УДК 534.1

СТРУКТУРА ВИБРОПОЛЕЙ В СИСТЕМАХ С БОЛЬШИМ ЧИСЛОМ УДАРНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

© Крупенин В. Л.

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук
krupeninster@gmail.com

Аннотация. *Продолжено изучение сильно нелинейной сплошной среды сложной структуры с распределенным ударным элементом. Эта модель позволяет дать описание процесса формирования и распространения вибрационных полей в механических конструкциях с большим числом ударных пар. Даны необходимые определяющие соотношения. Приведены примеры одномерных вариантов модели - оснащенных стержней со сложными структурами.*

Ключевые слова: *сильно нелинейные сплошные среды сложной структуры, виброполя, несущие части сред, присоединенное оборудование, интегро-операторные уравнения, распределенный ударный элемент, струнная решетчатая конструкция.*

VIBROFIELDS IN SYSTEMS WITH LARGE NUMBER OF IMPACT ELEMENTS

Vitaly.L. Krupenin

Federal Budget-Funded Mechanical Engineering Research Institute, RAS, Moscow, Russia
krupeninster@gmail.com

Abstract. *The study of the strongly nonlinear continuum complex structure with distributed impactor. This model allows us to give a description of the formation and propagation of vibration in the fields of mechanical structures with a large number of pairs of shock. The necessary constitutive relations. Are examples of one-dimensional versions of the model - equipped with rods with complex structures.*

Keywords: *strongly nonlinear continuous media complex structure, vibrational fields, carrying parts environments connected equipment, integral-operator equations, distributed impactor, string grid design.*

1. В работах [1-3] введены модели сплошных сред сложной структуры, содержащих "несущие" и "присоединенные" части. Точка такой среды характеризуется, вообще говоря, вектором перемещения сколь угодно высокой размерности.

В работах [2 - 5] (см. также [9]) на частных примерах рассмотрены сильно нелинейные аналоги таких сред с присоединенными частями, содержащими распределенные ударные элементы; их реологические модели содержат ударные пары. Рассмотрим одно обобщение упомянутой теории.

Постулируем существование некоторой упругой несущей среды, описываемой вектором перемещений $u(x,t)$ $(x \in R^3,\ t \in R)$, подчиняющейся классическому уравнению Ламе (ср.[1])

$$\rho\, u_{tt} = (\lambda + \mu)\mathrm{grad\, div}\, u + \mu\Delta u + F, \qquad (1)$$

где ρ- плотность несущей среды, λ, μ – параметры Ламе, характеризующие ее упругость. Пусть интенсивность объемных сил имеет следующую структуру: $F = F_1 + F_0$, где F_1, - заданный вектор, а

$$F_0(x,\ t) = - c_1(u - y_n^{(1)}) - c_2(u - y_n^{(2)}), \tag{2}$$

где предполагается, что с каждой точкой среды связана ударная пара, состоящая из двух взаимодействующих линейных стационарных подсистем $\mathbf{A}^{(I)}(x)$ и $\mathbf{A}^{(II)}(x)$, определяемых системами операторов динамической податливости

$$L^{(I)}{}_{qj}(p) = O(p^{-2}),\ L^{(II)}{}_{lk}(p) = O(p^{-2}),$$

где $p = d/dt$, а индексы q,j,l,κ изменяются на некоторых множествах, определяемых размерностями взаимодействующих подсистем, параметры которых могут, вообще говоря, зависеть от x. Для замыкания системы (1), (2) добавим соотношения

$$y_n^{(I,\,II)} = L_{nn}^{(I,\,II)}(p)c_{1,2}u \pm L_{kn}^{(I,\,II)}(p)\Phi_1(y^0, y_t^0) + f_n^{(I,\,II)}; \tag{3}$$

$$y_k^{(I,\,II)} = L_{nk}^{(I,\,II)}(p)c_{1,2}u \pm L_{kk}^{(I,\,II)}(p)\Phi_1(y^0, y_t^0) + f_k^{(I,\,II)}, \tag{4}$$

где $y_n^{(I,II)}(x,\ t)$ и $y_k^{(I,II)}(x,\ t)$ - перемещения точек подвеса и взаимодействия, $y^0 = y_k^{(II)} - y_k^{(I)}$- относительное сближение ударников взаимодействующих подсистем, к которым приведены плотности $m_{II}(x)$ и $m_I(x)$; $\Phi_1(y^0,\ y_t^0)$ - плотность силы удара (для системы $A^{(I)}$ в (3) и (4) выбираем знак "плюс", для $A^{(II)}$ - "минус"); в эти же уравнения могут быть внесены какие-либо функции $f^{(I,II)}_{k,n}$, описывающие дополнительные внешние воздействия. Граничные условия ставятся точно так же, как и в классическом случае - для уравнения (1), моделирующего несущую конструкцию (ее физические и геометрические качества). Частотные свойства амортизированного оборудования, генерирующего виброударные процессы, дает модель присоединенной части среды, содержащей распределенный ударный элемент.

