

РАСЧЕТ ПЛОСКОЙ ФЕРМЫ С УЧЕТОМ БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ*Онищенко Д.И.**Бондаренко Т.В.**Белгородский Государственный Технологический Университет им.**В.Г.Шухова***Аннотация**

Современные методы расчета строительных ферм не учитывают условия связи разного периода. Для их учета с использованием классических методов, необходимо введение множителей Лагранжа, что значительно усложняет решение задачи. В статье предлагается метод, позволяющий просто учитывать такие связи путем задания тригонометрических функций, имеющих разный период.

1. Постановка задачи

Рассматривается плоская ферма, расположенная на опорах, находящихся друг от друга на разных расстояниях. В случае неравномерного размещения опор появляются условия связи разного периода. Эта проблема не решается классическими методами. Для решения задачи простыми алгоритмами необходимо введение неопределенных множителей Лагранжа, что значительно усложняет решение задачи.

В рамках статьи рассматривается новый метод, не рассматривавшийся ранее в научном обществе. Он позволяет просто учитывать условия связи разного периода путем задания тригонометрических функций, имеющих разный период.

2. Математический анализ

Для расчета плоской фермы на опорах используется уравнение Лагранжа второго рода.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{b}_{uj}} \right) - \frac{\partial T}{\partial b_{uj}} + \frac{\partial \Pi}{\partial b_{uj}} = 0$$

где T , Π – соответственно кинетическая и потенциальная энергия конструкции. Уравнение является ключевым для получения системы дифференциальных уравнений, описывающих поведение балки.

Существует классический метод расчета колебания балки в точках опор, расположенных на разных расстояниях, не учитывающий периодичность базисных функций. На рисунке 1 представлена форма колебаний балки при решении задачи классическим методом.

Для решения задачи классическим методом необходимо введение неопределенных множителей Лагранжа, что существенно усложняет решение.

Рассматриваемый метод позволяет учесть периодичность базисных функций колебаний балки. Для этого при расчете радиального перемещения каждой точки балки, применяются зависимости от аргументов базисных функций. На рисунке 2 изображена форма колебаний балки при решении с учетом периодичности базисных функций.

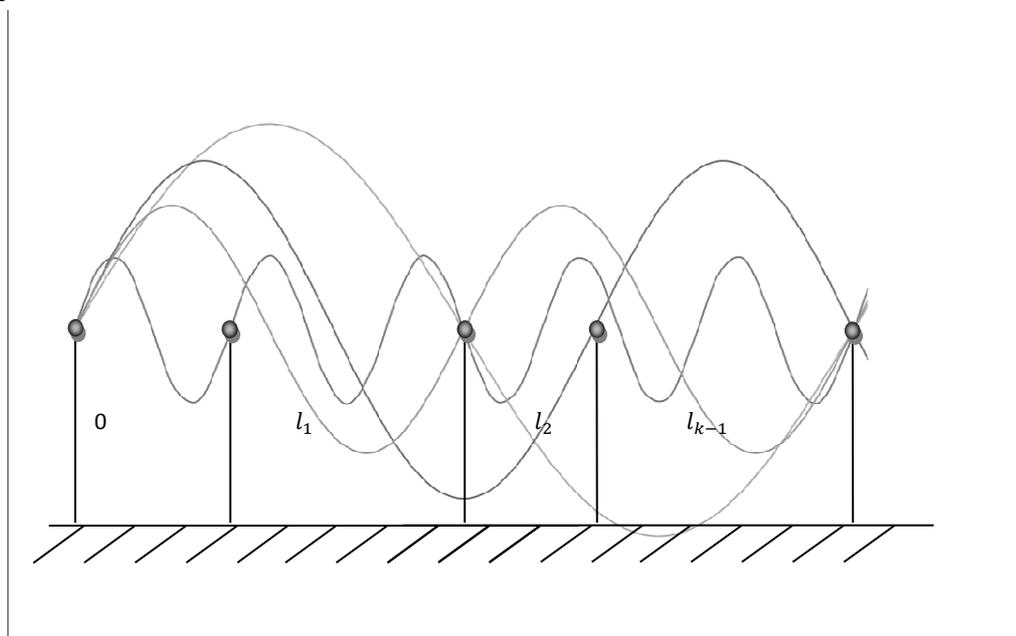


Рисунок 1 — Колебания балки на опорах в классическом методе

Для случая колебания балки в точках опор, расположенных на разных расстояниях, формула радиального перемещения каждой точки балки, задается в виде ряда Фурье, и выглядит следующим образом:

$$U_k = A_k \sum_{i=0}^N b_{ui} \sin(x_i i)$$

где U_k – радиальное перемещение k -го участка балки на опорах, A – амплитуда колебаний.

