УДК 519.651: 519.6

В. Л. Леонтьев (г. Ульяновск)

О ПРОЦЕДУРЕ ОРТОГОНАЛИЗАЦИИ ФИНИТНЫХ ФУНКЦИЙ

Установлена связь классической ортонормированной системы функций Франклина с последовательностью ортонормированных финитных функций [1], показывающая возможность формирования рядов Фурье на основе ортонормированных финитных функций, предназначенных для их использования в алгоритмах численных методов. Обосновывается высокая степень универсальности процедуры ортогонализации [1], сохраняющей, в отличие от классических процедур ортогонализации, свойство финитности базисных функций.

Ортонормированная система функций Франклина (нефинитных) – исторически первый пример ортонормированного базиса пространства $C(0,1)$ непрерывных функций, была построена ортогонализацией системы функций Фабера-Шаудера с помощью процедуры Грама-Шмидта. Например, первые три функции Франклина имеют вид

$$F_1(x) = \sqrt{3}(2x-1) \quad \forall\ x \in [0,1];$$

$$F_2(x) = \begin{cases} \sqrt{3}(4x-1),\ x \in [0,1/2); \\ \sqrt{3}(3-4x),\ x \in [1/2,1]; \end{cases}$$

$$F_3(x) = \begin{cases} (\sqrt{33}/11)(38x-5),\ x \in [0,1/4); \\ (\sqrt{33}/11)(11-26x),\ x \in [1/4,1/2); \\ (\sqrt{33}/11)(6x-5),\ x \in [1/2,1]. \end{cases}$$

Ортогонализация, также с помощью процедуры Грама-Шмидта, пяти функций (функций-шапочек) типа функций Фабера-Шаудера, взятых только из одного полного сеточного набора функций [1] на отдельной сетке, получаемой на втором шаге половинного деления отрезка $[0,1]$, приводит к пяти также нефинитным ортонормированным функциям, первые три из которых имеют вид

$$f_1(x) = \begin{cases} 2\sqrt{3}(1-4x),\ x \in [0,1/4); \\ 0,\ x \in [1/4,1]. \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 2\sqrt{3/7}(12x-1),\ x \in [0,1/4); \\ 8\sqrt{3/7}(1-2x),\ x \in [1/4,1/2); \\ 0,\ x \in [1/2,1]. \end{cases}$$

$$f_3(x)=\begin{cases} -(2\sqrt{3}/\sqrt{91})(12x-1),\ x\in[0,1/4); \\ (2\sqrt{3}/\sqrt{91})(36x-11),\ x\in[1/4,1/2); \\ (14\sqrt{3}/\sqrt{91})(3-4x),\ x\in[1/2,3/4); \\ 0,\ x\in[3/4,1]. \end{cases}$$

Эти функции являются линейными комбинациями функций Франклина и так же, как и пять первых функций Франклина, образуют базис в пятимерном подпространстве кусочно-линейных функций, возможно имеющих изломы только в узлах названной сетки. Установленная возможность формирования ортонормированных функций не на базе системы Фабера-Шаудера, а на базе последовательности полных сеточных наборов линейно-независимых финитных функций-шапочек, позволяет проводить ортогонализацию не только на основе процедуры Грама-Шмидта. Иной способ ортогонализации таких сеточных наборов, сохраняющий свойство финитности, имеющееся у исходных функций-шапочек, представлен в [1]. Таким образом, установлена высокая степень универсальности процедуры ортогонализации систем функций, предложенной в [1] и в статьях, опубликованных ранее. Ссылки на эти статьи даются в [1]. Таким образом, две классические процедуры ортогонализации систем функций**:** процедура Грама-Шмидта и продолжение на более длинный интервал, дополняются процедурой ортогонализации [1], отличающейся от названных классических процедур тем, что процедура ортогонализации [1] сохраняет свойство финитности функций, имеющее исключительно большое значение для вычислительной математики.

Формирование рядов Фурье на основе систем функций Фабера-Шаудера или Франклина осуществляется обычным образом. Ряды Фурье, связанные с ортогональными финитными функциями, на основе изложенных результатов строятся как предел последовательности частичных сумм, образованных последовательностями, полных в конечномерных подпространствах, наборов ортонормированных систем финитных функций, построенных на последовательности сгущающихся сеток.

Применение названных базисных систем функций приводит к эффективным алгоритмам численных методов исследования математических моделей - краевых или эволюционно-краевых задач.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Леонтьев, В. Л. Ортогональные финитные функции и численные методы / В. Л. Леонтьев. – Ульяновск: УлГУ, 2003. – 178 с.