Математические основы механики

Кириллов Андрей Михайлович
Сочинский Государственный Университет
http://iefsgu.ucoz.ru, http://generalphysics.ru

Начнем с определений механики и математики, а также приведем слова известного советского и российского ученого-механика, А.П. Маркеева.

Механика (греч. μηχανική — искусство построения машин) — раздел физики, наука, изучающая движение материальных тел и взаимодействие между ними; при этом движением в механике называют изменение во времени взаимного положения тел или их частей в *пространстве*.

Математика — точная наука, наука о *пространственных* формах и количественных отношениях.

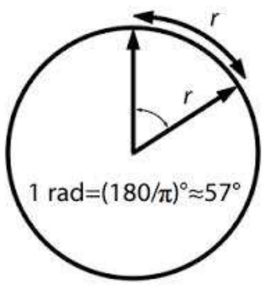
«Как фундаментальная наука теоретическая механика была и остаётся не только одной из дисциплин, дающей углублённые знания о природе. Она также служит средством воспитания у будущих специалистов необходимых творческих навыков к построению математических моделей происходящих в природе и технике процессов, к выработке способностей к научным обобщениям и выводам».

Таким образом, теоретическая механика, изучая модели процессов, немыслима без математики. Теоретическая механика изучает математические модели и успешное освоение ее курса неразрывно связано с соответствующим математическим аппаратом.

Данное пособие посвящено рассмотрению базового математического аппарата, необходимого для успешного освоения курса «Теоретическая механика».

1. СВЕДЕНИЯ ИЗ ГЕОМЕТРИИ И ТРИГОНОМЕТРИИ

1.1 Радиан



1 *Радиан* –центральный угол окружности, опира.щийся на дугу этой окружности, длиной 1 радиус.

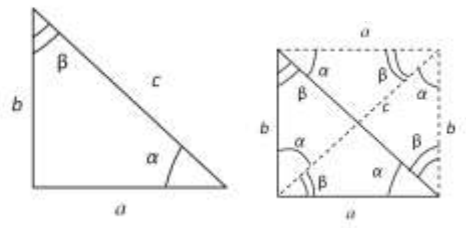
Т.к. длина окружности $L=2\pi r$, то $360^o=2\pi$ радиан, $180^o=\pi$ радиан, $90^o=\pi/2$ радиан и т.д.

Перевод градусов в радианы и обратно

$$\alpha(\text{рад})=(\pi/180)\cdot\alpha(\text{град}),\quad \alpha(\text{град})=(180/\pi)\cdot\alpha(\text{рад});$$

$$1 \text{ рад}=180/\pi \text{ град},\quad 1^o=\pi/180 \text{ рад}.$$

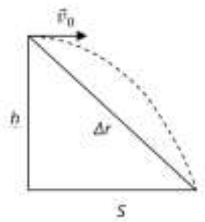
1.2 Прямоугольный треугольник

 a, b – катеты c – гипотенуза a – катет, прилежащий к острому углу α и противолежащий острому углу β. b – катет, прилежащий к острому углу β и противолежащий острому углу α.	**Синус** Отношение противолежащего катета к гипотенузе: $\sin\alpha = \frac{b}{c}$, $\sin\beta = \frac{a}{c}$. **Косинус** Отношение прилежащего катета к гипотенузе: $\cos\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\beta = \frac{b}{c}$. **Тангенс** Отношение противолежащего катета к прилежащему: $\mathrm{tg}\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\mathrm{tg}\beta = \frac{a}{b} = \frac{\sin\beta}{\cos\beta}$.
Теорема Пифагора	*Сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы:* $a^2 + b^2 = c^2$.
Основное тригонометрическое тождество	$a^2 + b^2 = c^2$, $c^2\sin^2\alpha + c^2\cos^2\alpha = c^2$, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.
Площадь	*Полупроизведение катетов*: $S = \frac{1}{2}ab$

Примеры из механики

Пример 1

С балкона, находящегося на высоте h=15 м, бросили в горизонтальном направлении мяч, который упал на Землю на расстоянии S=20 м от стены дома. Найти перемещение Δr мяча от момента броска до момента падения на Землю.



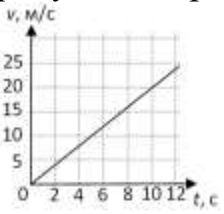
Решение

Применим теорему Пифагора:

$$\Delta r = \sqrt{S^2 + h^2} = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25 \text{ м}.$$

Пример 2

Тело начинает движение из состояния покоя с постоянным ускорением. График зависимости скорости движения от времени представлен на рисунке. Определить путь, пройденный телом к 10-ой секунде движения.



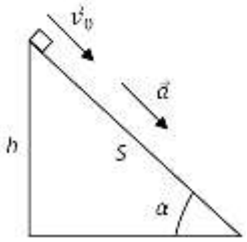
Решение

Найдем пройденный путь как площадь прямоугольного треугольника. Один из катетов имеет длину 10 (t=10 с), второй катет – 20 (v=20 м/с).

Площадь данного треугольника равна $S = \frac{1}{2}vt = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 10 = 100$ м.

Пример 3

На соревнованиях саночник, разогнавшись, начал движение вниз со скоростью 5 м/с. Угол наклона горы к горизонту 30°. Через 10 секунд он пересек финишную черту, находящуюся на 75 м ниже уровня старта. С каким ускорением катился спортсмен? Ответ дать в СИ. Движение считать равноускоренным.



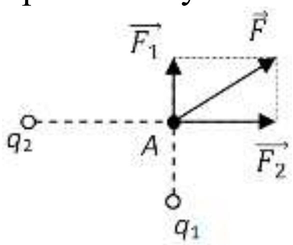
Решение

Пройденный путь $S = v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$ найдем как гипотенузу треугольника: $S = \frac{h}{\sin\alpha} = \frac{75}{\sin 30^{\circ}} = 150$ м.

Тогда $a = \frac{2(S - v_0 \cdot t)}{t^2} = \frac{2(150 - 5 \cdot 10)}{10^2} = 2$ м/с^2.

Пример 4

Заряд A находится в электрическом поле двух одноименных с ним зарядов. Силы, действующие на заряд A перпендикулярны, а модули этих сил соответственно равны 3 Н и 4 Н. Определить равнодействующую силу, приложенную к заряду A.