Механизм связи несущей и присоединенной частей определяет структуру глобального вибрационного поля. Данный подход, возможно, жертвует информацией об особенностях каких-либо конкретных элементов системы, а также об эффектах, проявление которых возможно только при учете дискретности модели [8].

2. Для практических расчетов важно рассмотреть одномерные случаи [2-4, 7] - модели протяженных конструкций с разнообразным амортизированным оборудованием – так называемые оснащенные стержни (рис. 1). Предполагаем, что распределенный ударный элемент подчиняется гипотезе, являющейся континуальным аналогом классической гипотезы о прямом центральном ударе. Тогда вместо (1), (2) имеем скалярное уравнение несущей части среды вида

$$\rho u_{tt} - Eu_{xx} + c_1(u - y_n^{(I)}) + c_1(u - y_n^{(II)}) - F_1 = 0, \tag{5}$$

где площадь сечения стержня единична; смысл обозначений тот же, что и ранее; структура ставших скалярными соотношений (3), (4) сохраняется. Плотность силы удара (для определенности берется несимметричный ударный элемент [4- 6]) задается соотношениями

$$y^0[x, \varphi(x)] = \Delta(x),$$

$$(6)$$

$$J(x) = M(X)\ [1 + R(x)]\ y^0{}_t\ [x,\ \varphi(x - 0)] \geq 0,$$

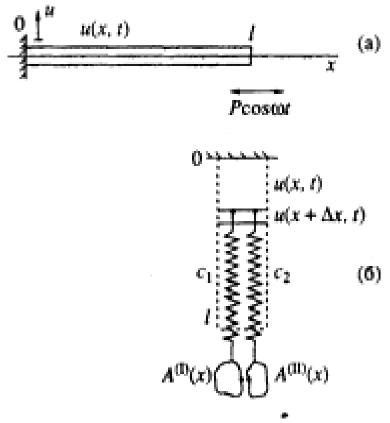

Рис. 1.

где $\Delta(x)$ - распределение зазоров (натягов); $J(x), \varphi(x)$ и $R(x)$ - плотность ударного импульса, распределения моментов удара и коэффициента восстановления. Считаем, что к взаимодействующим точкам приведены плотности $m_{II}(x)$ и $m_I(x)$. Это предположение корректно, так как, в свою очередь, следует из предположения, что асимптотика операторов динамической податливости $\sim p^{-2}$. Приведенная линейная плотность

$$M(x) = m_I(x)m_{II}(x)\,[m_I(x)+m_{II}(x)]^{-1}.$$

В дальнейшем, для определенности, изучая Т- периодические режимы с одним ударом за период движения, в несимметричном случае считаем

$$\Phi_1(y^0, y_t^0) = J(x)\delta^T[t-\varphi(x)],$$

где

$$\delta^T(t) = exp(ik2\pi T^{-1}t),\ \ \kappa = 0, \pm 1, \dots;$$

δ^T- Т-периодическая последовательность δ-функций Дирака. При этом $y^0 \leq \Delta$. Постановка задачи завершается добавлением граничных условий

$$u(0,\ t) = 0;\ Eu_x(l,\ t) = P\cos\omega t\ [\text{или}\ u(l,\ t) = \mu\cos\omega t], \qquad (7)$$

Будем рассматривать основные режимы считая, что $\omega = 2\pi T^{-1}$; случаи субгармонических $(\omega = 2\pi(lT)^{-1};\ l = 1,2,\ \dots)$ или (при надлежащем возбуждении) комбинационных режимов (со $(\omega = 2\pi q(lT)^{-1}; q,l = 1,2,\dots)$ рассматриваются аналогично [5, 6].

