fixe, rectiligne ou ponctuel // I.J. Nonlinear Mechanics. 1981, V.55, №5/6, p.p. 449-457.
2. Крупенин В.Л. К расчету резонансных колебаний гибкой нити, взаимодействующей с точечным ограничителем хода// Проблемы машиностроения и надежности машин. 1992, №2, с.29-36.
3. Amerio L., Prouse G. Study of the Motion of a String Vibrating Against an Obstacle //Rend. di Mat. Ser. 6(8). 1975. N.2. P. 563-585.
4. Крупенин В.Л. Трансформация форм колебаний струны, взаимодействующей с двумя протяженными преградами// ДАН СССР, 1990, т.313, №6, с. 1390-1394.
5. Крупенин В.Л. О представлении периодических виброударных процессов через параметры движения «импульс - фаза» //Проблемы машиностроения и надежности машин. 2010. №1. С. 34-42.
6. Cabannes H. Cordes Vibrantes avec Obstacles // Acustica,. 1984, V.55, p.p. 14-20.
7. Асташев В.К., Крупенин В.Л. Волны в распределенных и дискретных виброударных системах и сильно нелинейных средах// Проблемы машиностроения и надежности машин. 1998, № 5, с. 13-30.
8. Крупенин В.Л. Об исследованиях одномерных и многомерных виброударных процессов при случайном широкополосном возбуждении //Проблемы машиностроения и надежности машин. 2010. №6. С. 34-42.
9. Крупенин В.Л. К описанию динамических эффектов, сопровождающих колебания струн вблизи однотавровых ограничителей// Доклады Российской Академии наук. 2003. № 388 (3). С. 75-80.
10. Асташев В.К., Крупенин В.Л. Продольные колебания тонкого стержня, взаимодействующего с неподвижным ограничителем // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2007. №6. С. 41-48.
11. Babitsky V.I., Krupenin V.L. Vibration of Strongly Nonlinear Discontinuous Systems. Springer 2001, 330 p.
12. Веприк А.М., Крупенин В.Л. О резонансных колебаниях системы с распределенным ударным элементом //Машиноведение. 1988. № 6. С. 39-47.
13. Асташев В.К. , Крупенин В.Л. Эксперименты с протяженными виброударными системами (резонансные движения) // Вестник научно-технического развития. 2010. № 7(35). С.3-10.

14. В.К. Асташев, В.Л. Крупенин. Картины стоячих волн с изломами профилей, в распределенных объектах, соударяющихся с препятствиями различных конфигураций (часть I)// Интернет –журнал ВНТР. 2011, №2 (42), с.3-12.
15. Асташев В.К., Крупенин В.Л. Экспериментальное исследование колебаний струн, взаимодействующих с точечными ограничителями // Доклады Академии Наук. 2001. Т. 379. №3. С. 329-333
16. Асташев В.К. Нелинейные эффекты в ультразвуковых технологических системах // Труды XXVIII Летней школы «Актуальные проблемы механики». Т. 2. Санкт-Петербург. 2001. С.368-380.
17. Асташев В.К., Бабицкий В.И. Резонансные колебания вязкоупругого стержня с ограничителем // Изв. АН СССР. МТТ. 1972. № 4. С. 176–182.
18. Асташев В.К. Настройка ультразвуковых станков под нагрузкой // Станки и инструмент. 1972. №10. С. 32 – 34.
19. Асташев В.К., Бабицкий В.И. Эффективность резонансной настройки систем для ультразвуковой обработки // Машиноведение. 1981. № 6. С. 3–9.
20. Асташев В.К., Бабицкий В.И., Герц М.Е. и др. Измерение сил с использованием виброударной системы // Измерительная техника, 1986. №7. С. 33-35.