УДК 621.01

ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС ДЛЯ РАСЧЕТА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФЕРМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ

© Сергей Сергеевич Исаев, Татьяна Владимировна Бондаренко

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова»

Аннотация. *Дается представление пространственной фермы на опорах, расположенных на разном расстоянии. Осуществляется обзор классического метода расчета. Предлагается новый метод. Производится вывод зависимостей динамики пространственной фермы, не содержащие неопределенные множители Лагранжа. Приводятся результаты разработки программного комплекса.*

При строительстве опорных конструкций возникает проблема расчета связей в узлах. Классическим методом расчетов, который сейчас применяют в строительстве, данную задачу решить трудно.

Классический метод не учитывает периодичности базисных функций, поэтому колебания балки будут выглядеть так, как изображено на рисунке 1.

Радиальное перемещение в этом случае будет описываться[1]:

$$u(x_i) = A_i \sum_{\mathrm{i}=0}^{\mathrm{N}} a_i \sin(\mathrm{x_i} * \mathrm{i}) + \ b_i \cos(\mathrm{x_i} * \mathrm{i})$$

Для решения системы приходится вводить множители Лагранжа. Это усложняет задачу.

Предложен новый метод, который учитывает периодичность базисных функций колебаний балки, поэтому колебания будут выглядеть так, как показано на рисунке 2.

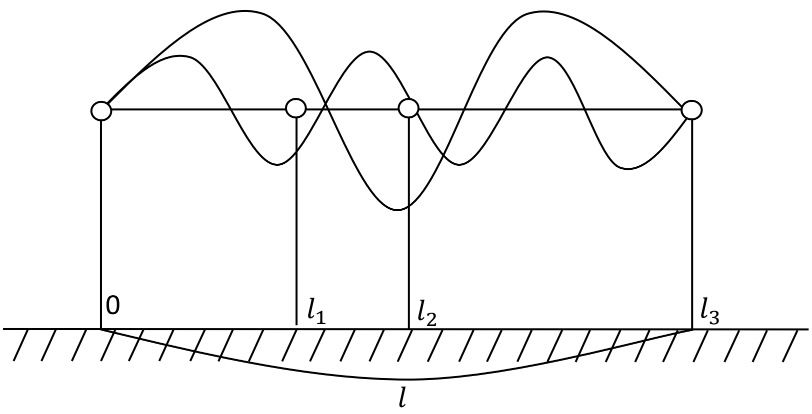

Рисунок 1 – Колебания балки в классическом методе

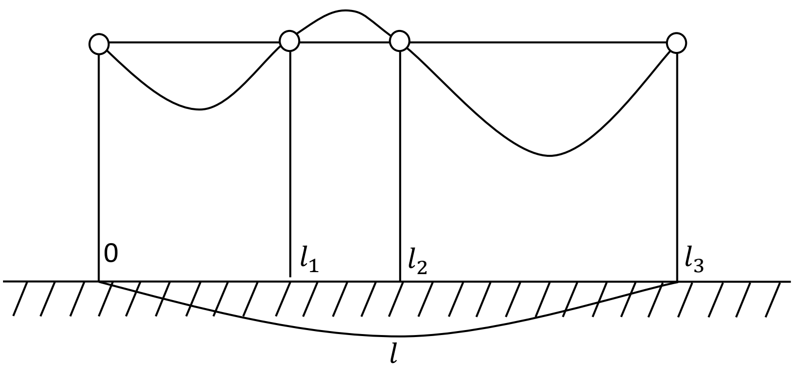

Рисунок 2 – Колебания балки на опорах в новом методе

На основании законов механики и теории упругих балок для получения дифференциальных уравнений, описывающих поведение балки, используется уравнение Лагранжа второго рода.

