УДК 534

ОЦЕНКА ЧИСЛА ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ ДВИЖЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ ПРИ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ КОЛЕБАНИЙ

© Крупенин В.Л.

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН
krupeninster@gmail.com

Аннотация. *В достаточно общем виде исследуется задача об оценке числа нелинейных резонансных периодических режимов в системах общего вида, линейная часть которых задана оператором динамической податливости общего вида. Предполагается, что система сильно нелинейна. Даются способы оценки количества резонансных режимов. Показано, что число таких режимов определяется как структурой нелинейных позиционных сил, так и видом внешнего воздействия. Оказывается, что при доминировании высших гармонических составляющих можно указать способ отыскания большого числа искомых режимов.*

Ключевые слова: *колебания, сильно нелинейные системы, принцип энергетического баланса, основной резонанс, субгармонический резонанс, супергармонический резонанс, комбинационный резонанс.*

On the number of periodic modes of motion of nonlinear vibration systems with polyharmonic oscillations.

V.L. Krupenin

Federal Budget-Funded Mechanical Engineering Research Institute, RAS, Moscow, Russia

Abstract. *In rather general terms we consider the problem of estimating the number of non-linear resonant periodic regimes in systems of general form, the linear part of which is set by the operator dynamic compliance of general form. It is assumed that the system is strongly nonlinear. Are ways of estimating the number of resonant modes. It is shown that the number of such regimes is defined as the non-linear structure of positional forces and the views of external influence. It turns out that under the dominance of the higher harmonic components, you can specify a method for finding a large number of the desired mode.*

Keywords: *oscillations, strongly nonlinear systems, the principle of energy balance, the main resonance, subharmonic resonance, superharmonic resonance, combination resonance.*

1. Рассмотрим склерономную стационарную механическую систему с n степенями свободы и полной диссипацией [1, 2- 5] . Пусть модель системы имеет вид:

$$x(t)=L(p)\{F(t;x;px)\} \qquad (1)$$

Здесь $p\equiv d/dt$ – оператор дифференцирования, $L(p)$ – оператор динамической податливости, приведенный к координате x [1, 2], обычно даваемой меромофной функцией комплексного переменного p: $L(p)=W(p)V^{-1}(p)$, где функции W и V – аналитические функции комплексного переменного p. При определенных условиях можно записать, ведя суммирование по всем k от 1 до n:

$$L(p)=\Sigma_k A_k(p-p_k)^{-1},$$

где p_k – простые полюса функции $L(p)$ (простые нули функции $V(p)$); коэффициенты A_k зависят от структур функций W и V; кратные нули функции обычно не рассматриваются, т.к. они возникают в механических системах весьма специального вида. Отметим, что уравнение (1) остается в силе, когда система имеет распределенные параметры. Тогда $n\to\infty$. Для систем с распределенными параметрами, как правило, имеет место асимптотика $L(p)=O(p^{-1})$. Если к координате x приведено точечное массивное тело, то асимптотика $L(p)=O(p^{-2})$.

Отметим, наконец [3-5], что оператор L может быть задан в результате обработки опытных данных в виде динамических податливостей $L(i\omega)\equiv B_1(\omega)+iB_2(\omega)$.

Пусть, входящая в уравнение (1) функция F – периодична по времени t: $F(t;x;px)\equiv F(t+T;x;px)$. Домножив правую и левую части уравнения на скорость px и проинтегрировав результат на отрезке $\mathbf{T}\equiv[0, T]$, получим после простых преобразований:

$$\int_{\mathbf{T}}[L^{-1}(p)x(t)-F(t;x;px)pxdx=0. \qquad (2)$$

Равенство (2) выражает принцип энергетического баланса. Очевидно, что если имеются периодические решения уравнения (1) с периодом T_1, то равенство (2) снова имеет место (интегрирование ведется по отрезку $\mathbf{T_1}\equiv[0, T_1]$).

2. Предположим, что силовой фактор $F(t;x;px)$, определяющий уравнение (1) представим в виде:

$$F(t;x;px)\equiv A(x, \ldots)+\mu C(t, x,\ldots) + \varepsilon D(x, px, \ldots), \qquad (3)$$

$$\text{где при } \mu=\varepsilon=B_2=0 \qquad (4)$$

система оказывается консервативной, а при $\mu\neq0$, но $\varepsilon=B_2=0$ – гамильтоновой.

