Свойства лексикографически упорядоченного квадрата.

Миронова Юлия Николаевна

ЕФ КНИТУ-КАИ им.А.Н.Туполева, Елабуга, РТ, Россия, mironovajn@mail.ru

1. **Лексикографически упорядоченный квадрат является линейно упорядоченным множеством и содержит наибольший и наименьший элемент.**

Напомним, что

Определение 1. Множество X называется частично упорядоченным, если в нём установлено отношение порядка, удовлетворяющее условию транзитивности: если $x < x'$ и $x' < x''$, то $x < x''$.

Определение 2. Если в данном частично упорядоченном множестве X отношение порядка установлено для любых двух различных элементов, то частично упрядоченное множество называется линейно упорядоченным

Теорема 1. Лексикографически упорядоченный квадрат ([5]) Q является линейно упорядоченным множеством.

Определение 3. Если в данном упорядоченном множестве $a < x < b$, то говорят, что элемент x лежит между элементами a и b. Множество всех элементов x, лежащих между элементами a и b, называется интервалом $]a, b[$ упорядоченного множества X.

Обозначим в пространстве Q точку (0,0) символом $\mathbf{0}$, точку (1,1) - символом $\mathbf{1}$, а любой элемент $(x_1, x_2) \in Q$ - символом x, тогда открытыми множествами в Q являются $]x, y[$, $[0, x)$, $(x, 1]$, где $\mathbf{0} \leq x \leq \mathbf{1}$, $\mathbf{0} \leq y \leq \mathbf{1}$ и всевозможные их пересечения.

Определение 4. Если элемент a частично упорядоченного множества X таков, что $a \leq x \ \forall x \in X$, то a - первый (наименьший) элемент множества X.

Аналогичное определение даётся для наибольшего элемента.

В пространстве Q наименьшим элементом является $\mathbf{0}$, а наибольшим – $\mathbf{1}$.

То есть в пространстве Q имеются наименьший и наибольший элементы.

2. **База топологии пространства Q.**

Интервалы и полуинтервалы $[\mathbf{0}, \propto[$ и $]\beta, \mathbf{1}]$образуют базу некоторой топологии на Q.

Имеется следующая теорема:

Теорема. Пусть X – множество, B - система его подмножеств. B является базой некоторой топологии на X, если выполняются условия:

а. $\bigcup B = X$ (система B является покрытием X);

b. $\forall x \in X$ и $\forall U, V \in B: x \in U \cap V \ \exists W \in B: x \in W \subset U \cap V$.

Условия a и b этой теоремы выполняются для наших интервалов и полуинтервалов. Следовательно, множество всех порядковых интервалов образуют базу некоторой топологии на Q.

3. Существование системы мощности c попарно не пересекающихся интервалов. Несепарабельность.

Рассмотрим интервалы вида $I_x = \{z = (x, y) | 0 < y < 1\}, 0 \leq x \leq 1$. Это вертикальные интервалы. Здесь x пробегает множество всех действительных чисел на $[0,1]$, то есть множество мощности c. Для любых $x_1 \neq x_2$ имеем $I_{x_1} \cap I_{x_2} = \emptyset$. Интервалы являются открытыми множествами в Q.

То есть доказано существование системы не пересекающихся открытых множеств мощности c.

Докажем теперь несепарабельность Q. Напомним, что

Определение 5. $A \subset X$ – всюду плотное множество, если $[A] = X$.

Определение 6. _ – сепарабельно, если в X существует счетное всюду плотное множество.

Рассмотрим произвольное всюду плотное множество $A \subset Q$. В любом из наших интервалов I_x имеется по крайней мере одна из точек множества A. Следовательно, мощность множества A не менее, чем континуум.

Следовательно, пространство Q несепарабельно.

Эти и другие свойства пространства Q можно изучать на семинарах по общей топологии в университетах.

Литература.

1. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. М., «Наука». 1977.
2. Пасынков Б.А. О распространении на отображения некоторых понятий и утверждений, касающихся пространств // Отображения и функторы. М.: Изд-во МГУ, 1984.
3. Миронова Ю.Н. О псевдокомпактных, счетно компактных, локально бикомпактных отображениях и k-отображениях // Сибирский математический журнал. Том 43, №5. Новосибирск, 2002, с. 1115-1129.
4. Миронова Ю.Н. Псевдокомпактность и счетная компактность непрерывных отображений. Монография. М., ИЦ ГОУ МГТУ «СТАНКИН», 2006. – 76 с.
5. Миронова Ю.Н. Пример курсовой работы по общей топологии // Метрическая геометрия поверхностей и многогранников: Международная конференция, посвященная 100-летию

со дня рождения Н.В. Ефимова, Москва; 18-21 августа 2010 г.: Сборник тезисов. М.: МАКС Пресс, 2010, с. 105.