Для расчета пространственной фермы необходимо представить её виде системы, состоящей из нескольких плоских ферм. Пространственная ферма представлена на рисунке 3

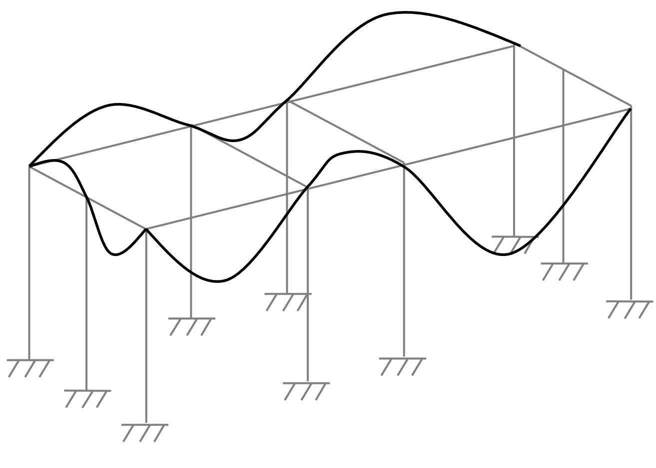

Рисунок 3 – Колебания пространственной фермы на опорах

На основании законов механики и теории упругих балок будем использовать следующие уравнения.

Кинетическую энергию T колеблющейся балки на опорах определяем как

$$T = \frac{m\vartheta^2}{2}$$

Объем участка балки Δx найдем по формуле $\Delta\omega = \Delta x h a$. Соответственно масса участка балки Δx будет равна $\Delta m = \rho\Delta x h a$, где a - ширина балки, h - толщина балки, ρ- удельная плотность материала балки.

Отсюда следует, что кинетическая энергия балки будет равна

$$T = \frac{1}{2}\lim\sum \Delta m\dot{U}^2 = \frac{1}{2}\int_0^l \rho h a\dot{U}^2 dz = \frac{\rho h a}{2}\int_0^l \dot{U}^2 dz = \frac{\Psi}{2}\int_0^l \dot{U}^2 dz$$

Потенциальную энергию участка балки $\Delta\Pi$ определяем как $\Delta\Pi = \varepsilon F$, $\Delta\Pi = kx\Delta x$.

Потенциальная энергия балки Π будет равна

$$\Pi = \sum kx_i\Delta x = \int_0^l kxdx = \frac{kx^2}{2}\Big|_0^l,$$

Определим $\Delta l = \frac{Fl}{ES}$, тогда $F = \frac{\Delta l ES}{l} = \varepsilon ES$.

В таком случае потенциальная энергия будет равна

$$\Pi = \frac{ES}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 dz$$

Если считать, что опоры, на которых стоит балка, не растяжимы и статичны, то

$$\Pi = \frac{ES}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 dx,$$

где $S = ah$, a - ширина балки, h - толщина балки, E- модуль Юнга.

Для получения дифференциальных уравнений, описывающих поведение балки, используется уравнение Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{b_j}}\right)-\frac{\partial T}{\partial b_j}+\frac{\partial \Pi}{\partial b_j}=0$$

где T, П – соответственно кинетическая и потенциальная энергия конструкции.

В нашем случае уравнение Лагранжа будет иметь вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{b}_{uj}}\right)-\frac{\partial T}{\partial b_{uj}}+\frac{\partial \Pi}{\partial b_{uj}}=0$$

Примем, что тангенсальное перемещение балки равно нулю. Поэтому $\frac{\partial T}{\partial b_j}=0$. Итоговое уравнение Лагранжа будет следующим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{b}_{uj}}\right)+\frac{\partial \Pi}{\partial b_{uj}}=0 \qquad (1)$$

Перемещение участков балки зададим в виде ряда Фурье

$$U_k=A_k\sum_{i=1}^{N}b_{ui}\sin(iy(x)) \qquad (2)$$

где U_k – радиальное перемещение участка k балки на опорах; A-коэффициент, задающий амплитуду колебаний пропорционально длине участка балки между опорами: $A=A_1=\frac{l_1}{l}$ на участке $[0;l_1]$; $A=A_2=\frac{l_2-l_1}{l}$ на участке $[l_1;l_2]$; $A=A_k=\frac{l_k-l_{k-1}}{l}$ на участке $[l_{k-1};l_k]$;

Для того, чтобы система функций (2) удовлетворяла нулевым перемещениям в точках опор используем линейную зависимость $y=k_1+xk_2$. Значения k_1 и k_2 для участков выберем из условия нулевых значений $\sin(iy(x))$ в точках опор. На рисунке 4 представлена зависимость между аргументами. Перемещение точек балки в точках опор равно нулю, поэтому значение $\sin(iy(x))$ равны нулю в точках $x=l_1, x=l_2, \dots, x=l_k$.