Рассмотрим вначале консервативный случай:

$$x(t)=B_1(p)\{A(x)\}. \qquad (5)$$

Здесь $A(x)= - d\Pi/dx$, где Π- потенциал системы. Пусть уравнение (5) допускает двухпараметрическое периодических семейство решений с частотой ω_0:

$$x=x[E(\omega_0 q^{-1}), \varphi;t], \qquad (6)$$

где E и φ - два интеграла движения. Первый - взаимно однозначно связан с полной энергией консервативной системы. Второй - с фазой движения. Как правило множество допустимых частот режимов движения консервативной системы состоит из системы интервалов или (и) изолированных точек. Обозначим ее Λ. Пусть $\omega\in\Lambda$. При малых μ и ε искомое решение будет близко к решению консервативной задачи при $\omega_0\cong\omega$. Такие режимы движения называют *нелинейными резонансными движениями* [1-5].

Поставим задачу оценки числа таких режимов. Полагая, что резонансный режим движения имеет вид (6) при $\omega_0=\omega$, предположим, что входящие в (4) параметры больше нуля, но являются малыми. Тогда искомое решение имеет вид, близкий к даваемой формулой (5) ($\omega_0=\omega$). Ставится задача сколько именно таких режимов может быть в данной системе.

Внесем (6) в уравнение энергетического баланса, выбирая промежуток интегрирования $[0, T_1]$:

$$\int_{T1}[L^{-1}(p)x(\varphi;\, t)\text{-}F(t;x;px)pxdx=0. \qquad (7)$$

Или, учитывая представление (3), найдем:

$$\int_{T1}[L^{-1}(p)x(\varphi;\, t)\text{-}\, A(x(\varphi;\, t))\text{-}\mu C(t)\ \text{-}\ \varepsilon D(x(\varphi;\, t),\, p\, x(\varphi;\, t))]pxdx=0. \qquad (8)$$

Здесь для определенности отброшены возможные зависимости, обозначаемые посредством многоточий. Кроме того сила $C(t)$ предполагается T-периодической функцией времени и мы сразу можем представить её в виде

$$C(t)= \Sigma_k u_k \cos k(\omega t+\theta), \qquad (9)$$

где суммирование производится по всем индексам k. Случай бесконечного ряда ($k\rightarrow\infty$), естественно, допускается. Так как фаза φ отнесена к неизвестным величинам, без ограничения общности можно положить θ=0. Заметим, что дальнейшие построения принципиально не изменятся, если рассмотреть ряды (тригонометрические полиномы) более общего вида. Формула (9) выбрана для большей наглядности.

Приведем формулу (8) к виду, удобному для анализа. Так как колебания – вынужденные, режим движения –периодический, а сила A – консервативна, то после стандартной выкладки будем иметь [1, 2]:

$$\int_{T1}[\ \mu C(t) + \varepsilon D(x(\varphi;\, t),\, p\, x(\varphi;\, t))]pxdx=0. \qquad (10)$$

3. Пусть при $\omega_0\cong\omega$ в консервативной системе устанавливается режим движения, с энергетическим фактором (например, амплитудой (полуразмахом колебаний)) $E(\omega)$. Пусть, кроме того, T_1=T, т. е рассматриваются основные резонансные режимы. Тогда уравнение (10) преобразуется к виду [1, 2]:

$$F(A)= \Sigma_k U_k \sin k\varphi \qquad (11)$$

Обозначим $\alpha_k(\varphi)$ сумму, входящую в уравнение (11). Эту функцию будем называть *фазовой*. Число пар решений уравнения (11) (каждому решению соответствует резонансный режим) равно количеству максимумов фазовой функции на промежутке $0\leq \varphi < T$; условие существования хотя бы одной пары имеет вид')

$$\sup_{0\leq\varphi<T} \alpha_k(\varphi)\geq F(A), \qquad (12)$$

где знак равенства соответствует границе условия существования, при реализации которой пара режимов сливается в один предельный.

Пусть в возбуждении доминирует первая гармоника: $U_1>U_K$ при κ > 1. Тогда фазовая функция $\alpha_k(\varphi)$ ведет себя приблизительно как синусоида, имеющая на промежутке $0\leq\varphi<T$ один максимум.

В этом случае в системе возможна только одна пара основных резонансных режимов (или один режим на границе условия существования). Допустим теперь, что в возбуждении в силу некоторых причин начала возрастать j-я гармоника (говоря «начинает возрастать», имеем в виду скроль угодно плавное увеличение, не приводящее к возникновению переходных процессов), так что число Uj становится даже несколько больше числа U_1:. Тогда фазовая функция $\alpha_k(\varphi)$ приблизительно описывается суммой двух синусоид и, начиная с некоторого *критического значения* U_{0j}, будет иметь два максимума. Если для меньшего из максимумов выполняется неравенство

$$\max_{0 \le \varphi < T} \alpha_k(\varphi) \ge F(A), \qquad (13)$$

то уравнение (11) будет иметь две пары решений при реализации строгого неравенства и одну пару плюс предельный режим при реализации здесь знака равенства.

