ОБ ОБЩНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ ПРОЦЕССОВ ПРИРОДНЫХ И ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Манасян М.С., Манасян Д.С., Андгуладзе И.С., Манасян Г.С., Манасян С.К.

Красноярский государственный аграрный университет, ООО «НовоТех», Красноярск, Россия

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда содействия развития малых форм предприятий в научно-технической сфере

Различные протекающие в природе физические процессы могут быть представлены единой общей математической моделью в виде системы квазилинейных гиперболических уравнение первого порядка.

Окружающий нас мир является нелинейным. Однако степень этот нелинейности M невысокая, она не превышает значения второго порядка, т.е. $1<M<2$. Поэтому природные физические процессы представляются квазилинейными моделями [1, 2].

В общем случае для природных процессов эти квазилинейные процессы являются гиперболическими и в пространственно-одномерном случае могут быть представлены в виде:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F(S) = 0 \ , \tag{1}$$

где $S = (S_1\,(t,x),\ S_2\,(t,x), \dots\ ,\ S_n\,(t,x))$,

$F(S) = \big(F_1\,(S_1\,(t,x),\ S_2\,(t,x), \dots\ ,\ S_n\,(t,x)\big),\ \dots\ ,\ F_n(S_1\,(t,x),$
$S_2\,(t,x), \dots\ ,\ S_n\,(t,x)))$.

Здесь S_1, … , S_n – переменные состояния природного физического процесса (например, плотность, скорость, энергия, давление и т.п.);

$F_i(S_j)$ – функции от переменных S_j линейного и (или) билинейного вида:

$$b\,S_{j-1} + S_j\ , \tag{2}$$
$$S_{j-1} + a\,S_j^2, \tag{3}$$
$$S_{j-1}\ S_j. \tag{4}$$

Очевидно, что вид (4) может быть представлен как дополнительная переменная $S_{n+1} = S_{j-1}\ S_j$, тогда в системе останутся только функции $F_i\big(S_j\big)$ двух приведенных видов (2) и (3), а число уравнений в модели (1) увеличится на количество попарных взаимодействий основных факторов (переменных S_j) с синергетическим эффектом.

В качестве иллюстрации приведенных положений рассмотрим два важных для практики примера: движение газа и движение жидкости в природной среде.

Модель течения невязкого нетеплопроводного газа представляется одним из важнейших уравнений математической физики, - уравнением Эйлера в газовой динамике [3].

Эту модель можно привести к виду (1), если представить:

$$S_1 = \rho,$$
$$S_2 = u,$$
$$S_3 = e,$$
$$S_4 = p.$$

Здесь ρ - плотность, u - скорость, p - давление, e - полная энергия газа.

Тогда

$$F_1 = S_2\, S_4,\; F_2 = S_1\, S_2^2 + S_4,\;\; F_3 = (S_3 + S_4)S_2,\;\; F_4 = 0. \qquad (5)$$

Учитывая, что данные переменные состояния исследуемого процесса связаны между собой по формуле

$$p = (\gamma - 1)\left(e - \frac{\rho\, u^2}{2}\right). \qquad (6)$$

Учитывая это, размерность вектора S можно уменьшить до трех и модель (1) представится в векторно-матричной форме:

$$S = \begin{pmatrix} p \\ \rho\, u \\ e \end{pmatrix}, \qquad (7)$$

$$F(S) = \begin{pmatrix} pu \\ \rho\, u^2 \;\; + \; p \\ (e + p)\, u \end{pmatrix}. \qquad (8)$$

Для доказательства вышеприведенного утверждения об общности математической модели представим в такой же форме записи уравнение движения жидкости, – уравнение мелкой воды – уравнение Сен-Венана [4, 5].

В этом случае имеем:

$$S = \begin{pmatrix} h \\ h\, u \end{pmatrix}, \qquad (9)$$

$$F(S) = \begin{pmatrix} hu \\ h\, u^2 + \; g\frac{h^2}{2} \end{pmatrix}. \qquad (10)$$

Здесь h - глубина, g - ускорение свободного падения.

Подобные примеры можно привести в большом количестве [6, 7].

Численное решение данных моделей приводит к функциям, хорошо аппроксимируемым логистическими уравнениями, что еще раз доказывает о правомерности утверждения о характере и порядке общей математической модели.

В качестве еще одного примера описания физического процесса математической моделью вида (1) отметим процесс сушки зерна с составляющими его взаимосвязанными процессами тепломассообмена [6]. При этом искусственные процессы (например, высокотемпературная сушка зерна в зерносушилке) отличаются от природных (например, естественная солнечная сушка зерна) наличием быстроизменяющихся переменных (требуется масштабирование времени) и переменностью коэффициентов (требуется введение новых параметров, например коэффициент эффективного влагообмена α, представляемый в виде функции, зависящей от влажности и температуры при интенсивном сушильном процессе) заменяется двумя постоянными параметрами).

Литература

1. Манасян М.С. К вопросу формализации нелинейных систем / М.С. Манасян // Красноярский край: освоение, развитие, перспективы: Мат-лы регион. студ. науч. конф. / Краснояр. гос. аграр. ун-т Красноярск, 2004. Ч.1. С. 153-154.

2. Манасян М.С. Нелинейные явления, проблемы их изучения / М.С. Манасян // Молодые ученые науке Сибири: Сб. тр. молодых ученых / Краснояр. гос. ун-т. Красноярск, 2005. Вып.1. С. 127.

3. Самарский, А.А. Разностные методы решения задач газовой динамики / А.А. Самарский, Ю.П. Попов. – М.: Наука, 1980. – 352 с.

4. Стокер, Д.Д. Волны на воде / Д.Д. Стокер. – М.: ИЛ, 1959. – 617 с.

5. Вольцингер, Н.Е. Длинные воды на мелкой воде / Н.Е. Вольцингер. – Л.: Гидрометеоиздат, 1985. – 162 с.

6. Манасян М.С. Сушка зерна как нелинейный процесс / М.С. Манасян // Красноярский край: освоение, развитие, перспективы: Мат-лы регион. студ. науч. конф. / Краснояр. гос. аграр. ун-т Красноярск, 2004. Ч.1. С. 154-155.

7. Манасян С.К., Манасян Г.С., Манасян М.С., Манасян Д.С. О существовании единой записи законов сохранения физических величин, свидетельствующей об общности математической модели природных физических процессов / Проблемы современной аграрной науки: Материалы международной заочной научной конференции (15 октября 2013 г.). – Красноярск, 2013. – С. 85-88.