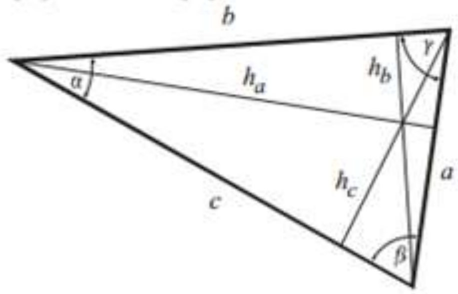
Решение

Согласно принципу суперпозиции электрических полей

$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Из рисунка можно видеть, что имеется два катета E_1 и E_2 и гипотенуза E. Тогда по теореме Пифагора:

$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ Н.

1.3 Остроугольный треугольник

	h_a, h_b, h_c – высоты, опущенные на соответствующие стороны (основания) *a*, *b*, *c*.
Площадь треугольника	$S=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ab\sin\gamma=\frac{1}{2}bc\sin\alpha=\frac{1}{2}ac\sin\beta$ *половина произведения длины стороны треугольника на высоту, проведенную к этой стороне*
Теорема синусов	*Отношения сторон треугольника к синусам противолежащих углов равны:* $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$
Теорема косинусов	*Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними:* $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha,\quad a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos\alpha};$ $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta,\quad a=\sqrt{a^2+c^2-2ac\cos\beta};$ $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma,\quad a=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}.$

1.4 Тригонометрический круг

Знаки *sin*, *cos* и *tg*, *ctg* в разных четвертях тригонометрического круга можно видеть на рисунке 1.1.

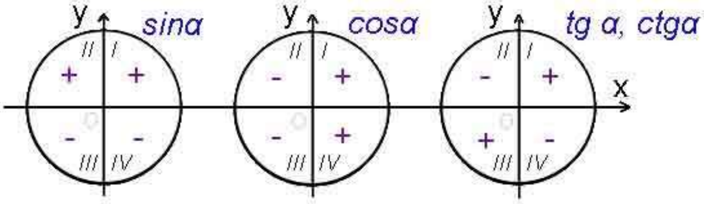


Рисунок 1.1 – К определению знаков тригонометрических функций

На тригонометрическом круге (круге единичного радиуса) (рис. 1.2) можно видеть геометрический смысл синуса и косинуса. Они равны длине катетов прямоугольного треугольника с гипотенузой единичной длины.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

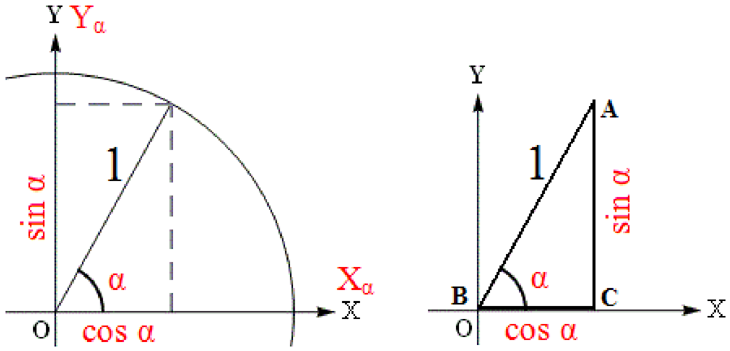


Рисунок 1.2 – Тригонометрические функции синус и косинус как катеты прямоугольного треугольника с гипотенузой единичной длины

Кроме того, рассмотрение треугольника ACB (рис. 1.2), и применение к нему теоремы Пифагора, позволяет получить основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

1.5 Синусы и косинусы углов, кратных 30° и 45°

Функция	**Аргумент *t***															
	0 и 2π 360^0	$\frac{\pi}{6}$ 30^0	$\frac{\pi}{4}$ 45^0	$\frac{\pi}{3}$ 60^0	$\frac{\pi}{2}$ 90^0	$\frac{2\pi}{3}$ 120^0	$\frac{3\pi}{4}$ 135^0	$\frac{5\pi}{6}$ 150^0	π 180^0	$\frac{7\pi}{6}$ 210^0	$\frac{5\pi}{4}$ 225^0	$\frac{4\pi}{3}$ 240^0	$\frac{3\pi}{2}$ 270^0	$\frac{5\pi}{3}$ 300^0	$\frac{7\pi}{4}$ 315^0	$\frac{11\pi}{6}$ 330^0
$\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\text{tg}\, t$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\text{ctg}\, t$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$

1.6 Основные тригонометрические формулы

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x \qquad \sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \qquad \cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$1 + \mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad \sin(x \pm y) = \sin x\cos y \pm \cos x\sin y$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \qquad \cos(x \pm y) = \cos x\cos y \mp \sin x\sin y$$

1.7 Основное тригонометрическое тождество

Основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \qquad (1.1)$$

Замечательнейшее тригонометрическое выражение, представляющее собой теорему Пифагора для треугольника, гипотенуза которого равна единице, а катеты по модулю равны синусу и косинусу одного из углов, прилежащих к гипотенузе.

Данное тождество незаменимо при решении треугольников. Однако, стоит обратить внимание на то, что применение тождества может быть очень полезным при решении систем двух уравнений, одна из неизвестных которых является аргументом синуса и/или косинуса.

Приведем пример из механики. Известно, что электрически заряженная частица, влетая в магнитное поле, в общем случае начинает двигаться по винтовой траектории (спирали). Геометрическими характеристиками винтовой линии являются ее радиус и шаг. В рассматриваемом случае радиус и шаг задаются следующими выражениями:

$$R = \frac{mv\sin\alpha}{qB}, \qquad (1.2)$$

$$h = \frac{2\pi mv\cos\alpha}{qB}. \qquad (1.3)$$

Пусть неизвестными в выражениях (1.2) и (1.3) являются только скорость частицы v и угол α между векторами скорости и магнитной индукции B.

Очевидно, что данная система уравнений не является линейной и стандартный метод решения, при котором одна величина выражается из первого уравнения и подставляется во второе, здесь малопригоден. Вот тут-то и поможет основное тригонометрическое тождество. Приведем решение данной системы с его помощью.