Такая форма вычислений не учитывает периодичности базисных функций, поэтому вместо x_i рассматривается функция $y(x_i)$.

$$U_k = A_k \sum_{i=0}^N b_{ui} \sin(iy(x_i)) \quad (1)$$

где $y(x_i)$ – линейная функция от аргументов базисных функций.

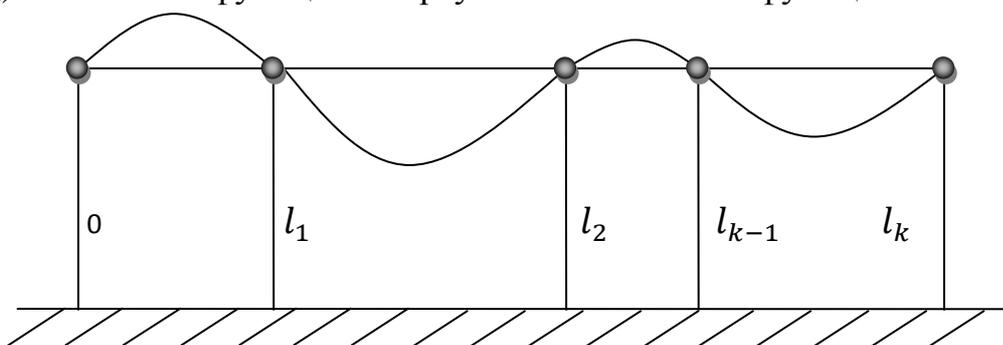


Рисунок 2 — Колебания балки с учетом периодичности базисных функций

Коэффициент A , задает амплитуду колебаний и пропорционален длине участка балки между опорами:

$$A = A_1 = \frac{l_1}{l} \text{ на участке } [0; l_1]$$

$$A = A_k = \frac{l_k - l_{k-1}}{l} \text{ на участке } [l_{k-1}; l_k]$$

Для того, чтобы система функций (1) удовлетворяла нулевым перемещениям в точках опор используется линейная зависимость

$$y = k_1 + k_2 x$$

где k_1 и k_2 для участков выбираются из условия нулевых значений $\sin(iy(x))$ в точках опор, т.к. перемещения в них равны нулю.

Зависимость между аргументами представлена на рисунке 3. На каждом из отрезков $[0; l_1], [l_1; l_2], \dots, [l_{k-1}; l_k]$ получаем выражения для функции $y(x)$.

$$[0; l_1]: \quad y(x) = x * \frac{\pi}{l_1}.$$

$$[l_1; l_2]: \quad y(x) = \frac{2\pi - \pi}{l_2 - l_1} * (x - l_1) + \pi = \frac{\pi}{l_2 - l_1} * x - \frac{l_1 \pi}{l_2 - l_1} + \pi.$$

$$[l_{k-1}; l_k]: \quad y(x) = \frac{\pi}{l_k - l_{k-1}} * x - \frac{l_{k-1} \pi}{l_k - l_{k-1}} + (k - 1)\pi.$$