На каждом из отрезков $[0;l_1],[l_1;l_2],\dots,[l_{k-1};l_k]$ получим выражения для функции $y(x)$. На отрезке $[0;l_1]$ получаем: $y(x)=x*\frac{\pi}{l_1}$. На отрезке $[l_1;l_2]$: $y(x)=\frac{2\pi-\pi}{l_2-l_1}*(x-l_1)+\pi=\frac{\pi}{l_2-l_1}*x-\frac{l_1\pi}{l_2-l_1}+\pi$. На отрезке $[l_{k-1};l_k]$:

$$y(x) = \frac{\pi}{l_k - l_{k-1}} * x - \frac{l_{k-1}\pi}{l_k - l_{k-1}} + (k-1)\pi.$$

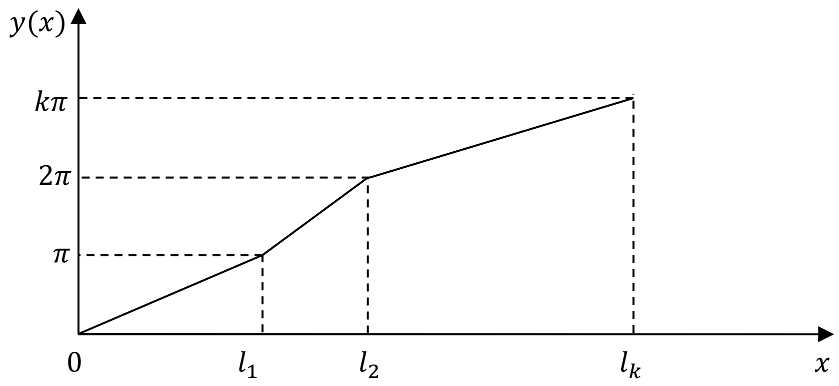

Рисунок 4 – Замена аргументов системы базисных функций.

В таком случае из выражения (2) на участке $[0; l_1]$:

$$U = A_1 \sum_{i=1}^{N} b_{ui} \sin(iy(x)),$$

$$y(x) = k_{11}x, k_{11} = \frac{\pi}{l_1};$$

на участке $[l_1; l_2]$:

$$U = A_2 \sum_{i=1}^{N} b_{ui} \sin(iy(x))$$

$$y(x) = k_{21}x + k_{20}, k_{21} = \frac{\pi}{l_2 - l_1}, k_{20} = \frac{\pi(l_2 - 2l_1)}{l_2 - l_1};$$

на участке $[l_{k-1}; l_k]$:

$$U = A_k \sum_{i=1}^{N} b_{ui} \sin(iy(x))$$

$$y(x) = k_{k1}x + k_{k0}, k_{k1} = \frac{\pi}{l_k - l_{k-1}}, k_{k0} = \frac{\pi(l_k - 2l_{k-1})}{l_k - l_{k-1}},$$

где $k_{11}, k_{21}, k_{20}, \ldots, k_{k1}, k_{k0}$ - коэффициенты аргументов базисных функций $y(x)$.

Найдем производную перемещения участков балки по координате

$$\frac{\partial U}{\partial x} = U_x' = A_k \sum_{i=1}^{N} b_{ui} i\cos(iy(x))$$