Из выражений (1.2) и (1.3), соответственно,

$$\sin\alpha = \frac{qBR}{mv}, \tag{1.4}$$

$$\cos\alpha = \frac{qBh}{2\pi mv}. \tag{1.5}$$

Т.к. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, то, используя выражения (1.4) и (1.5), после несложных алгебраических преобразований получим

$$v = \frac{qB}{m}\sqrt{R^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}}. \tag{1.6}$$

Таким образом, найдя скорость частицы, далее, используя выражения (1.4) или (1.5), можно найти угол α:

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{qBR}{mv}\right). \tag{1.7}$$

1.8 Тригонометрические функции и гармонические колебания

Ряд применений тригонометрических функций (sin x - синус, cos x - косинус, tg x - тангенс) в физике рассмотрен в других разделах. Например, «Прямоугольный треугольник», «Проекции векторов», «Основное тригонометрическое тождество».

В данном разделе будет рассмотрено: 1) одно из свойств тригонометрических функций, а именно, их *периодичность*; 2) *формулы приведения*, являющиеся следствием свойств тригонометрических функций; 3) элементы раздела физики, где ярка выражена периодичность и находят применение формулы приведения, *гармонические колебания*.

1.8.1 Периодичность тригонометрических функций

Периодическая функция — функция, значения которой повторяются через некоторый определенный интервал аргумента, т.е. не меняющая своего значения при добавлении к аргументу некоторого фиксированного ненулевого числа (**периода** функции) на всей области определения.

Другими словами, функция называется периодической, если существует такое число $T\neq 0$ (период), что на всей области определения функции выполняется равенство

$$f(x) = f(x + nT), \tag{1.8}$$

гдеn - любое целое число.

Тригонометрические функции являются периодическими и их период равен T=2π (рис. 1.3).

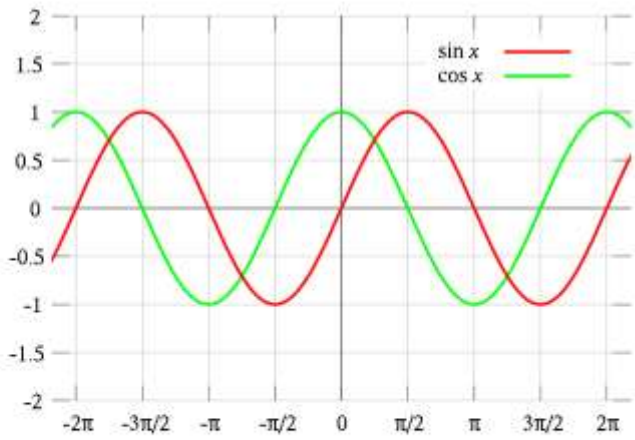


Рисунок 1.3 – Графики синуса и косинуса, периодических функций с периодом T=2π

1.8.2 Формулы приведения

Из свойств синуса и косинуса (в частности, совпадение их периодов и областей значений) следует, что синус легко «превратить» в косинус, а косинус – в синус. По сути синус и косинус – это одна и та же функция, со смещением по оси аргумента на четверть периода $T/4=\pi/2$ (см. рис. 1.3).

При смещении функции на полпериода $T/2=\pi$ функция не меняется (синус остается синусом, косинус – косинусом). Однако в этом случае изменяется знак функции.

Отметим, что данные свойства справедливы и для тангенса с котангенсом.

Исходя из вышесказанного,

$$f(n\pi+\alpha)=\pm f(\alpha), \tag{1.9}$$

$$f(n\pi-\alpha)=\pm f(\alpha) \tag{1.10}$$

$$f\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}+\alpha\right)=\pm g(\alpha), \tag{1.11}$$

$$f\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}-\alpha\right)=\pm g(\alpha). \tag{1.12}$$

Здесь f — любая тригонометрическая функция, g — соответствующая ей кофункция (то есть косинус для синуса, синус для косинуса, тангенс для котангенса, котангенс для тангенса, секанс для косеканса и косеканс для секанса), n — целое число. Перед полученной функцией ставится тот знак, который имеет исходная функция в заданной координатной четверти при условии, что угол α острый, например:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha\,.$$

Таблица 1.1 – Некоторые формулы приведения

β	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\pi-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$2\pi-\alpha$
$\sin\beta$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\beta$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\mathrm{tg}\beta$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$
$\mathrm{ctg}\beta$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$

1.8.3 Гармонические колебания

Гармонические колебания — колебания, при которых физическая (или любая другая) величина изменяется с течением времени по синусоидальному или косинусоидальному закону. Кинематическое уравнение гармонических колебаний имеет вид

$$x(t) = A\sin(\omega t+\varphi) \qquad (1.13)$$

или

$$x(t) = A\cos(\omega t+\varphi), \qquad (1.14)$$

где x — смещение (отклонение) колеблющейся точки от положения равновесия в момент времени t; A — амплитуда колебаний (максимальное отклонение колеблющейся точки от положения равновесия); ω — циклическая частота, величина, показывающая число полных колебаний происходящих в течение 2π секунд; $(\omega t+\varphi)$ — фаза колебаний в момент времени t, φ — начальная фаза колебаний (при t=0).

Отметим, что для синуса и косинуса в (1.13) и (1.14), как периодических функций, период равен 2π (рис.1.3). Однако, говоря о периодических колебаниях, как о некотором повторяем процессе, происходящем во времени, под периодом понимается минимальный промежуток времени, по истечении которого физическая величина повторяет свое значение (рис. 1.4). Другими словами, справедливо, например, равенство

$$x(t) = A\sin(\omega t+\varphi) = A\sin[\omega(t+nT)+\varphi]. \qquad (1.15)$$

Нетрудно увидеть, что период гармонических колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad (1.16)$$

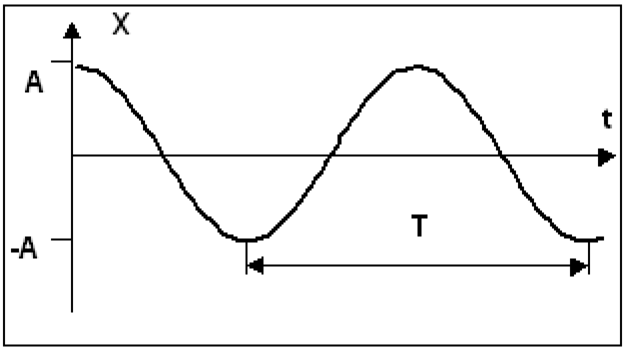


Рисунок 1.4 – Гармоническое колебание и его период

Согласно формулам приведения, гармоническое колебание можно записать как через синус, так и через косинус. Например,

