УДК 519.6

Елеуов А.А.
к.ф.-м.н., доцент
Казахский национальный университет имени Аль-Фараби, Алматы, Казахстан
Eleuov@mail.ru

О БАЗИСНОСТИ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ КОРРЕКТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НА ОТРЕЗКЕ

В настоящей работе изложены некоторые результаты теории обратных спектральных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Известно, что более трудными являются обратные задачи для дифференциальных уравнений высших порядков с нераспадающиемися граничными условиями. В данной работе исследуется единственность решения обратной задачи спектрального анализа для дифференциальных уравнений высших порядков с нелокальными граничными условиями. Частный случай указанных граничных условий представляют двухточечные нераспадающие граничные условия. Таким образом, результаты настоящей статьи охватывают как распадающиеся, так и нераспадающие граничные условия. Именно, в этом смысле основной результат настоящей статьи обобщает результаты монографии [1], где приведены подобные теоремы единственности для распадающихся граничных условий.

1. Вначале приведем известные результаты по прямой задаче спектрального анализа дифференциальных операторов высших порядков на отрезке. В работе [2], изложена возможность разложения функции из некоторого функционального пространства по собственным и присоединенным функциями дифференциального оператора L, порожденного в функциональном пространстве $L_2[0,b]$ при $b<\infty$ линейным дифференциальным выражением с переменными коэффициентами

$$Ly=\ell(y)\equiv y^{(n)}(x)+p_{n-2}(x)y^{(n-2)}(x)+....+p_0(x)y(x) \qquad \textbf{(1)}$$

с единственным ограничением

(1) резольвентное множество оператора L – непустое множество. Не умаляя общности, полагаем, что комплексное число 0 принадлежит резольвентному множеству оператора L. Коэффициенты выражения $\ell(.)$ удовлетворяют условию

$$p_0(x)\in C[0,b],\ p_1(x)\in C^1[0,b],....,\ p_{n-2}(x)\in C^{(n-2)}[0,b] \qquad \textbf{(2)}$$

Согласно известной теореме М. Отелбаева [1] область определения такого оператора описывается с помощью набора n функций $\sigma_1(.),....,\sigma_n(.)$ из пространства $L_2[0,b]$

$$D(L)=\{y(x)\in W_2^n[0,b]: y^{(\nu)}(0)=\langle \ell(y)\rangle;\sigma_{\nu+1}>,\nu=0,...,n-1\} \qquad \textbf{(3)}$$

где $W_2^n[0,b]-$пространство С.Л. Соболева, $<f;g>-$скалярное произведение пространства $L_2[0,b]$ Отметим мною указанный факт также можно найти в [3]. Нам удобно ввести граничные формы

$$U_\nu(y)=y^{(\nu-1)}(0)-<\ell(y);\sigma_\nu>,\nu=1,....,n \qquad \textbf{(4)}$$

а также $\{y_1(x,\lambda),....,y_n(x,\lambda)\}$ фундаментальную систему решений однородного уравнения

$$\ell(y)=\lambda y\ ,\ 0<x<b \qquad \textbf{(5)}$$

с условиями Коши в нуле

$$y_k^{(\nu-1)}(0,\lambda)=\delta_{\nu\,k}\ ,\quad \nu=1,....,n$$

где $\delta_{\nu\,k}$ - символ Кронекера.

Обозначим через $\Delta(\lambda)$ характеристический определитель, который определяется по формуле

$$\Delta(\lambda)=\det[U_\nu(y_k)\ ,\nu,k=1,....,n]$$

Введем еще одну функциональную систему решений $\{\chi_k(x,\lambda)\ ,k=1,...,n\}$ однородного уравнения (5) с условиями

$$U_\nu(\chi_k)=\sigma_{\nu\,k}\Delta(\lambda)\quad ,\nu=1,....,n \qquad \textbf{(6)}$$

Заметим [2], что введенные функции $y_k(x,\lambda)\ ,\Delta(\lambda)\ ,\chi_k(x,\lambda)\ ,k=1,....,n$ представляют целые функции экспоненциального типа от λ. Нам понадобиться следующая лемма:

Лемма 1.