Соответственно вторая производная по b_{uj} будет иметь вид

$$\frac{\partial U_x'}{\partial b_{uj}} = U_{xb}' = A_k j\cos(jy(x))$$

Перемещение участков балки по обобщенным координатам будет выглядеть так

$$\dot{U}_k = A_k \sum_{i=1}^{N} \dot{b}_{ui} \sin(iy(x))$$

Производную перемещения по $\dot{b}_{uj}$ находим как

$$\frac{\partial \dot{U}}{\partial \dot{b}_{uj}} = A_k \sin(jy(x))$$

Далее найдем производную кинетической энергии балки по обобщенной координате $\dot{b}_{uj}$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{b}_{uj}} = \frac{\Psi}{2} \int_0^l \frac{\partial \dot{U}^2}{\partial \dot{b}_{uj}} dz = \frac{\Psi}{2} \int_0^l 2\dot{U} \left(\frac{\partial \dot{U}}{\partial \dot{b}_{uj}} \right) dz = \Psi \int_0^l \dot{U} \left(\frac{\partial \dot{U}}{\partial \dot{b}_{uj}} \right) dz =$$

$$= \Psi \int_0^l A_k \sum_{i=1}^{N} \dot{b}_{ui} \sin(iy(x))\, A_k \sin(jy(x)) dx = \Psi \sum_{i=1}^{N} {A_k}^2 \dot{b}_{ui} \int_0^l \sin(iy(x))\sin(jy(x)) dx =$$

$$= \Psi \left[\sum_{i=1}^{N} {A_1}^2 \dot{b}_{ui} \int_0^{l_1} \sin(iy(x))\sin(jy(x)) dx + \sum_{i=1}^{N} {A_2}^2 \dot{b}_{ui} \int_{l_1}^{l_2} \sin(iy(x))\sin(jy(x)) dx + \cdots + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{N} {A_k}^2 \dot{b}_{ui} \int_{l_{k-1}}^{l_k} \sin(iy(x))\sin(jy(x)) dx \right] = \Psi \left[\sum_{i=1}^{N} {A_1}^2 \dot{b}_{ui} \int_{f_1(0)}^{f_1(l_1)} \sin(if_1(x))\sin(jf_1(x)) {f_1}'(x) dx + \right.$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} {A_2}^2 \dot{b}_{ui} \int_{f_2(l_1)}^{f_2(l_2)} \sin(if_2(x))\sin(jf_2(x)) {f_2}'(x) dx + \cdots +$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{N} {A_k}^2 \dot{b}_{ui} \int_{f_k(l_{k-1})}^{f_k(l_k)} \sin(if_k(x))\sin(jf_k(x)) {f_k}'(x) dx \right]$$

Для упрощения расчетов произведем следующие замены

$$Msin_1 = \sin\big(if_1(x)\big)\sin\big(jf_1(x)\big){f_1}'(x), Msin_k = \sin\big(if_k(x)\big)\sin\big(jf_k(x)\big){f_k}'(x) \quad (3)$$

$$InMsin_1 = \int\limits_{f_1(0)}^{f_1(l_1)} Msin_1 \mathrm{dx}, InMsin_k = \int\limits_{f_k(l_{k-1})}^{f_k(l_k)} Msin_k \mathrm{dx} \tag{4}$$

В результате замен уравнение производной кинетической энергии балки по обобщенной координате $\dot{b}_{uj}$ будет иметь вид

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{b}_{uj}} = \Psi \sum_{i=1}^{N} {A_1}^2 \dot{b}_{ui}\, InMsin_1 + \Psi \sum_{i=1}^{N} {A_2}^2 \dot{b}_{ui} InMsin_2 + \cdots + \Psi \sum_{i=1}^{N} {A_k}^2 \dot{b}_{ui} InMsin_k$$

Найдем вторую производную кинетической энергии $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{b}_{uj}}\right)$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{b}_{uj}}\right) = \Psi \left[\sum_{i=1}^{N} {A_1}^2 \ddot{b}_{ui} \int\limits_{f_1(0)}^{f_1(l_1)} \sin(if_1(x))\sin(jf_1(x)){f_1}'(x)dx + \right.$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} {A_2}^2 \ddot{b}_{ui} \int\limits_{f_2(l_1)}^{f_2(l_2)} \sin(if_2(x))\sin(jf_2(x)){f_2}'(x)dx + \cdots +$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{N} {A_k}^2 \ddot{b}_{ui} \int\limits_{f_k(l_{k-1})}^{f_k(l_k)} \sin(if_k(x))\sin(jf_k(x)){f_k}'(x)dx \right]$$