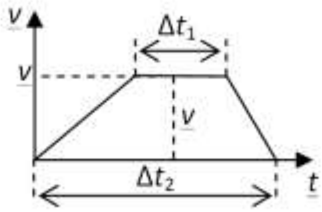
$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi) = A\cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right). \quad (1.17)$$

1.9 Площади фигур

Часто при решении задач механики необходимо нахождение площадей некоторых поверхностей. Например,
1) Давление

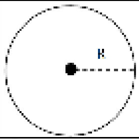
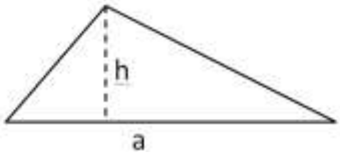
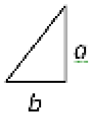
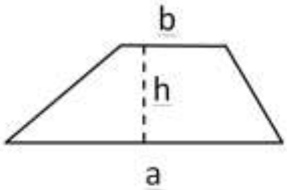
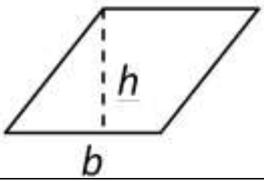
$$p = \frac{F}{S}.$$

2) Расчет пути, пройденного телом, как площади фигуры на графике зависимости скорости от времени.



Например. Зависимость скорости от времени задана графиком. Тогда путь, пройденный телом за все время движения, найдем как площадь трапеции. Таким образом, путь $S = \frac{\Delta t_1 + \Delta t_2}{2} \cdot v$.

Таблица 1.2 – Площади некоторых простых фигур

Название	Изображение	Площадь
Окружность		πR^2
Треугольник		$\frac{1}{2}ah$ половина произведения длины стороны треугольника на высоту, проведенную к этой стороне
Прямоугольный треугольник		$\frac{1}{2}ab$ половина произведения катетов
Трапеция		$\frac{a+b}{2}\cdot h$ произведение полусуммы оснований на высоту трапеции
Параллелограмм		bh произведение стороны на высоту, проведенную к ней

1.10 Объемы тел

При решении задач механики часто необходимо нахождение объемов тел. Например, для нахождения массы (или плотности) тел; при нахождении выталкивающей силы, действующей на погруженное в жидкость тело; при решении задач на плавание тел и др.

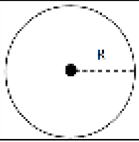
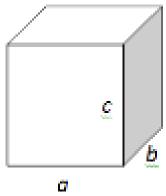
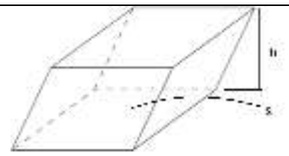
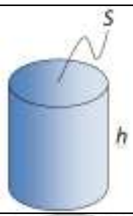
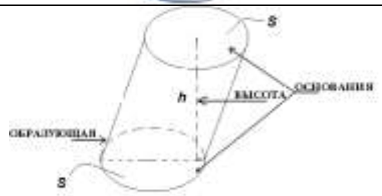
1) Плотность

$$\rho = \frac{m}{V}.$$

2) Сила Архимеда

$$F_A = \rho_{ж} g V_{погр}.$$

Таблица 1.3 – Объемы некоторых простых тел

Название	Изображение	Объем
Шар (сфера)		$\frac{4}{3}\pi R^3$
Параллелепипед прямоугольный		abc - произведение ширины, длины и высоты или $S \cdot c$ - произведение высоты на площадь основания $S=ab$
Параллелепипед общего вида		$S \cdot h$ - произведение высоты h на площадь основания S
Цилиндр прямой (основание – окружность)		$S \cdot h$ - произведение площади основания на высоту
Цилиндр общего вида (основание – любая плоская фигура)		$S \cdot h$ - произведение площади основания на высоту

2. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

2.1 Проекции векторов

При решении задач механики практически всегда приходится оперировать с векторными величинами. Численное же решение задач возможно при работе со скалярными величинами. Переход от векторной формы представления физической величины к скалярной осуществляется путем проецирования векторов на соответствующие оси координат.

Определение проекции вектора на прямую дадим, представив вектор направленным отрезком (AB на рисунке 2.1) . Тогда на прямую можно спроектировать его начало и его конец (A и B на рисунке 2.1, соответственно), и направленный отрезок от проекции начала к проекции конца исходного вектора даст его проекцию ($\alpha\beta$ на рисунке 2.1) на прямую.

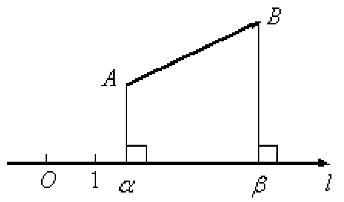
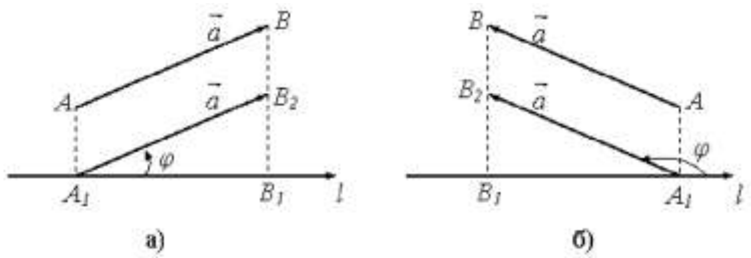


Рисунок 2.1 – Ортогональная проекция вектора *AB* на луч *l*

Проекцией вектора на некоторое направление традиционно называют число, совпадающее по абсолютной величине с длиной проекции этого вектора на прямую, определяющую это направление (на рисунке 2.2 направление задается лучом *l*). Знак этого числа выбирается так, что оно считается положительным, когда направление этой проекции совпадает с данным направлением (рис. 2.2а), и отрицательным, когда направление противоположно (рис. 2.2б).