Резольвента $(L-\lambda I)^{-1}$ оператора L имеет следующее интегральное представление

$$(L-\lambda I)^{-1} f(x) = (K-\lambda I)^{-1} f(x) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\chi_j(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)} < f; K^*(K^* - \bar{\lambda} I)^{-1} \sigma_j > \qquad \textbf{(7)}$$

где K - оператор, соответствующий нулевым условиям Коши в нуле и порожденный дифференциальным выражением $\ell(.)$, K^* – оператор сопряженный к оператору K.

Доказательство леммы 1.

Обозначим правую часть соотношения (7) через $u(x,\lambda)$. Тогда

$$u(x,\lambda) = u_0(x,\lambda) + \sum_{k=1}^{n} C_k(\lambda) X_k(x,\lambda), \qquad \textbf{(8)}$$

где $u(x,\lambda) = (K-\lambda I)^{-1} f(x)$, $\quad C_j(\lambda) = \dfrac{\langle f, K^*(K^* - \bar{\lambda} I)}{\Delta(\lambda)}$

Поскольку $u_0(x,\lambda)$ – решения задачи Коши, то

$$l(u_0) - \lambda u_0 = f(x) \quad и \quad u_0^{(v)}(0,\lambda) = 0, \quad v = 0,1,.....,n.$$

С другой стороны, функций $\{X_j(x,\lambda),\ j=1,....,n\}$ представляют решения однородного уравнения (5), то правая часть соотношения (8) представляет решение неоднородного уравнения $l(u_0) - \lambda u_0 = f(x)$, $\quad 0 < x < b$. Теперь покажем, что выполняются краевые условия $U_j(u) = 0$, $\quad j = 1,.....,n$. Действительно, рассмотрим при $j = 1,.....,n$.

$$U_j(u) = U_j(u_0) + \sum_{k=1}^{n} C_k(\lambda) U_j(x_k) = \left| из\,(3')\,и\,(4')\,следует \right| = -\langle l(u_0), \delta_j \rangle + C_j \Delta(\lambda) =$$

$$-\langle l(u_0), \delta_j \rangle + \langle f, K^*(K^* - \bar{\lambda} I)^{-1} \delta_j \rangle = \left| заметим, что \quad l(u_0) = K(K-\lambda I)^{-1} f \right| =$$

$$-\langle K(K-\lambda I)^{-1} f; \delta_j \rangle + \langle f, K^*(K^* - \bar{\lambda} I)^{-1} \delta_j \rangle = 0.$$

Что и требовалось доказать.

Пусть λ_s-нуль целой функции $\Delta(\lambda)$ кратности m_s. Стандартным образом введем проектор

$$P_s f(x) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda - \lambda_s| = \delta} (L - \lambda I)^{-1} f(x) d\lambda$$

Лемма 2.

P_s представляет интегральный оператор с ядром

$$P_s(x,\xi) = -\sum_{k=1}^{n}\sum_{\gamma=0}^{n_s-1}\frac{1}{\gamma!}\frac{\partial^\gamma \chi_k(x,\lambda_s)}{\partial\lambda^\gamma}\sum_{\eta=0}^{m_s-\gamma-1}\frac{1}{\eta!}\frac{\partial^\eta M_k(\xi,\lambda_s)}{\partial\lambda^\eta}d_{s,m_s-1-\gamma-\eta},$$

где $M_k(\xi;\lambda) = K^*(K^*-\lambda I)^{-1}\sigma_k(\xi)$

$$d_{s,t} = \frac{1}{t!}\lim_{\lambda\to\lambda_s}\frac{d^t}{d\lambda^t}\left(\frac{(\lambda-\lambda_s)^{m_s}}{\Delta(\lambda)}\right)$$

Доказательство леммы 2.

