СВЯЗЬ ОСЕВОГО МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ПЛОСКОГО СЕЧЕНИЯ С МОМЕНТОМ ИНЕРЦИИ ТЕЛА. ТЕОРЕМА ШТЕЙНЕРА

Кириллов А.М., Сочинский Государственный Университет

http://generalphysics.ru/

29.03.2013

Связь раздела «Механика» курса «Общей физики» и курса «Сопротивление материалов» не подвергается сомнению. Однако, как правило, изучение данных курсов в учебных заведениях соответствующего профессионального образования разнесено во времени. Вследствие этого отсутствует возможность хотя бы частичной их интеграции. Тем не менее, преподавателям «сопромата» необходимо, при возможности, как можно чаще показывать связь их курса с разделом «Механика». От этого «подача» курса только выиграет, материал станет «живее» и менее «оторванным» от реальной жизни.

Часть курса сопромата, рассматривающая геометрические характеристики поперечных сечений тел, представляется нагромождением формул математического анализа и геометрии, и вызывает у большинства студентов только уныние. Данное сообщение показывает связь этой части сопромата с механикой общей физики (т.е. с ранее изученным студентами материалом).

Из динамики вращательного движения твердого тела известно, что момент инерции стержня относительно оси *OO*, перпендикулярной оси стержня и проходящей через его центр тяжести *C* (рис.1), равен

$$I_{OO} = \frac{ml^2}{12} \tag{1}$$

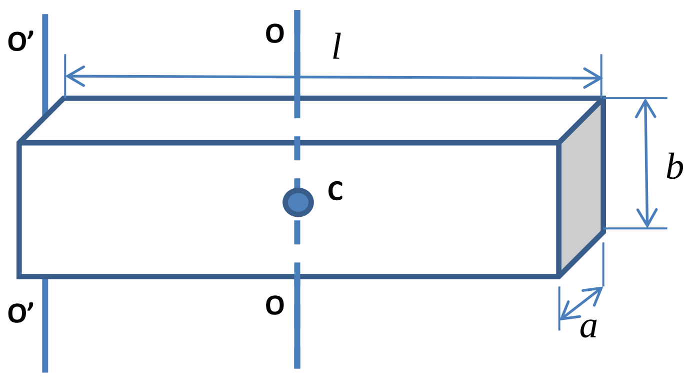

Рисунок 1 – Стержень, его размеры, и оси вращения

Определим массу стержня через плотность его материала и геометрические размеры:

$$m = \rho \cdot V = \rho \cdot (bal). \tag{2}$$

Тогда, подставив (2) в выражение (1) получим

$$I_{OO} = \rho \cdot (bal) \cdot \frac{l^2}{12} = \rho\ a \cdot \frac{bl^2}{12}. \tag{3}$$

В курсе механики твердого тела, например, в сопротивлении материалов [1], рассматриваются геометрические характеристики плоских сечений. Одной из таких характеристик является осевой момент инерции. Так осевой момент инерции для плоского сечения, лежащего в плоскости *xOy* относительно оси *Oy* (рис.2) равен

$$I_{x1} = \int_A y_1^2 dA. \tag{4}$$

Для прямоугольного сечения (рис.2) осевой момент инерции относительно основания:

$$I_{x1} = \int_A y_1^2 dA = \int_0^l y_1^2 b dy_1 = b \int_0^l y_1^2 dy_1 = \frac{bl^3}{3}. \tag{5}$$

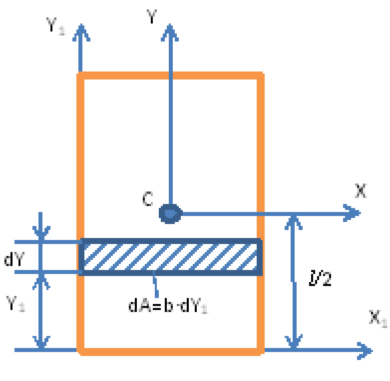

Рисунок 2 – К расчету осевого момента инерции прямоугольного сечения

Найдем момент инерции сечения прямоугольника относительно центральной оси (оси, совпадающей с центром сечения). При переносе оси ближе к центру сечения момент инерции уменьшается:

$$I_x = I_{x1} - \left(\frac{l}{2}\right)^2 A = I_{x1} - \left(\frac{l}{2}\right)^2 bl = \frac{bl^3}{3} - \frac{bl^3}{4} = \frac{bl^3}{12} \qquad (6)$$

В динамике вращательного движения известна теорема Штейнера. Согласно теореме, при параллельном смещении оси вращения твердого тела на расстояние d относительно оси, совпадающей с центром тяжести тела, момент инерции увеличивается на величину md^2 [2]:

$$I_{O'O'} = I_{OO} + md^2. \qquad (7)$$

С учетом выражения (2) и того, что в случае, представленном на рисунке 1, $d=l/2$, соотношение (3) принимает вид:

$$I_{O'O'} = \rho a \left[\frac{bl^3}{12} + \frac{bl^3}{4}\right] = \rho a \frac{bl^3}{3}. \qquad (8)$$

Сравнив формулы (6) и (8), нетрудно заметить, что отличие между ними только в множителе ρa, а выражение (6) является модификацией теоремы Штейнера.

1. В.И. Федосьев. Сопротивление материалов. М.: Наука, 1986 г., 512 с.
2. И.В. Савельев. Механика. Молекулярная физика. т.1. М.: Наука, 1986 г., 432 с.