$A_1B_1 = AB \cdot \cos\varphi$ $\qquad$ $A_1B_1 = AB \cdot \cos\varphi$

$\cos\varphi > 0 \Rightarrow A_1B_1 > 0$ $\qquad$ $\cos\varphi < 0 \Rightarrow A_1B_1 < 0$

Рисунок 2.2 – Нахождение проекции вектора

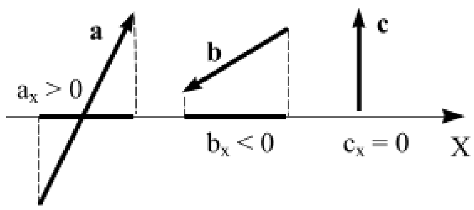


Рисунок 2.3 - Примеры положительной, отрицательной и нулевой проекции
векторов **a**, **b** и **c**, соответственно, на ось X

Пример 1. Движение тела, брошенного под углом к горизонту

Иногда в механике криволинейное движение удобнее и проще рассматривать как комбинацию прямолинейных движений. С этой точки зрения движение тела, брошенного под углом к горизонту, представляет собой комбинацию равномерного прямолинейного движения вдоль горизонта (при малости сопротивления воздуха) и равноускоренного прямолинейного движения по вертикали (рис. 2.4).

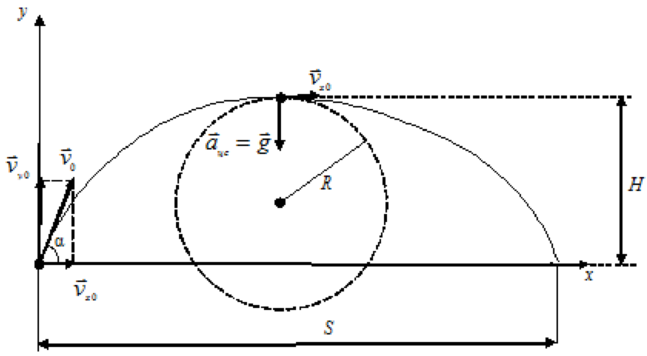


Рисунок 2.4 – Движение тела, брошенного под углом к горизонту, по параболической траектории

В рассматриваемом случае выражения для проекций вектора скорости имеют вид:

$$v_x = v_0 \cos\alpha,$$
$$v_y = v_0 \sin\alpha - gt.$$

Пример 2. Движение тела по наклонной плоскости

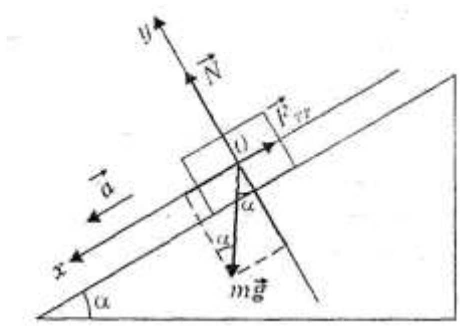


Рисунок 2.5 – Силы, действующие на тело, движущееся с ускорением вниз

Уравнение движения в векторном виде имеет вид:

$$m\vec{a} = \vec{F}_{TP} + \vec{N} + m\vec{g}\ .$$

При решении задачи векторное уравнение преобразуют в систему скалярных уравнений. Для этого уравнение записывается в проекциях на взаимно независимые (ортогональные оси). В рассматриваемом примере:

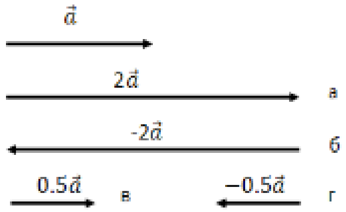
$$Ox:\quad ma = -F_{TP} + mg\sin\alpha;$$
$$Oy:\quad 0 = N - mg\cos\alpha.$$

2.2 Умножение вектора на скаляр

Умножение вектора $\vec{a}$ на скаляр m даёт **вектор**, модуль которого в m раз отличается от модуля вектора $\vec{a}$, и направленный в сторону $\vec{a}$, если m>0 и в противоположную, если m<0. Символически эта операция записывается в виде равенства, например,

$$\vec{c} = m\vec{a}\ . \qquad (2.1)$$

Рисунок иллюстрирует эту операцию.



(а – увеличение длины в 2 раза без изменения направления, m=2>0;
б – увеличение длины в 2 раза с изменением направления на противоположное, m=-2<0;
в – уменьшение длины в 2 раза без изменения направления, m=0.5>0;
г – уменьшение длины в 2 раза с изменением направления на противоположное, m=-0.5<0)

Рисунок 2.6 –Примеры умножения вектора на скаляр

Пример 1

<u>Второй закон Ньютона</u>: *сила, действующая на тело, равна произведению массы тела на сообщаемое этой силой ускорение*:

$$\vec{F} = m\vec{a}\,. \qquad (2.2)$$

Смысл же второго закона Ньютона заключается в том, что *действующие на тело силы определяют изменение скорости тела (ускорение), а не скорость тела*:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}\,. \qquad (2.3)$$

В математической записи второго закона Ньютона (2.2)-(2.3) мы видим операцию умножения вектора на скаляр (2.1). Т.к. масса тела m – величина положительная, то можно утверждать, что *вектора силы и ускорения имеют одинаковое направление* (рис. 2.7).

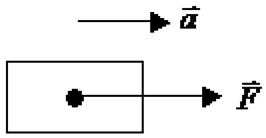


Рисунок 2.7 – Сила – причина ускоренного движения.

Пример 2

<u>Напряженность электрического поля</u> $\vec{E}$ – силовая характеристика электрического поля; векторная величина, определяемая отношением силы, действующей на неподвижный положительный заряд q, помещенный в данную точку поля, к величине этого заряда:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}\,. \qquad (2.4)$$

Из выражения (2.4) можно видеть, что направление вектора напряженности совпадает с направлением силы электростатического взаимодействия, действующей со стороны поля на положительный заряд (рис.2.8а). В случае отрицательного заряда – направления векторов силы и напряженности взаимно противоположны (рис. 2.8б).

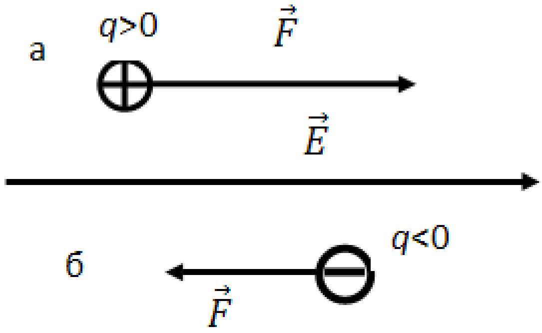


Рисунок 2.8 – Действие электрического поля на электрический заряд

2.3 Сумма векторов

Известно, что физические величины бывают *скалярными* (характеризующимися только числовым значением) и *векторными* (кроме числового значения имеют также направление). Примерами скалярных величин могут служить, например, масса, объем, путь и т.д. Примеры векторных величин: скорость, сила, напряженность электрического поля, индукция магнитного поля и т.д.