Заметим, что оператор $P_s f(x)$ представляет вычет операторной функции $(L-\lambda I)^{-1} f$ в полюсе кратности m_s, то есть

$$P_s f(x) = -\operatorname*{res}_{\lambda_s}(L-\lambda I)^{-1} f(x)$$

Поскольку $(K-\lambda I)^{-1} f(x)$ - целая функция от λ, то

$$P_s f(x) = -\operatorname*{res}_{\lambda_s}\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j(x,\lambda)}{\Delta x}\langle f, C^*(K^*-\bar{\lambda} I)^{-1}\delta_j\rangle$$

Вычислим вычет по формуле

$$P_s f(x) = -\lim_{\lambda_s}\frac{1}{(m_s-1)!}\frac{d^{m_s-1}}{d\lambda^{m_s-1}}\left[\frac{(\lambda-\lambda_s)^{m_s}}{\Delta(\lambda)}\cdot x_j(x,\lambda)\langle f, K^*(K^*-\lambda I)^{-1}\delta_j\rangle\right]$$

В результате получим требуемую формулу. Что и требовалось доказать.

Поскольку спектр оператора L дискретен, то найдется неограниченно растущая последовательность $\{R_N\}$ радиусов таких, что на соответствующих окружностях нет точек спектра оператора L. Обозначим соответствующую выбранным окружностям последовательность частичных сумм

$$S_N f(x) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\lambda|=R_N}(L-\lambda I)^{-1} f(x)d\lambda$$

для произвольной функции $f(.)$ из пространства $L_2[0,b]$.

Ясно, что

$$S_N f(x) = \sum_{|\lambda_s| < R_N} P_s f(x)$$

В работе [5] найдены достаточные условия того, что

$$\lim_{N\to\infty} S_N f(x) = f(x), \quad \forall f \in L_2[0,b] \qquad \textbf{(9)}$$

В данной работе дан другой способ доказательства соотношения (9). Здесь наше изложение близко к изложению аналогичных результатов работы [6].
В начале перепишем соотношение (7) в виде

Лемма 3 Резольвента $(L-\lambda I)^{-1}$ оператора L имеет следующее представления

$$(L-\lambda I)^{-1} f(x) = \frac{(-1)^n}{\Delta(\lambda)} \begin{vmatrix} y_1(x,\lambda) & \cdots & y_n(x,\lambda) & (K-\lambda I)^{-1} f(x) \\ U_1(y_1) & \cdots & U_1(y_n) & -\langle f, K^*(K^*-\bar{\lambda} I)^{-1}\delta_j \rangle \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ U_n(y_1) & \cdots & U_n(y_n) & -\langle f, K^*(K^*-\bar{\lambda} I)^{-1}\delta_n \rangle \end{vmatrix} \qquad \textbf{(10)}$$

Доказательство леммы 3.
Правая часть соотношения (10) совпадает с правой части соотношения (7). Действительно, разложим по последнему столбцу определитель из (10). В результате имеем

$$(L-\lambda I)^{-1} f(x) = \frac{(-1)^n}{\Delta(\lambda)} \{(-1)^{n+2}\Delta(\lambda)(K-\lambda I)^{-1} f(x) + \cdots$$

$$-\sum_{j=2}^{n+1} (-1)^{n+1+j} < f, K^*(K^*-\bar{\lambda} I)^{-1}\sigma_{j-1} > \begin{vmatrix} y_1(x,\lambda) & \cdots & y_n(x,\lambda) \\ U_1(x,\lambda) & \cdots & U_1(y_n) \\ U_2(y_1) & \cdots & U_2(y_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ U_{j-2}(y_1) & \cdots & U_{j-2}(y_n) \\ U_j(y_1) & \cdots & U_j(y_n) \\ U_{j+1}(y_1) & \cdots & U_{j+1}(y_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ U_n(y_1) & \cdots & U_n(y_n) \end{vmatrix}$$

Из того, что

$$\chi_j(x,\lambda)=\begin{vmatrix} U_1(y_1) & \cdots & U_1(y_n) \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ U_{j-1}(y_1) & \cdots & U_n(y_{j-1}) \\ y_1(x,\lambda) & \cdots & y_n(x,\lambda) \\ U_{j+1}(y_1) & \cdots & U_{j+1}(y_n) \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ U_n(y_1) & \cdots & U_n(y_n) \end{vmatrix}$$

Следует совпадение формул (7) и (10).

