УДК 531

ФИЛЬТРАЦИЯ ВИБРОУДАРНЫХ ПРОЦЕССОВ ПОСРЕДСТВОМ ДВУМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ФИЛЬТРОВ

© 2013 Крупенин Виталий Львович

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук

Аннотация. *Приведены методы и результаты аналитических исследований задач, связанных с прохождением периодических виброударны процессов через многомерные машинные конструкции, моделируемых посредством дискретных 2D механических систем с регулярными структурами — двумерными механическими фильтрами низших частот. Выяснен физический смысл полученных решений, выведены расчетные формулы и описаны главные динамические эффекты. Введено понятие метрики фильтра.*
Ключевые слова: *регулярные структуры, 2D-виброполя, удары, частотно-временные методы, собственные частоты, фильтры низших частот..*

1. Решение проблем связанных с изучением особенностей прохождения вибрации, сопровождаемой соударениями элементов конструкций, через различные технические объекты представляются весьма важными и актуальными, в частности для создания научных основ проектирования машин. В работе [1] рассмотрены задачи фильтрации виброударных процессов в D фильтрующих системах, элементы которой расположены вдоль некоторой оси. В линейной постановке они рассматривались, в частности, в [2]. Учет соударений элементов конструкций был проведен, в частности, в работах [1, 3-7]. Далее рассмотрены задачи о прохождении периодических виброударного процесса через 2D-механические фильтры низших частот, элементы которых представляют, например, двухмерные решетчатые конструкции.

Для анализа используются решения, получаемые при помощи методов частотно-временного анализа [3,4 7-10]. Итак, рассмотрим решетчатую конструкцию(рис.1) с единственным двусторонним ограничителем. Здесь вместо линейной структуры имеется плоская (решетчатая), составленную из двух взаимно перпендикулярных семейств упругих[11, 12]

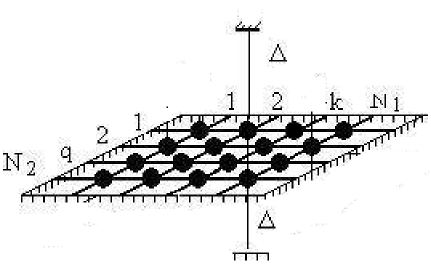


Рис.1

одинаковых линейных струн, образующих прямоугольную конструкцию. Струны защемленны на концах и имеют соответственно длины L_1 и L_2. Каждая струна нумеруется при помощи индексов $k = 0,1,2,., N_1$ и $q = 0,1,2.. N_2$. В вершинах решетки помещены точечные абсолютно твердые тела с одинаковыми массами m.

Предполагается, что прямоугольные ячейки решетки одинаковы, но длины и ширины их сторон, вообще говоря, не равны между собой и сама решетка (дискретный аналог мембраны) - анизотропная. Струнные элементы предполагаются безынерционными. Крепления струн в узлах считаются абсолютно жесткими, а их натяжения - настолько большими, что возможными изменениями при линейных колебаниях можно пренебречь. Пусть каждая «горизонтальная сторона» ячеек имеет длину ΔL_1; «вертикальная» - ΔL_2 . Кроме того, пусть безынерционные «горизонтальные участки» имеют натяжение T_1, а «вертикальные участки» - соответственно T_2.

Динамика решетчатой конструкции описывается посредством N функций прогибов $u_{kq}(t)$, где индексы $k=1,2,..\ N_1$; $q=1,2,..\ N_2$. Каждая из функций $u_{kq}(t)$ изменяется вдоль некоторой оси, перпендикулярной плоскости статического равновесия решетки. Считаем, что первый по счету индекс (в данном случае k) – нумерует струны «слева направо» или наоборот - рис.1, а второй индекс (в данном случае q) – «снизу вверх» или наоборот, рис 1.

Параллельно плоскости статического равновесия решетки на расстоянии вблизи фиксированного узла (k,q) установлен двусторонний ограничитель хода, образованный парой препятствий с которым точечное тело, находящаяся в узле решетки может совершать соударения; удары предполагаются прямыми и центральными.