В физике существует, так называемый, *принцип суперпозиции*. Заключается он в следующем. Если имеется система объектов, характеризуемая каким-либо физическим свойством, то соответствующая физическая величина может быть найдена как сумма значений этой величины для каждого объекта системы в отдельности. Т.е. другие объекты системы не влияют на свойства рассматриваемого тела. Поэтому принцип суперпозиции, другими словами - это *принцип независимости*.

Принцип суперпозиции в физике применяется, например, для сил, напряженности электрического поля, индукции магнитного поля и др. Указанные величины являются векторными, поэтому суммировать их надо векторно (или, другими словами, геометрически).

Вспомним правила сложения векторов и приведем пример из механики.

2.3.1 Правило треугольника

Правилом треугольника сложения векторов называется следующий способ: Пусть есть произвольные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Надо от конца вектора $\vec{a}$ отложить вектор $\vec{b}$, равный вектору $\vec{b}$. Тогда вектор, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец совпадет с концом вектора $\vec{b}$, будет суммой $\vec{a}+\vec{b}$.

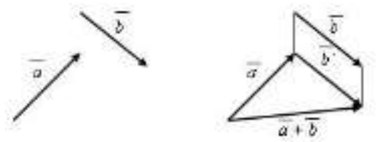


Рисунок 2.9 – Правило треугольника

2.3.2 Правило параллелограмма

Правилом параллелограмма сложения векторов называется следующий способ:
Пусть есть векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, у которых начала векторов совпадают, а концы не совпадают.

Достроим данный угол до параллелограмма, так что $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

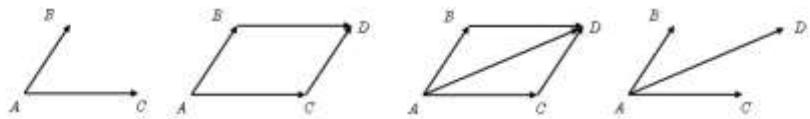


Рисунок 2.10 – Правило параллелограмма

Тогда $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$, а т.к. $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}$, то $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$.

2.3.3 Пример применения в механике

Принцип суперпозиции сил. Равнодействующая сил

Если на тело действует одновременно несколько сил $\vec{F}_i$, то их совокупное действие на тело эквивалентно действию одной силы $\vec{F}_R$, равной векторной (геометрической) сумме всех действующих на тело сил (см. рис. 2.11):

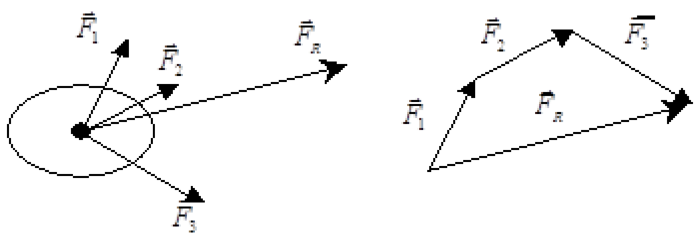


Рисунок 2.11 – Суперпозиция сил

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i . \qquad (2.11)$$

<u>Равнодействующая сила</u> $\vec{F}_R$ - это сила, которая производит на тело такое же действие, какое производит на него совокупность сил.

При сложении сил (рис. 2.11) применено правило треугольника (многоугольника).

2.4 Скалярное произведение векторов

Скалярное произведение векторов - это операция над двумя векторами, результатом которой является число (не вектор).

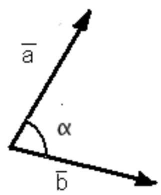


Рисунок 2.12 – Перемножаемые вектора

Определяется и записывается скалярное произведение следующим образом:

$$(\vec{a},\vec{b}) = a \cdot b \cdot \cos\alpha\,, \tag{2.12}$$

или

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos\alpha\,, \tag{2.13}$$

Пример

<u>Работа *A* постоянной силы</u> $\vec{F}$ - скалярная физическая величина, равная произведению модулей силы и перемещения, умноженному на косинус угла α между векторами силы $\vec{F}$ и перемещения $\vec{S}$:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{S} = FS\cos\alpha. \tag{2.14}$$

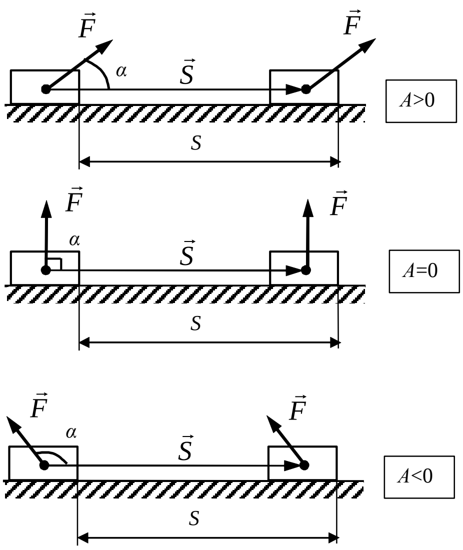


Рисунок 2.13 – Движение тела под действием силы

2.5 Векторное произведение

Векторным произведением векторов называется вектор, перпендикулярный сомножителям, направленный так, что с его конца *кратчайший поворот от первого сомножителя ко второму виден происходящим против часовой стрелки* (рис. 2.14).

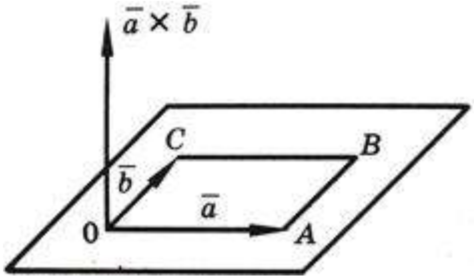


Рисунок 2.14 – Векторное произведение

Модуль векторного произведения равен произведению модулей сомножителей и синуса угла между векторами:

$$\vec{c} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \vec{a} \times \vec{b}; \quad |\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right). \qquad (2.15)$$

Модуль векторного произведения численно равен площади параллелограмма *OABC* (рис. 2.14).

3. ФУНКЦИИ

В математике закон зависимости одной величины от другой принято называть функцией,

$$y=f(x).$$

Зависимую величину (переменную) y называют собственно *функцией*, а независимую x – *аргументом* функции.