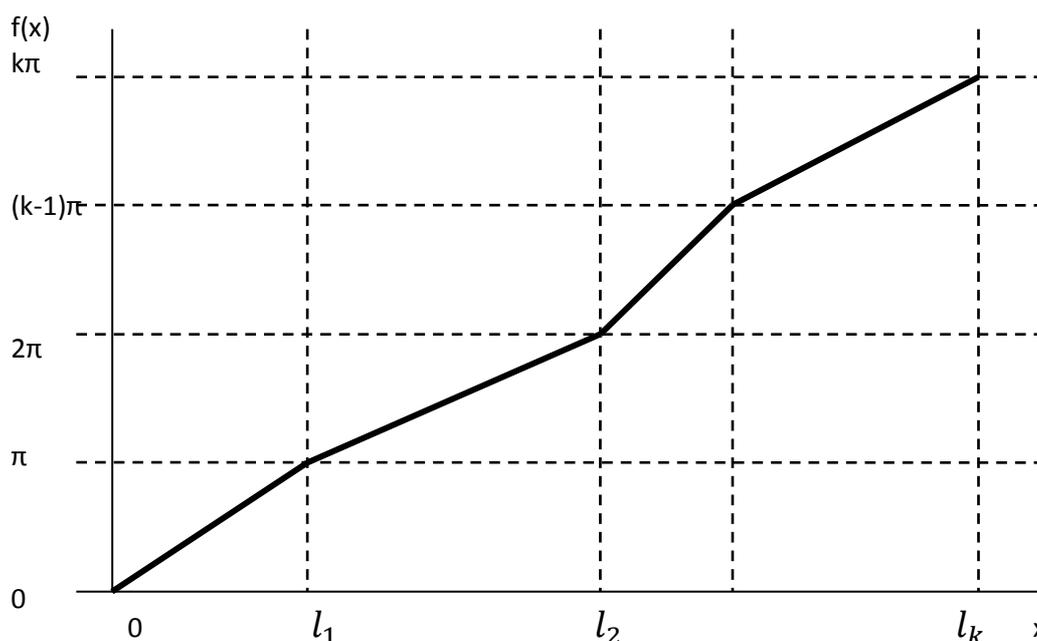


Рисунок 3 — Замена аргументов системы базисных функций.

Найдем производные перемещения участков балки (формула 1) по координате:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = U'_x = A_k \sum_{i=1}^N b_{ui} i \cos(iy(x))$$

$$\frac{\partial U'_x}{\partial b_{uj}} = U'_{xb} = A_k j \cos(jy(x))$$

Найдем перемещение участков балки по обобщенным координатам :

$$\dot{U}_k = A_k \sum_{i=1}^N \dot{b}_{ui} \sin(iy(x))$$

$$\frac{\partial \dot{U}}{\partial \dot{b}_{uj}} = A_k \sin(jy(x))$$

Для получения дифференциальных уравнений описывающих поведение балки используется уравнение Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{b}_{uj}} \right) - \frac{\partial T}{\partial b_{uj}} + \frac{\partial \Pi}{\partial b_{uj}} = 0$$

где T – кинетическая энергия и Π – потенциальная энергия конструкции.

Тангенциальное перемещение балки принимается равным нулю.

Кинетическую энергию колеблющейся балки выведем из формулы:

$$T = \frac{m\vartheta^2}{2}$$

Объем участка балки вычисляется по формуле:

$$\Delta\omega = \Delta x h a$$

Отсюда можем вычислить массу участка:

$$\Delta m = \rho \Delta x h a$$

где Δx – участок балки, Δm – масса участка балки, ρ – удельное сопротивление материала балки, a – ширина балки и h – толщина балки.

Таким образом, выражение для кинетической энергия колеблющейся балки T будет иметь вид:

$$T = \frac{1}{2} \lim \sum \Delta m \dot{U}^2 = \frac{1}{2} \int_0^l \rho h a \dot{U}^2 dz = \frac{\rho h a}{2} \int_0^l \dot{U}^2 dz$$

Обозначим $\rho h a = \Psi$ и получим следующую формулу:

$$T = \frac{\Psi}{2} \int_0^l \dot{U}^2 dz$$

Потенциальную энергию участка балки также выводим из формул:

$$\Delta \Pi = kx \Delta x = \varepsilon F$$

$$\Pi = \sum kx_i \Delta x = \int_0^l kx dx = \frac{kx^2}{2} \Big|_0^l$$

$$\Delta l = \frac{Fl}{ES}$$

$$F = \frac{\Delta l ES}{l} = \varepsilon ES$$

Получаем, что потенциальная энергия Π балки на статичных опорах имеет вид:

$$\Pi = \frac{Eah}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 dx$$

где E – модуль Юнга, a и h – соответственно ширина и толщина балки.

Вычислим необходимые все производные, необходимые для составления уравнения Лагранжа.

Вычислим производную кинетической энергии T балки по \dot{b}_{uj} .