Замечание 1 Если правую часть соотношения (10) переписать в виде

$$(L-\lambda I)^{-1}f(x)=\frac{(-1)^n}{\begin{vmatrix} U_1(y_1) & \cdots & U_1(y_n) \\ U_2(y_1) & \cdots & U_2(y_n) \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ U_n(y_1) & \cdots & U_n(y_n) \end{vmatrix}}\begin{vmatrix} y_1(x,\lambda) & \cdots & y_n(x,\lambda) & (x-\lambda I)^{-1}f(x) \\ U_1(y_1) & \cdots & U_1(y_n) & -\langle f, K^*(K^*-\lambda I)^{-1}\delta_1\rangle \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ U_n(y_1) & \cdots & U_n(y_n) & -\langle f, K^*(K^*-\lambda I)^{-1}\delta_n\rangle \end{vmatrix},$$

то можно заметить, что правая часть не зависит от выбора фундаментальной системы решений $\{y_1(x,\lambda),....,y_n(x,\lambda)\}$. Этим обстоятельством мы воспользуемся в дальнейшем, то есть при вычислении $(L-\lambda I)^{-1}f(x)$ систему $\{y_1(x,\lambda),....,y_n(x,\lambda)\}$ будем выбирать по своему усмотрению.

Замечание 2 Известно [4], что $(K-\lambda I)^{-1}$ представляет интегральный оператор с ядром

$$K(x,\xi)=\sum_{j=1}^{n} y_j(x,\lambda)z_j(\xi,\lambda), \qquad \textbf{(11)}$$

где $\{y_1(x,\lambda),....,y_n(x,\lambda)\}$ - фундаментальная система решений однородного уравнения (5),

$$z_j(\xi,\lambda)=\frac{W_j(\xi,\lambda)}{W(\xi,\lambda)},$$

$$W(\xi,\lambda)=\begin{vmatrix} y_1(\xi,\lambda) & \cdots & y_n(\xi,\lambda) \\ y_1'(\xi,\lambda) & \cdots & y_1'(\xi,\lambda) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}(\xi,\lambda) & \cdots & y_n^{(n-1)}(\xi,\lambda) \end{vmatrix},$$

$W_j(\xi,\lambda)$ – алгебраические дополнения элементов последней строки определителя Вронского $W(\xi,\lambda)$.

Известно, что правая часть соотношения (11) не зависит от выбора фундаментальной системы решений [4].
С этого момента считаем, что граничные функции $\sigma_1,....,\sigma_n$ выбраны из пространства $L_2[0,b]$ таким образом, чтобы граничные формы $U_1(y)$ приняли вид

$$U_j(y) = V_j(y) + <\ell(y);\sigma_j^1(x)>, \qquad \textbf{(12)}$$

где $$V_j(x) = \sum_{k=0}^{n-1}(\alpha_{jk}y^{(k)}(0) + \beta_{jk}y^{(k)}(b))$$

Для этого достаточно чтобы $\sigma_1(x)$ имело представление

$$\sigma_j(x) = \sigma_j^0(x) + \sigma_j^1(x), \qquad \textbf{(13)}$$

где носитель σ_j^1 лежит строго внутри $(0,b)$, $\sigma_j^0(.)-$решение однородного уравнения $\ell^*(y)=0$. Соответствующее формально сопряженному дифференциальному выражению $\ell(y)=0$. В этом случае коэффициенты β_{jk} представляют значения функции $\sigma_j^0(x)$ и её производных в точках $x=b$, а коэффициенты α_{jk} представляют значения функции $\sigma_j^0(x)$ и её производных в точке $x=0$, либо отличается от них на ± 1.
Действительно, согласно формуле Лагранжа [2] имеем

$$\langle l(y);\delta_j^0(x)\rangle = \langle y, l^*(\delta_j(x)) + Q(y(x);\delta_j^0(x)\,|_{x=0}^{x=b} = Q(y(x),\delta_j^0(x)\,|_0^b\rangle$$