Некоторые свойства функций:

1) возрастание – убывание;
2) линейность – нелинейность.

Функция является *возрастающей*, если при увеличении значения аргумента x, значение функции y также увеличивается:

$$\Delta x>0, \quad \Delta y>0.$$

Функция является *убывающей*, если при увеличении значения аргумента x, значение функции y уменьшается:

$$\Delta x>0, \quad \Delta y<0.$$

Функция *линейна*, если изменение значения функция Δy пропорционально изменению аргумента Δx. То есть

$$\Delta y/\Delta x=\text{const}.$$

3.1 Уравнение прямой

Функция вида

$$y = b + a \cdot x, \qquad (3.1)$$

изображенная графически, представляет собой **прямую** (см. рис. 3.1**).** В этом случае говорят, что **зависимость** зависимой (простите за тавтологию) переменной *y* от независимой переменной *x* (аргумента) **линейная**. Выражение (3.1) называется **уравнением прямой**.

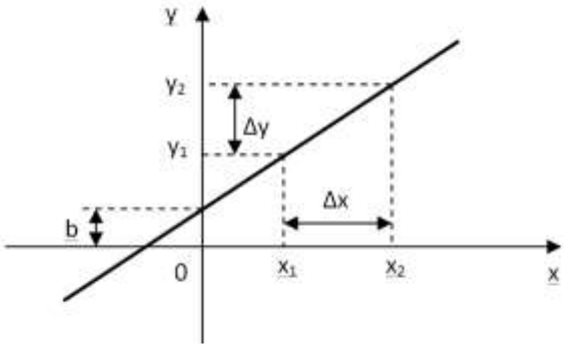


Рисунок 3.1 – График прямой

Угловой коэффициент *a* определяется как

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \qquad (3.2)$$

где $x_{1,2}$ и $y_{1,2}$ - координаты двух произвольных точек на графике зависимости.

Свободный член *b* определяется как длина отрезка, отсекаемого прямой на оси ординат, и равен значению *y* при *x*=0.

Уравнение прямой встречается в механике очень часто. Приведем примеры.

Пример 1

Зависимость координаты материальной точки от времени при равномерном движении

$$x = x_0 + v_x t\,. \qquad (3.3)$$

Сравним данное выражение с уравнением прямой (3.1). Можно видеть, что роль свободного члена здесь играет начальная координата материальной точки x_0, а углового коэффициента – v_x – проекция вектора скорости материальной точки на ось *x*.

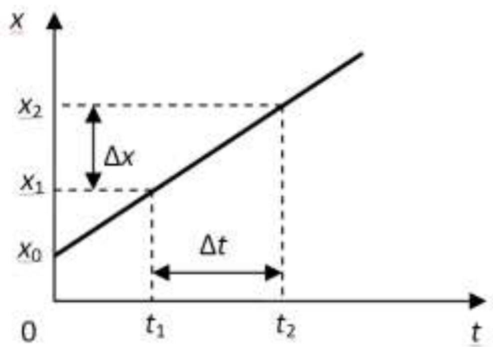


Рисунок 3.2 – Зависимость координаты материальной точки от времени при равномерном движении

Определяем проекцию вектора скорости как угловой коэффициент

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}. \tag{3.4}$$

Пример 2
Зависимость модуля скорости тела от времени при равноускоренном движении

$$v = v_0 + at. \tag{3.5}$$

Сравним данное выражение с уравнением прямой (3.1). Можно видеть, что роль свободного члена здесь играет начальная скорость тела v_0, а углового коэффициента – a – ускорение тела.

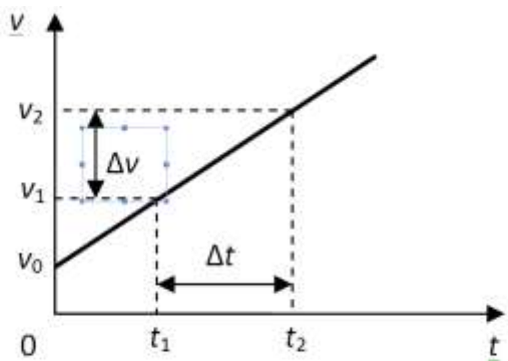


Рисунок 3.3 – Зависимость модуля скорости тела от времени при равноускоренном движении

Определяем ускорение как угловой коэффициент

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}, \tag{3.6}$$

3.2 Парабола

Парабола – кривая второго порядка, является одним из конических сечений (рис. 3.4).

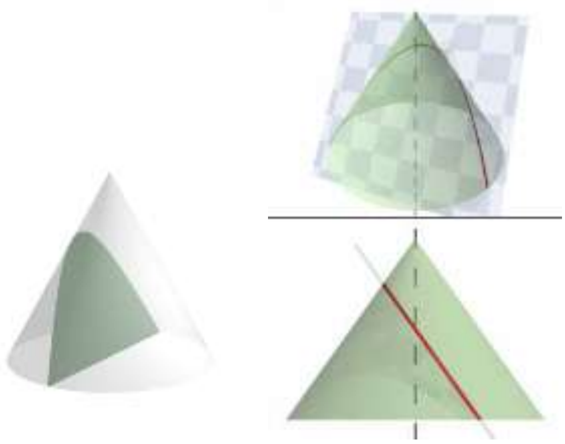


Рисунок 3.4 – Парабола – как коническое сечение

Пример 1. Равноускоренное движение
Зависимость пройденного телом пути S от времени t при равноускоренном движении (с ускорением a) представляет собой квадратичную функцию

$$S = v_0 t + \frac{at^2}{2}, \tag{3.7}$$

где v_0 – начальная скорость тела.
График этой зависимости – парабола.