С учетом замен (3) и (4) вторая производная будет равняться

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{b}_{uj}}\right) = \Psi \sum_{i=1}^{N} {A_1}^2 \ddot{b}_{ui}\, InMsin_1 + \Psi \sum_{i=1}^{N} {A_2}^2 \ddot{b}_{ui} InMsin_2 + \cdots +$$

$$+\Psi \sum_{i=1}^{N} {A_k}^2 \ddot{b}_{ui} InMsin_k \tag{5}$$

Производная потенциальной энергии балки по обобщенной координате b_{uj} будет иметь вид

$$\frac{\partial \Pi}{\partial b_{uj}} = \partial \left(\frac{ES}{2} \int\limits_0^l \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 dx\right) \Big/ \partial b_{uj} = \frac{ES}{2} \int\limits_0^l \frac{\partial (U_x')^2}{\partial b_{uj}} dx = \frac{ES}{2} \int\limits_0^l 2U_x' \frac{\partial U_x'}{\partial b_{uj}} dx =$$

$$= ES \int\limits_0^l U_x' U_{xb}' dx = ES \int\limits_0^l A_k \sum_{i=1}^{N} b_{ui} i\cos\big(iy(x)\big) A_k j\cos\big(jy(x)\big) dx =$$

$$= \mathrm{ES}\left[\sum_{i=1}^{N} A_k{}^2 b_{ui} ij \int_0^l \cos(iy(x))\cos(jy(x))dx\right] = \mathrm{ES}\left[\sum_{i=1}^{N} A_1{}^2 b_{ui} ij \int_0^{l_1} \cos(iy(x))\cos(jy(x))dx + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{N} A_2{}^2 b_{ui} ij \int_{l_1}^{l_2} \cos(iy(x))\cos(jy(x))dx + \cdots + \sum_{i=1}^{N} A_k{}^2 b_{ui} ij \int_{l_{k-1}}^{l_k} \cos(iy(x))\cos(jy(x))dx\right] =$$

$$= \mathrm{ES}\left[\sum_{i=1}^{N} A_1{}^2 b_{ui} ij \int_{f_1(0)}^{f_1(l_1)} \cos(if_1(x))\cos(jf_1(x))dx + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{N} A_2{}^2 b_{ui} ij \int_{f_2(l_1)}^{f_2(l_2)} \cos(if_2(x))\cos(jf_2(x))dx + \sum_{i=1}^{N} A_k{}^2 b_{ui} ij \int_{f_k(l_{k-1})}^{f_k(l_k)} \cos(if_k(x))\cos(jf_k(x))dx\right]$$

Так же для упрощения расчетов произведем следующие замены

$$Mcos_1 = \cos(if_1(x))\cos(jf_1(x)), Mcos_k = \cos(if_k(x))\cos(jf_k(x))$$

$$InMcos_1 = ij \int_{f_1(0)}^{f_1(l_1)} Mcos_1 dx, InMcos_k = ij \int_{f_k(l_{k-1})}^{f_k(l_k)} Mcos_k dx$$

В результате замен уравнение производной потенциальной энергии балки по обобщенной координате b_{uj} будет иметь вид

$$\frac{\partial \Pi}{\partial b_{uj}} = ES \sum_{i=1}^{N} A_1{}^2 b_{ui} InMcos_1 + \mathrm{ES} \sum_{i=1}^{N} A_2{}^2 b_{ui} InMcos_2 + \cdots + \mathrm{ES} \sum_{i=1}^{N} A_k{}^2 b_{ui} InMcos_k \quad (6)$$