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{b}_{uj}} &= \frac{\Psi}{2} \int_0^l \frac{\partial \dot{U}^2}{\partial \dot{b}_{uj}} dz = \frac{\Psi}{2} \int_0^l 2\dot{U} \left(\frac{\partial \dot{U}}{\partial \dot{b}_{uj}} \right) dz = \Psi \int_0^l \dot{U} \left(\frac{\partial \dot{U}}{\partial \dot{b}_{uj}} \right) dz = \\ &= \Psi \left[\sum_{i=1}^N A_1^2 \dot{b}_{ui} \int_{f_1(0)}^{f_1(l_1)} \sin(if_1(x)) \sin(jf_1(x)) f_1'(x) dz + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^N A_k^2 \dot{b}_{ui} \int_{f_k(l_{k-1})}^{f_k(l_k)} \sin(if_k(x)) \sin(jf_k(x)) f_k'(x) dz \right]; \end{aligned}$$

Вычислим $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{b}_{uj}} \right)$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{b}_{uj}} \right) &= \Psi \left[\sum_{i=1}^N A_1^2 \ddot{b}_{ui} \int_{f_1(0)}^{f_1(l_1)} \sin(if_1(x)) \sin(jf_1(x)) f_1'(x) dz + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^N A_k^2 \ddot{b}_{ui} \int_{f_k(l_{k-1})}^{f_k(l_k)} \sin(if_k(x)) \sin(jf_k(x)) f_k'(x) dz \right]; \end{aligned}$$

Вычислим производную потенциальной энергии Π балки по b_{uj}

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial b_{uj}} &= \partial \left(\frac{ES}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 dx \right) / \partial b_{uj} = \frac{ES}{2} \int_0^l \frac{\partial (U'_x)^2}{\partial b_{uj}} dx = \frac{ES}{2} \int_0^l 2U'_x \frac{\partial U'_x}{\partial b_{uj}} dx = \\ &= ES \int_0^l U'_x U'_{xb} dx = ES \int_0^l A_k \sum_{i=1}^N b_{ui} i \cos(iy(x)) A_k j \cos(jy(x)) dx = \\ &= ES \left[\sum_{i=1}^N A_1^2 b_{ui} ij \int_{f_1(0)}^{f_1(l_1)} \cos(if_1(x)) \cos(jf_1(x)) dx \right. \\ &\quad \left. + \dots + \sum_{i=1}^N A_k^2 b_{ui} ij \int_{f_k(l_{k-1})}^{f_k(l_k)} \cos(if_k(x)) \cos(jf_k(x)) dx \right]; \end{aligned}$$

После выполнения дифференцирование кинетической и потенциальной энергий по обобщенным координатам и их производным, подставим их в

уравнение Лагранжа. После всех преобразований уравнение Лагранжа будет выглядеть следующим образом.

$$\begin{aligned} & \Psi \left[\sum_{i=1}^N A_1^2 \ddot{b}_{ui} \int_{f_1(0)}^{f_1(l_1)} \sin(if_1(x)) \sin(jf_1(x)) f_1'(x) dz + \right. \\ & + \sum_{i=1}^N A_2^2 \ddot{b}_{ui} \int_{f_2(l_1)}^{f_2(l_2)} \sin(if_2(x)) \sin(jf_2(x)) f_2'(x) dz \\ & + \dots + \sum_{i=1}^N A_k^2 \ddot{b}_{ui} \int_{f_k(l_{k-1})}^{f_k(l_k)} \sin(if_k(x)) \sin(jf_k(x)) f_k'(x) dz \left. \right] + \\ & + ES \left[\sum_{i=1}^N A_1^2 b_{ui} ij \int_{f_1(0)}^{f_1(l_1)} \cos(if_1(x)) \cos(jf_1(x)) dx \right. \\ & + \sum_{i=1}^N A_2^2 b_{ui} ij \int_{f_2(l_1)}^{f_2(l_2)} \cos(if_2(x)) \cos(jf_2(x)) dx + \dots \\ & \left. + \sum_{i=1}^N A_k^2 b_{ui} ij \int_{f_k(l_{k-1})}^{f_k(l_k)} \cos(if_k(x)) \cos(jf_k(x)) dx \right] = 0; \end{aligned}$$

В итоге получим систему дифференциальных уравнений для обобщенных координат $b_{ui}, b_{uj} (i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, K)$, описывающих поведение балки на статичных опорах. Решая систему численным методом, находим значения частот, которые подставляются в формулу 1 для вычисления значений перемещений балки.

На основании полученных математических зависимостей был разработан программный комплекс.

Литература

1. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний: Учебник для вузов. – М.: Высш. школа, 1980. – 480 с., ил. — ISBN
2. Амосов А.А, Вычислительные методы для инженеров: учебное пособие. /Амосов А.А, Дубинский Ю.А., Копченлова Н.В. – М.: Высш. шк., 1994. – 544 с.: ил. – ISBN
3. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле./ Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Пер.с англ. Л.Г. Корнейчука; Под ред. Э.И. Григолоука. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.