Рисунок 3.5 – Зависимость пути от времени при равноускоренном движении

Пример 2. Движение тела, брошенного под углом к горизонту
(при пренебрежимо малом влиянии силы трения воздуха)

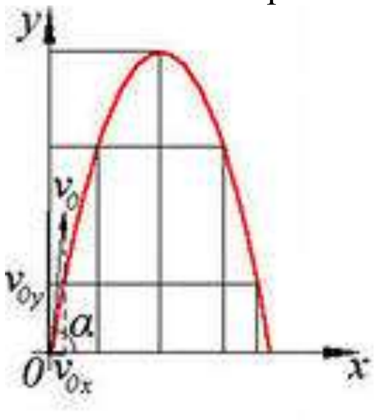


Рисунок 3.6 – Траектория движения тела, брошенного под углом к горизонту

Кинематические уравнения движения (зависимости координат тела от времени) в случае такого движения имеют вид:

$$x = v_x t = v_0 t \cos\alpha \,, \tag{3.8}$$

$$y = v_{y0} t - \frac{gt^2}{2} = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2} \,. \tag{3.9}$$

Уравнение (3.9) является частным случаем выражения (3.7), зависимость координаты y от времени при свободном движении в поле силы тяжести - параболическая.

Более того, в рассматриваемом случае и пространственная траектория движения является параболой (см. рис.3.6).

Уравнение траектории, которое легко получить из системы уравнений (3.8) и (3.9), имеет вид:

$$y = x \cdot \mathrm{tg}\alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x^2 \,. \tag{3.10}$$

Примеры такого рода движения представлены на нижеследующих иллюстрациях.

Рисунок 3.7 – Параболическое движение струй воды

Рисунок 3.8 – Падение баскетбольного мяча

4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

4.1 Физический смысл производной функции

Если s – путь, пройденный телом, а зависимость пути от времени $s(t)$, то производная $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ выражает скорость движения в момент времени t, т.е. мгновенная скорость

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}. \tag{4.1}$$

Например, закон равноускоренного движения материальной точки задан зависимостью

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}, \tag{4.2}$$

где x_0 – начальная координата материальной точки, v_{0x} – проекция начальной скорости материальной точки на ось $0x$, a_x - проекция ускорения материальной точки на ось $0x$. Тогда проекция скорости движения материальной точки на ось $0x$ в момент времени t:

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \left(x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2} \right)' = v_{0x} + a_x t. \tag{4.3}$$

Таким образом, производная функции $y=f(x)$ в точке x определяет *скорость (быстроту) изменения функции в точке x*. Другими словами, это скорость изменения величины y, зависящей от величины x, в ходе некоторого процесса, описываемого зависимостью $y=f(x)$. В этом и состоит *физический смысл производной*.

Рассмотрим в качестве примера функцию $y=x^2$. Производная данной функции $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x$. При x=1 производная равна 2, при x=2 производная равна 4. Это означает, что в точке x=1 функция y меняется быстрее аргумента x в 2 раза, а в точке x=2 - в 4 раза.

Таблица 4.1 – Производные основных элементарных функций

$C' = 0$	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	$(\sin x)' = \cos x$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x' = 1$	$(e^x)' = e^x$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(x^2)' = 2x$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\mathrm{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\mathrm{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\mathrm{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\mathrm{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Отметим также одно их полезных приложений производной при исследовании функций – исследование на возрастание (убывание) и нахождение экстремума (максимума или минимума).

Если на некотором интервале значений аргумента x для функции y=f(x)

$\frac{dy}{dx} > 0$, то функция *возрастает*;

$\frac{dy}{dx} < 0$, то функция *убывает*.

Равенство $\frac{dy}{dx} = 0$ некоторой точке x_0 означает, что точка (x_0,y_0) экстремумом функции на прилегающем к ней интервале аргумента x. Узнать максимум это или минимум можно по знакам производной слева и справа от данной точки. При смене знака с «+» на «-» точка является *максимумом*. В противном случае – *минимумом*.

4.2 Приложения определенного интеграла

Определенный интеграл численно равен площади под кривой рассматриваемой функции f(x) на некотором интервале изменений аргумента x (рис. 3.9). Таким образом, определенный интеграл может использоваться для нахождения площадей поверхностей и объемов тел сложной формы.

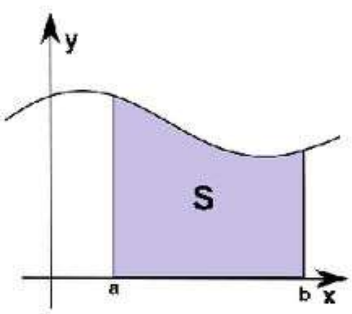


Рисунок 3.9 – Геометрический смысл определенного интеграла

Математически операция интегрирования записывается:

$$S = \int_{\mathrm{a}}^{b} f(x)\mathrm{d}x = P(b) - P(\mathrm{a}), \qquad (4.4)$$

где $P(x)$ – функция, называемая первообразной функции $\mathrm{f}(x)$ и удовлетворяющая условию

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}. \qquad (4.5)$$

В механике в качестве примера можно привести задачу нахождения пути s, проходимого телом за некоторое время t при известном характере зависимости скорости от времени.

Пусть скорость, как функция времени, задана выражением

$$v = v_0 + c_1 t + c_2 t^2,$$

где v_0 (начальная скорость), c_1 и c_2 – некоторые известные константы.

Т.к. $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$, то s является первообразной функции $v(t)$.

Таким образом,

$$s = \int_0^t v(t)\mathrm{d}t. \qquad (4.6)$$

В рассматриваемом примере

$$s = \int_0^t \left(v_0 + c_1 t + c_2 t^2\right)\mathrm{d}t = \int_0^t v_0 \mathrm{d}t + \int_0^t c_1 t \mathrm{d}t + \int_0^t c_2 t^2 \mathrm{d}t =$$

$$= v_0 \int_0^t \mathrm{d}t + c_1 \int_0^t t\mathrm{d}t + c_2 \int_0^t t^2 \mathrm{d}t = v_0 t + c_1 \frac{t^2}{2} + c_2 \frac{t^3}{3}.$$

Итак,

$$s = v_0 t + c_1 \frac{t^2}{2} + c_2 \frac{t^3}{3}.$$

Таблица 4.2 – Первообразные основных элементарных функций

1. $\int dx = x + c$

2. $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \neq -1$

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$

5. $\int \cos x dx = \sin x + c$

6. $\int \sin x dx = -\cos x + c$

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$

9. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + c$

10. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\right| + c$

11. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + c$

12. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + c \\ -\frac{1}{a} arcctg\frac{x}{a} + c \end{cases}$

13. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$

14. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \begin{cases} \arcsin\frac{x}{a} + c \\ -\arccos\frac{x}{a} + c \end{cases}$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c$

17. $\int shxdx = chx + c$

18. $\int chxdx = shx + c$

19. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + c$

20. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + c$