3. Для отыскания периодических режимов, отвечающих заданной вибрации (7), перейдем к интегральным уравнениям T-периодических колебаний, предположив для простоты выкладки, что $L_{qj}^{(I,II)}(p) = \mathrm{const}(x)$. Это предположение для общей качественной теории несущественно, но вносит вычислительные упрощения. В уравнениях (4) и (3) прежде всего надо определить поля перемещений $u(x,t)$; $y_k^{(I,II)}(x,t)$ и $y^0 = y_k^{(II)} - y_k^{(I)}$. После их нахождения определение функций, описывающих движение, в том числе и перемещений подвеса не составит труда. Используя периодические функции Грина (ПФГ) - установившиеся реакции линейных подсистем на периодические последовательности δ-функкцй Дирака - с помощью общих методик [3-6, 8,9] имеем три интегральные уравнения, которые запишем в виде:

$$u(x,t) = u_1(x,t) + \int_0^l \int_0^T [U_1(x,z,t-s) - U_2(x,z,t-s)]\,\Phi_1(y^\circ, \mathring{y}_t)\,dz\,ds, \qquad (7)$$

$$y_k^{(II)}(x,t) = y_{k0}^{(II)}(x,t) = \int_0^l \int_0^T [Y_{k1}^{(II)}(x,z,t-s) - Y_{kII}^{(II)}(x,z,t-s)]\times$$

$$\times\Phi_1(y^\circ, \mathring{y}_t)\,dz\,ds - \int_0^T \chi^{(II)}(t-s)\,\Phi_1(y^\circ, \mathring{y}_t)\,ds, \qquad (8)$$

$$y_k^{(\mathrm{I})}(x,t) = y_{k0}^{\mathrm{I}}(x,t) + \int_0^l \int_0^T [Y_{k\mathrm{I}}^{(\mathrm{I})}(x,z,t-s) - Y_{k\mathrm{II}}^{\mathrm{I}}(x,z,t-s)] \times$$

$$\times \Phi_1(y^\circ, \overset{\circ}{y_t})\, dz\, ds + \int_0^T \chi^{(\mathrm{I})}(t-s)\, \Phi_1(y^\circ, \overset{\circ}{y_t})\, ds. \qquad (9)$$

В этих уравнениях ядра зависят от структуры операторов $L_{qj}^{(\mathrm{I,II})}(p)$ и функции Грина линейной краевой задачи. Они определяются стандартными громоздкими выражениями и здесь не приводятся (ср. [9]).

Физический смысл уравнений (7)—(9) оказывается таким: «полевые функции» складываются в результате проявления различных силовых факторов, каждый из которых воздействует на определенный структурный элемент среды.

Например, поле перемещений $u(x, t)$ складывается, во-первых, из решение задачи как результат кинематического или силового возбуждения конца с последнем случае

$$u(x,t) = P(E\omega_0)^{-1} \sin\omega_0 x (\cos\omega_0 l)^{-1} \cos\omega t, \qquad (10)$$

где значение величины ω_0 зависит от параметров операторов $L_{qj}^{(\mathrm{I,II})}(p)$. После ряда стандартных вычислений находим

$$\omega_0^2 = \omega^2 E^{-1} \{\rho + c_1\omega^{-2}[c_1 L_{nn}^{(\mathrm{I})}(i\omega) - 1] + c_2\omega^{-2}[c_2 L_{nn}^{(\mathrm{II})}(i\omega) - 1]\}. \qquad (11)$$

Составляющие, описываемые при посредстве интегральных операторов с ядрами $U_{1,2}$ соответственно, - суть вклады, определяемые перемещениями, возникающими вследствие соударений в каждой из двух составляющих ударного элемента (I и II).

Соотношения (8) и (9) вполне аналогичны. Рассмотрим для определенности (9).Здесь полевая функция $y_к^{(\mathrm{I})}(x, t)$ содержит четыре составляющих. Во-первых - решение линейной задачи: $y_к^{(\mathrm{I})}(x, t) = L_{кn}^{(\mathrm{I})}(i\omega)c_1u_1$. Во-вторых - вклады, определяемые, интегральными операторами с ядрами $Y^{\mathrm{I}}_{k\mathrm{I}}$ и $Y^{\mathrm{II}}_{k\mathrm{I}}$ - перемещения «точки соударения», в данном случае системы I, приобретаемые из-за ударов, но возбуждаемые благодаря возникновению перемещений соответственно в первой и второй системах, образующих ударный элемент. И, наконец, составляющая, определяемая интегральным оператором с ядром $\chi^{(\mathrm{I})}$ - есть результат непосредственного воздействия на удар в данной точке.