В данном случае, в предположении Т-периодичности и симметричности процесса, сила удара записывается при помощи симметричных периодических δ-функций Дирака [3, 4]. Обозначив эту силу как $\Phi_0[u_{kq}(t), u_{kqt}(t)]$ имеем:

$$\Phi_0[u_{kq}(t), u_{kqt}(t)]=J\delta^{T/2}(t-t_0).$$

Причем симметричная Т-периодичная δ-функция

$$\delta^{T/2}(t)=-\delta^{T/2}(t+T/2),$$

$$\delta^{T/2}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\delta(t-kT)-\delta\left(t-kT-\frac{T}{2}\right)\right]=\frac{2}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{(2k+1)i\omega t}.$$

В случае двусторонних ограничителей колебания происходят в пределах зазора:

$$u_{kq}(t)\leq|\Delta|;\ 0\leq t<T, \tag{1}$$

Предположение о симметричности системы приводит соотношению $u_{kq}(t)=-u_{kq}(t+{}^{T}/_{2})$. Таким образом, если при $t=t_0$ происходит соударение фиксированного узла с ограничителями [3,4], то, например, для верхнего (рис.1) ограничителя:

$$u_{kq}(t_0)=\Delta_{kq},\ u_{tkq}(t_0-0)=-Ru_{tkq}(t)(t_0+0)<0;\ 0<R\leq 1;\ u_{kq}(t)<\Delta_{kq};\ 0\leq t<{}^{T}/_{2}. \tag{2}$$

Для нижнего ограничителя соотношения (2) соответственно меняются:

$$u_{kq}(t_0)=-\Delta_{kq},\ u_{tkq}(t_0-\underline{0})=-Ru_{tkq}(t)(t_0+0)>0;\ 0<R\leq 1;\ u_{kq}(t)>-\Delta_{kq};\ {}^{T}/_{2}\leq t<T. \tag{3}$$

Здесь и далее нижняя индексация по переменной t означает дифференцирование. Входящее сюда четвертыми неравенства запрещает узлам решетки оказываться «за ограничителями» и накладывает на систему неудерживающие связи, ограничивая конфигурационное пространство системы; R – коэффициент восстановления [3, 4].

2. Пусть силы диссипации, вынуждающие силы, а также любые другие неконсервативные силы, действующие в решетке на каждое из массивных точечных тел – малы. Обозначив их $\varepsilon g_{ij}(t, u_{ij}, u_{tij},\ldots)$, где многоточие обозначает прочие неучитываемые сейчас переменные, ε - малый параметр, модель системы построим следующим образом [2, 11, 12]. Так как каждая частица лежит одновременно на двух струнах, то для всех значений индексов имеем N уравнений:

$mu_{ijtt}+c_1(2u_{ij}-u_{(i-1,j)}-u_{(i+1,j)})+c_2(2u_{ij}-u_{(i,j-1)}-u_{(i,j+1)})=\varepsilon g_{ij}(t, u_{ij}, u_{tij},)+\Phi_{kq}(\varepsilon,u_{ij}, u_{tij}),$ (4)

где функции Φ– сингулярная симметричная обобщенная функция, описывающая ударное взаимодействие в фиксированной ударной паре [3, 4]. При этом предполагается, что удар близок к упругому: $1-R=\varepsilon\rho>0$. Здесь также соответственно обозначено: $c_{1,2}=T_{1,2}/\Delta L_{1,2}$ – коэффициенты упругости. Граничные условия защемления можно записать как ([2, 11, 12]) $u_{ij}=0$, при $i=0;N_1$; $j=0;N_2$. Поэтому $N=(N_1–1)(N_2–1)$. При необходимости сюда могут быть добавлены начальные условия. Однако далее рассматриваются установившиеся режимы движения. И поэтому вид начальных условий - несущественен.