Если еще какая-нибудь гармоника начинает возрастать, то появляются три максимума и т. д.

Возникновение новых режимов в рассматриваемой системе при достижении ее параметрами некоторых критических значений называется *ветвлением (бифуркацией) решений* уравнения (1).

Возможность ветвления присуща практически всем нелинейным системам, однако, доминирование высших гармоник u_κ (при $\kappa > 1$) не может сильно сказаться, если гармоники «консервативного приближения» к решению быстро убывают. Наиболее медленно эти гармоники последовательность стремятся к нулю именно для сильно нелинейных, например, виброударных системы (см. [1, 2]).

4. Проиллюстрируем решения элементарного, но громоздко решающегося уравнения на графиках. Для большей наглядности ограничимся двумя гармониками возбуждения. Тогда уравнение (11) примет вид

$$F(A) = U_1 \sin \varphi + U_2 \sin 2\varphi \equiv \alpha_2(\varphi) \qquad (14)$$

На рис. 1 построен график функции $\alpha_2(\varphi)$ в предположении $U_1 > U_2$ (условие (12) заведомо не выполнено). Абсциссы точек пересечения прямых y_1 с кривой $\alpha_2(\varphi)$ дают искомые значения $\varphi = \varphi_{1,2}$. Рис. 2 соответствует случаю выполнения условия (12). Показаны возможные варианты существования резонансных режимов: прямая y_1 соответствует двум парам решений; y_2 — одной паре. Наконец, рис. 3 отражает случай $U_2 > U_1$. Здесь также имеются две пары решений, но они сливаются в одну пару субгармонических режимов, ибо в уравнениях (14) член $U_1 \sin \varphi$ оказывается несущественным и можно ввести обозначение $\varphi_0 = 2\varphi$; фаза φ_0 будет иметь лишь два значения, а первое уравнение энергетического баланса будет описывать условия поддержания резонансных режимов периода T за счет воздействия периода T/2, т. е. субгармонический резонанс $1:2$.

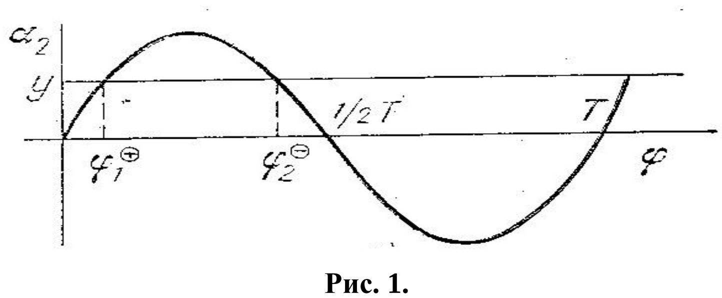

Рис. 1.

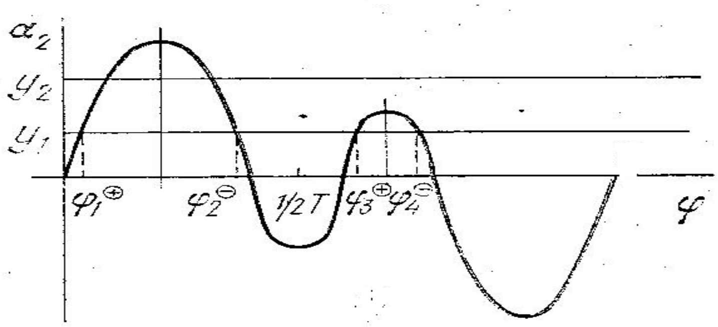

Рис. 2.

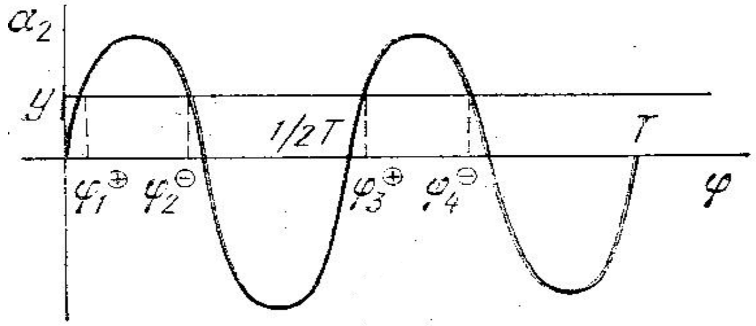

Рис. 3.