Интенсивность влияния того или иного силового фактора определяется видом операторов динамической податливости, но ясно, однако, что, благодаря обычно выраженным фильтрующим свойствам линейных динамических систем в (7) доминирует первый член, а в (8) и (9) - вначале четвертый, затем первый.

Сделаем весьма принципиальное замечание. Свойства выражения (10) и других с ним связанных выражений определяются величиной ω_0 (11). Если частота воздействия близка к одной из собственных частот присоединенных систем

$$(|L_{nn}^{(\mathrm{I,II})}(i\omega)| \to \infty,\ \mathrm{Im}\{L_{nn}^{(\mathrm{I,II})}(i\omega)\} = 0), \qquad (12)$$

то величина может стать комплексной. В этом случае присоединенное оборудование оказывает на несущую часть влияние, сходное с влиянием системы линейных динамических гасителей колебаний (ср. [1]). Интенсивные резонансные виброударные процессы развиваются при удалении от собственных частот линейной системы. При их развитии присоединенное оборудование может вести себя подобно системе ударных гасителей колебаний (ср. [2, 3]).

4. Получим представление, определяющее в общем виде искомый виброударный процесс и отвечающие ему поля перемещений.

Вычтем (9) из (8) и обозначим $Y^*(x,z,t-s)$ ядро интегрального оператора, осуществляющего двойное интегрирование. Тогда

$$y^\circ(x,t) = \overset{\circ}{y}_{k0}(x,t) - \int_0^l \int_0^T Y_*(x,z,t-s)\,\dot{\Phi}_1(y^\circ, \overset{\circ}{y}_t)\,dz\,ds - \int_0^T \chi(t-s)\,\Phi_1(y^\circ, \overset{\circ}{y}_t)\,ds. \qquad (13)$$

Здесь $y_k^o = y_{k0}^{(II)} - y_{k0}^{(I)}$; $\chi = \chi^{(I)} + \chi^{(II)}$. Так как Φ_1 представима через δ-функции, проведем интегрирование по s, а затем воспользуемся гипотезой (6) и, обозначая, $U_Q = U_I - U_2$ формулой (8). Имеем

$$y^\circ(x,t) = \overset{\circ}{y}_{k0}(x,t) - J(x)\,\chi[t-\varphi(x)] - \int_0^l Y_*[x,z,t-\varphi(z)]\,J(z)\,dz; \qquad (14)$$

$$\Delta - \overset{\circ}{y}_{k0}[x,\varphi(x)] = -J(x)\,\chi(0) - \int_0^l Y_*[x,z,\varphi(x)-\varphi(z)]\,J(z)\,dz; \qquad (15)$$

$$J(x) = M(1+R)\{y_{t,k0}[x,\varphi(x)] - \int_0^l Y_{*t}[x,z,\varphi(x)-\varphi(z)-0]\,J(z)\,dz - J(x)\,\chi(-0)\}; \qquad (16)$$

$$u(x,t) = u_1(x,t) + \int_0^l U_0[x,z,t-\varphi(x)]\,J(z)\,dz. \qquad (17)$$

Представление (17) (двухфункциональное представление [8]) определяет распределение вибрации по несущему стержню. Операторные уравнения (15), (16) определяют неизвестные функции $J(x)$ и $\varphi(x)$. Они достаточно сложны и их исследование и построение решений представляет самостоятельную проблему. Важные частные случаи были рассмотрены в [3,4].

При анализе комбинационных режимов $p:q$ (в частности субгармонических режимов $1:q$) вид соотношений (14)—(17) и др. принципиально не меняется: соответствующие ПФГ строятся на периоде $p^{-1}qT$ [7].