где $Q(y,\delta)-$ квадратичная форма вида $\vec{Y}(x)A(x)\vec{\delta}(x)$, $A(x)$ – некоторая матрица,

$$\vec{Y}^T(x) = (y(x), y^1(x),\cdots,y^{(n-1)}(x)), \qquad \vec{\delta}^T(x) = (\delta(x),\delta^1(x),\cdots,\delta^{(n-1)}(x))$$

T – означает транспонирование. Отсюда следует, что $V_j(y) \equiv y_{(0)}^{(j-1)} + \langle l(y),\delta_j^0\rangle = y_{(0)}^{(j-1)} + Q(y(x),\delta_j^0(x)\,|_0^b$.
И так, предполагаем выполненным (12) при $j=1,....,n,$ причем носитель $\sup p\sigma_j^1 \subset (0,b).$ Дополнительно предполагаем, что краевые условия $V_j(y)=0$ $, j=1,...,n$ нормированы и регулярны по Биркгофу [2]. Согласно определению из работы [6] краевые условия (12) называются регулярными, если во всей комплексной плоскости, за исключением кружков радиуса ε с центром в нулях $\Delta(\lambda),$ выполняется оценка

$$|\Delta(\lambda)| \ge c|\Delta_0(\lambda)|, \text{ где } \Delta_0(\lambda) = \det(V_j(y_k), \quad j,k=\overline{1,n})$$

В работе [6] доказаны следующие утверждения

Лемма 4. [6]. Краевые условия $U_j(y)=0, \quad j=1,2...,n$ регулярны тогда и только тогда, когда регулярны по Биркгофу краевые условия $V_j(y)=0, \quad j=1,...,n$.

Лемма 5. [6]. Функция $\Delta(\lambda)$ в случае регулярности краевых условий $U_j(y)=0 \quad , j=1,2...,n$ имеет n серий корней, причем 1-ая серия имеет асимптотику

$\rho_{k,1}=i\pi k+0(1) \quad , k=1,2,.....,$ а другие серии определяются равенствами $\rho_{k,s+1}=\rho_{k1}\exp(2\pi is/n) \quad , s=1,2,....,n-1.$

Здесь $0(1)$ – ограниченная величина при $k\to\infty$.

Доказательства указанных лемм в нашем случае ничем не отличается от доказательств данных в работе [6].

Теперь мы готовы сформулировать основной результат настоящей статьи.

Теорема 1

Система собственных и присоединенных функций оператора L с регулярными краевыми условиями (12), (13) образует базис Рисса со скобками в пространстве $L_2[0,b]$. Более конкретно: любая функция $f(x)\in L_2[0,b]$ разлагается в ряд согласно формуле (9), который безусловно сходится по норме пространства $L_2[0,b]$. В частности, если краевые условия усиленно-регулярны, то система собственных и присоединенных функций оператора L образует базис Рисса в $L_2[0,b]$.

Список литературы

1. Отелбаев М.,Шыныбеков А.Н. О корректных задачах типа Бицадзе – Самарского // Докл. АН СССР.1982. Т. 265, № 4. с. 815-819.
2. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.:Наука. 1969. 528с.
3. Дезин А.А. Дифференциально-операторные уравнения. Метод модельных операторов в теории граничных задач.// Труды МИАН имени В.А.Стеклова. 2000.Т.299.175 с.
4. Кангужин Б.Е., Садыбеков М.А. Дифференциальные операторы на отрезке. Распределение собственных значений. Шымкент. Галым. 1996. 270 с.
5. Кангужин Б.Е. Формулы преобразования и спектральные свойства дифференциальных операторов высших порядков на отрезке // Автореферат дисс. док. физ.-мат. н. 2005. Алматы. КазНУ имени аль-Фараби.45 с.
6. Шкаликов А.А. О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями // Вестник МГУ .Сер. 1. Матем., мех., 1982. Ɣ6. С. 12-21.