Подставив выражения (5) и (6) в уравнение Лагранжа (1) получим

$$\left(\Psi \sum_{i=1}^{N} A_1{}^2 \ddot{b}_{ui} InMsin_1 + \Psi \sum_{i=1}^{N} A_2{}^2 \ddot{b}_{ui} InMsin_2 + \cdots + \Psi \sum_{i=1}^{N} A_k{}^2 \ddot{b}_{ui} InMsin_k\right) +$$

$$+\left(ES \sum_{i=1}^{N} A_1{}^2 b_{ui} InMcos_1 + \mathrm{ES} \sum_{i=1}^{N} A_2{}^2 b_{ui} InMcos_2 + \cdots + \mathrm{ES} \sum_{i=1}^{N} A_k{}^2 b_{ui} InMcos_k\right) = 0$$

Вынесем суммы обобщенных координат за скобки

$$\sum_{i=1}^{N} \ddot{b}_{ui} \left(\Psi A_1{}^2 InMsin_1 + \Psi A_2{}^2 InMsin_2 + \cdots + \Psi A_k{}^2 InMsin_k\right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} b_{ui} \left(ESA_1{}^2 InMcos_1 + ESA_2{}^2 InMcos_2 + \cdots + ESA_k{}^2 InMcos_k\right) = 0$$

Введем замену

$$kA_2 = \left(\Psi A_1{}^2 InMsin_1 + \Psi A_2{}^2 InMsin_2 + \cdots + \Psi A_k{}^2 InMsin_k\right)$$

$$kA_0 = \left(ESA_1{}^2 InMcos_1 + ESA_2{}^2 InMcos_2 + \cdots + ESA_k{}^2 InMcos_k\right)$$

В итоге уравнение Лагранжа будет иметь вид

$$\sum_{i=1}^{N} \ddot{b}_{ui}\, kA_2 + \sum_{i=1}^{N} \mathrm{b_{ui}\, kA_0} = 0$$

На основании нового метода был разработан программный комплекс, который позволит рассчитывать пространственные фермы на опорах.

Готовый программный продукт будет выглядеть следующим образом:

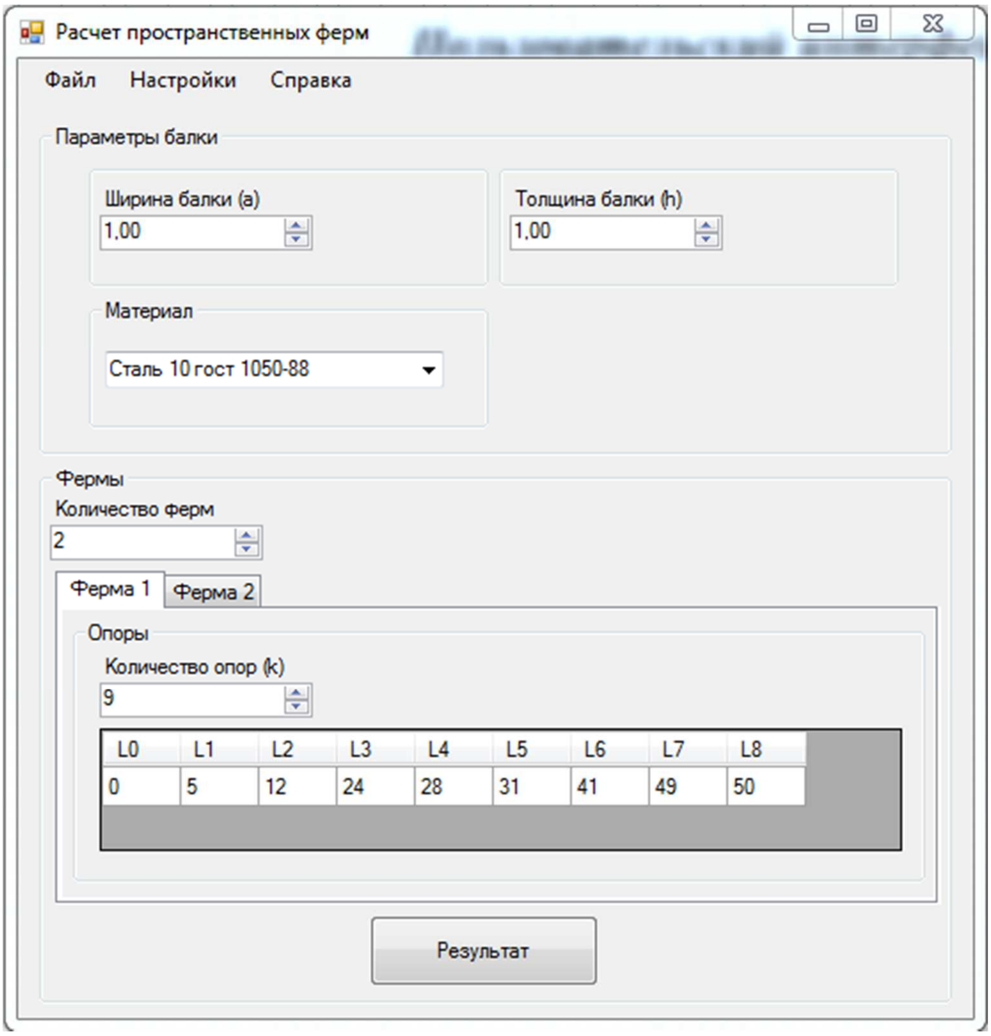

Рисунок 5 – Основная форма программы с заполненными данными

Для хранения характеристик материалов необходимо использовать таблицу в базе данных. Для работой с базой материалов были созданы соответствующие формы.

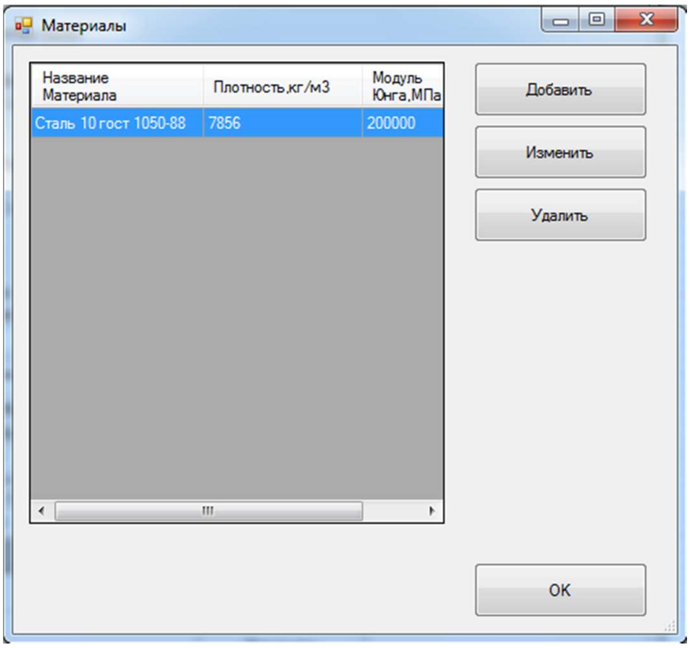

Рисунок 6 – Форма редактора материалов

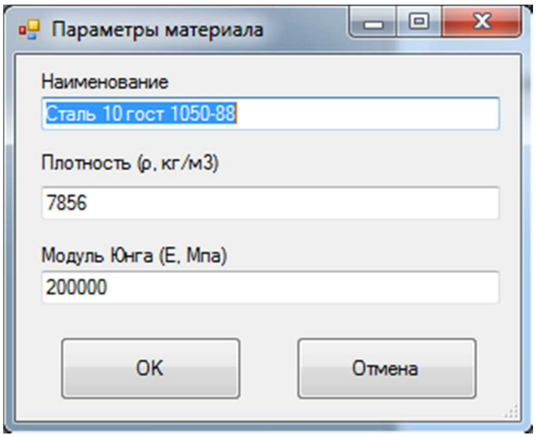

Рисунок 7 – Форма заполнения параметров материала

ЛИТЕРАТУРА

1. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний: Учебник для вузов. – М.: Высш. школа, 1980. – 480 с., ил.

2. Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле/Пер. с англ. Л. Г. Корнейчука; под ред. Э. И. Григорюка. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.

3. Лебедева Н. В. Фермы, арки, тонкостенные пространственные конструкции/Лебедева Н. В.: Учебное пособие. – М.: «Архитектура – С». 2006. – 120 с., ил.