5. Рассмотрим систему, состоящую из большого ; числа однотипных механизмов, расположенных на вибрирующих основаниях (рис. 2). Этой модели можно естественным образом сопоставить среду с распределенным ударным элементом:

$$\rho u_{tt} - E u_{xx} - a_1(x)\,y_{1t}^2 - a_2(x)\,y_{2t}^2 = 0; \qquad (18)$$

$$m_1(x)\,y_{1tt} + c_1(x)\,y_1 + a_1(x)\,u_{tt} y_{1t} + \Phi_1(y^\circ, \overset{\circ}{y}_t) = 0; \qquad (19)$$

$$m_2(x)\,y_{2tt} + c_2(x)\,y_2 + a_2(x)\,u_{tt} y_{2t} - \Phi_1(y^\circ, \overset{\circ}{y}_t) = 0; \qquad (20)$$

$$y^\circ(x,t) = y_2(x,t) - y_1(x,t); \quad u(0,t) = 0, \quad E u_x(l,t) = \varepsilon P_1 \cos\omega t, \qquad (21)$$

где, предполагаемые малыми коэффициенты связи $a_{1,2}(x)$ имеют размерность [кг/м]."Индивидуальная" динамика таких систем подробно описана в [5, гл. 7], Избегая громоздких выражений, которые могут быть достаточно легко воспроизведены при помощи соотношений, имеющихся в [2-4,7,9], наметим схему решения задачи. Предположим для определенности, что все механизмы установлены с натягом $\Delta(x) < 0$ (на рис. 2 показаны механизмы с зазорами, чтобы подчеркнуть, что сделанное допущение не принципиально), а "собственные частоты" оборудования $\Omega_{12}(x) = [c_{1,2}(x)/m_{1,2}(x)]$ много меньше

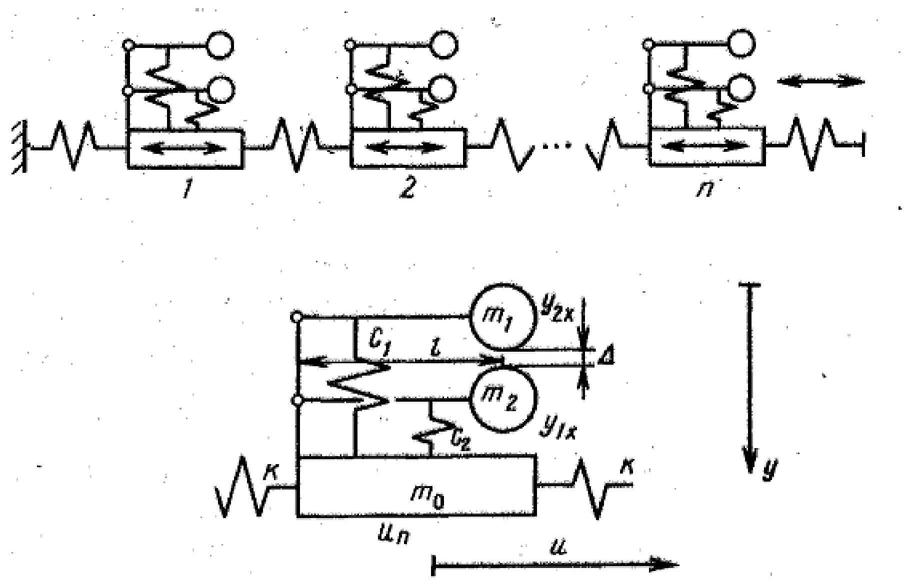

Рис.2

частот несущего стержня. Тогда в нулевом приближении резонансные одночастотные режимы присоединенных механизмов даются формулами

$$y_1(x,t) = -J(x)\,\chi_1(x,t), \quad y_2(x,t) = J(x)\,\chi_2(x,t); \tag{22}$$

$$\chi_{1,2}(x,t) = T^{-1}\sum_{k=-\infty}^{\infty} L_{k,1,2}(x)\exp(ik\omega t), \quad L^{-1}_{k,1,2}(x) = [c_{1,2}(x) - ik\omega m_{1,2}(x)]; \tag{23}$$

$$J(x) = -\Delta(x)[\chi_1(x,0) + \chi_2(x,0)]^{-1}. \tag{24}$$

Фазу процесса получим из нулевого приближения ($a_{1,2}$ = 0 - случай "замороженной" системы, когда взаимодействия между элементами присоединенных систем при разных x нет). Выбирая ее значение из условия существования режимов с большими импульсами [5, 6], отнесем ее ко "входному воздействию":

$$u_{tt}(x,t+\varphi) = -\varepsilon P_1\omega^2(E\omega_0^2)^{-1}\sin\omega_0 x\cos(\omega t+\varphi)[\cos\omega_0 l]^{-1}. \tag{25}$$