Приведенные графики отражают *эволюцию* резонансных режимов в системе (1) в зависимости от величины амплитуды второй гармоники вынуждающей силы. До выполнения условия ветвления (13) система качественно ведет себя как при синусоидальном возбуждении. По достижении в (13) равенства при отсутствии диссипации возможно появление новых решений.

Указанные решения должны еще анализироваться на устойчивость. В [1, 2] на примере виброударных систем показано, что один из режимов в каждой паре заведомо неустойчив. Устойчивым значениям фаз на рис. 1-3 отвечают верхние индексы «+», неустойчивым – «-».

Таким образом общие оценки числа резонансных режимов получены. Сделаем общие замечания . касающиеся резонансных режимов в системах рассматриваемого типа.

5. В данной работе не ставилоась цель отыскания самих решений. Задача заключалась в указании методик оценки их возможного числа. В случае полигармонической T-периодической внешней силы в нелинейной системе могут появиться еще супергармонические и комбинационные резонансные режимы [1, 2, 6].

Уравнения энергетического баланса, описывающие эти режимы, составляются так же, как и выше. Здесь мы ограничимся комментарием качественной стороны дела.

При главном резонансе внешняя сила имеет частоту ω и резонансный режим имеет ту же частоту. При этом энергия первой гармоники силы возбуждения вкладывается в систему на первой гармонике порождающего решения (режима свободных колебаний), вторая гармоника — на второй гармонике и т. д. Вообще, энергия, которую несет k-я гармоника внешней силы, вкладывается на k-й гармонике порождающего решения.

При субгармонических резонансах внешняя сила, имеет частоту ω), а резонансный режим — частоту ω/q где q— целое чисйо. Здесь первая гармоника внешней силы вкладывает энергию на q-й гармонике порождающего решения, вторая — на $2q$-й и т. д.

Таким образом, при субгармонических резонансах в систему вкладывается гораздо меньшая энергия, чем при главном резонансе.

Возможна также ситуация, когда энергия p-й гармоники внешней силы вкладывается на первой гармонике порождающего решения и, вообще, энергия kp-й гармоники воспринимается k-й гармоникой свободных колебаний: внешняя сила частоты ω вызывает супергармонические колебания частоты $p\omega$.

Комбинационные резонансные режимы имеют частоту $(p/q)\omega$ и существуют за счет вклада энергии p-й гармоники возбуждения на q-й гармонике свободных колебаний системы.

Анализ всех типов сложных резонансных движении в достаточной мере однообразен и вполне аналогичен только что проведенному. Здесь также возможно ветвление решений при доминировании высших гармонических составляющих, однако по понятным причинам при разумных условиях это явление «маловероятно».

Дополнительные режимы, возникающие при ветвлении, осуществляют переход от супергармонических к комбинационным режимам. Эти вопросы достаточно подробно рассмотрены в конкретном случае виброударных систем [1, 2].

Отметим также, что «рассуждая вообще», если в качестве функции, задающей внешнее воздействие выбрать, скажем, обобщенную функцию высокого порядка сингулярности, то фазовая функция $\alpha(\varphi)$ может иметь бесконечное число нулей на отрезке $[0,T]$ и следовательно в системе принципиально возможно бесконечное число резонансных режимов.

Более того, если исходить из возможной структуры самой фазовой функции, то эти нули, в принципе могут образовывать канторовское множество [7]. Тогда множество резонансных режимов принципиально может иметь мощность континуума.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № № 13-08-01235,13-08-90419).

Список литературы

1. Бабицкий В.И., Крупенин В.Л. Колебания в сильно нелинейных системах.-М., Наука, 1985. – 384 с.
2. Babitsky V.I.,. Krupenin V.L Vibration of Strongly Nonlinear Discontinuous Systems.- Berlin. Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 2001. –404 p.p.
3. Широкополосные виброударные генераторы механических колебаний//Крупенин В.Л., Веприк А.М. и др.- Л.: Машиностроение, 1987. 76 с.
4. Крупенин В.Л. О прогнозировании структур вибрационных полей в конструкциях, содержащих ударные пары// Проблемы машиностроения и надежности машин - №3.- 2013.-С 3-11.
5. Асташев В.К., Крупенин В.Л. Волны в распределенных и дискретных виброударных системах и сильно нелинейных средах. // Проблемы машиностроения и надежности машин, 1998, № 5, с. 13-30.
6. Вибрации в технике. Справочник. Т2 / Под ред.И.И. Блехмана – М.: Машиностроение, 1979.-352 с.
7. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа.— изд. четвёртое, переработанное.— М.: Наука, 1976.— 544 с.