Здесь величина ω_0 строится при помощи (11) и выражешй для динамических податливостей $L_{1,2}(i\omega)$. Используя (18)—(20) и (22) - (25), после преобразований приходим к первому приближению вибрационного поля несущего стержня, которое имеет вид интегрального представления:

$$u(x,t) = \varepsilon P_1(E\omega_0)^{-1}\sin\omega_0 x\cos(\omega t+\varphi)[\cos\omega_0 l]^{-1} +$$

$$+\int_0^l\int_0^T \chi(x,z,t-s)[J^2(z)\,\chi_1^2(z,s) + J^2(z)\,\chi_2^2(z,s)]\,dz\,ds,$$

где $\chi(x,z,t)$ $[\omega_0 \neq \pi(2k+1)(2l)^{-1}, k\in Z]$ – ПФГ стержня [5,8].

Взятие входящей сюда квадратуры приводит к весьма громоздким, но достаточно просто интерпретируемым формулам, по своему физическому содержанию близким к полученным ранее в [3, 9].

6. В заключение сделаем несколько принципиальных замечаний.

(i) Необходимость обращения к подобным задачам диктуется, прежде всего, тем обстоятельством, что в реальных машинных конструкциях именно множественные систематические соударения элементов амортизированных подсистем весьма часто оказываются "ответственными" за формирование глобального виброполя и за виброактивность конструкций в целом,

(ii) Предложенные модели позволяют также исследовать и стохастизацию вибрационных полей, хотя наиболее опасными для вибростойкости конструкций оказываются резонансные виброударные процессы, исследуемые с помощью изложенных методик.

(iii) Круг рассмотренных систем может быть расширен за счет более общих моделей. Например, в качестве несущей конструкции могут быть взяты двумерные струнные решетки [10] (рис.3, а), а в качестве амортизированного оборудования – жестко связанная с узлами решетки система механизмов с силовым замыканием (рис. 3, б) [5, 6]. Смысл обозначений на рис. 3 – очевиден. Рассмотрение этого класса задач будет проведено в последующих работах.

а *б*

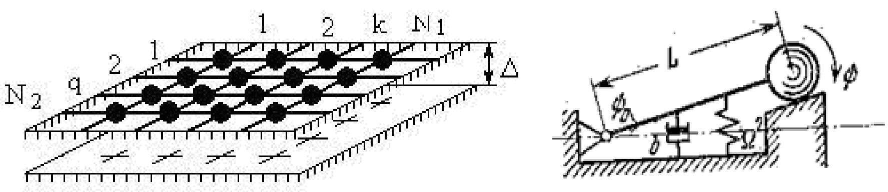

Рис.3.

Статья выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № № 13-08-01235 и 13-08-90419).

Литература

1. Пальмов В.А. Колебания упруго-пластических тел. М.: Наука, 1976. 328 с.
2. Крупенин В.Л. К теории сильно нелинейных виброводов // Машиноведение. 1987. № 1. С.25-32.
3. Широкополосные виброударные генераторы механических колебаний // Крупенин В.Л., Веприк А.М. и др. Л.: Машиностроение, 1987. 76 с.
4. Крупенин В.JI. Вибрационные поля в системах сложной структуры со множественными разрывами // ДАН. 1995. Т. 343. № 6. С. 1-85.
5. Бабицкий В.И., Крупенин В.Л. Колебания в сильно нелинейных системах. М.: Наука, 1985.320 с. .
6. . Babitsky V.I.,. Krupenin V.L Vibration of Strongly Nonlinear Discontinuous Systems.- Berlin. Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 2001. –404 p.p.
7. Крупенин BJI. К анализу виброударных процессов в системах с большим числом ударных пар // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1994. № 2. С. 97-105.
8. Асташев В.К., Крупенин В.Л. Волны в распределенных и дискретных виброударных системах и сильно нелинейных средах// Проблемы машиностроениияи надежности машин.1998, № 5, с. 13-30
9. . Крупенин В.Л. К описанию процессов прохождения нелинейных волн через машинные конструкции, моделируемые посредством сильно нелинейных сплошных сред сложной структуры (часть 1 и 2)// Интернет-журнал «ВНТР», №№6, 7.- 2011.-С.26-33; с.3-16.
10. Крупенин В.Л. К анализу динамики колеблющейся двумерной решетки // Интернет-журнал «ВНТР», №2, 2007.-С.8-17.