Пусть внешняя сила $\varepsilon g_{ij}(t, u_{ij}, u_{tij},)=-\varepsilon g_{ij}(t+{}^T/_2, u_{ij}, u_{tij},)$- симметрична. Ограничимся здесь линейной моделью трения и синусоидальным возбуждением, приложенным к каждому узлу решетки. Тогда в соответствии с общими алгоритмами частотно-временного анализа виброударных процессов [3, 4, 7-10] для решетчатых систем, учитывая, что в данном случае в систме имеется лишь одна ударная пара, имеем:

$u_{kq,kq}=f_{kq}(t)-J_{kq}\chi_{kq,kq}(t-\varphi_{kq}).$ (5)

$u_{ij,kq}=f_{ij}(t)-J_{ij}\chi_{kq,ij}(t-\varphi_{ij}).$ (6)

Здесь $f_{kq}(t)$ и $f_{ij}(t)$, движения узлов в пренебрежении ударами; J_{kq} и φ_{kq} – импульс и фаза удара в выделенной ударной паре, J_{ij} «амплитудный коэффициент», φ_{ij} – фаза процесса в узле (i,j). Сдвиг между фазами φ_{kq} и φ_{ij} определяются семейством операторов динамической податливости, определяющих модель системы. В работе [12] были построены и семейства операторов динамической податливости $L_{kn,ij}(p)$, и отвечающее им семейство периодических функций Грина (ПФГ) $\chi_{km,ij}(t)$.

С учетом результатов работы [2] было показано следующее.

$$L_{kq,nj}(p)=\zeta\sum_{\alpha=1}^{N_1-1}\sum_{\beta=1}^{N_2-1} sin(k\alpha\pi N_1^{-1})sin(q\beta\pi N_2^{-1})sin(\alpha n\pi N_1^{-1})sin(\beta j\pi N_2^{-1})(\Omega^2_{\alpha\beta}+p^2)^{-1}. \quad (7)$$

Здесь собственные частоты решетки

$$\Omega^2_{kq}=\frac{2T_1}{m\Delta L_1}[1-cos(k\pi N_1^{-1})]+\frac{2T_2}{m\Delta L_2}[1-cos(q\pi N_2^{-1})], \quad (8)$$

Здесь нормировочный коэффициент ζ, в общих случаях удобнее всего вычислять при заданных параметрах системы. В данном случае можно положить: $\zeta=2[(N_1-1)(N_2-1)]^{-2}$. В соответствии с найденным, симметричная ПФГ системы (реакция линейной системы на силовое воздействие) $\delta^{T/2}(t)$ (см. начало п.1.) имеет вид [3,4]

$$\chi_{kq,nj}(t)={}^2/T\sum_{\sigma=-\infty}^{\infty}L_{kq,nj}[i(2\sigma+1)\omega]exp[i(2\sigma+1)\omega]. \quad (9)$$

Причем выражение для $L_{kq,nj}(p)$ определяется формулой (7) или другими эквивалентными выражениями. Например, таким, получающимся после подстановки (7) в (9):

$\chi_{kq,nj}(t)=$

(10)

$$=\,^2/T\,\zeta\sum_{\sigma=-\infty}^{\infty}\exp[i(2\sigma+1)\omega t]\sum_{\alpha=1}^{N_1-1}\sum_{\beta=1}^{N_2-1}\sin(k\alpha\pi N_1^{-1})\sin(q\beta\pi N_2^{-1})\sin(\alpha n\pi N_1^{-1})\sin(\beta j\pi N_2^{-1})\Big/(\Omega^2_{\alpha\beta}-(2\sigma+1)^2\omega^2).$$

Заметим, что в данном случае в уравнениях движения не учтено вязкое трение. Этот учет может быть проделан без труда [3, 4, 9]. Однако определяющие формулы становятся чересчур громоздкими и слабо влияют на окончательные результаты; см. также [9, 10].
Заметим, что для «элементарных» операторов $(\Omega^2_{\alpha\beta}+p^2)^{-1}$ соответствующие ПФГ могут быть записаны не только в виде бесконечных рядов, но и при помощи конечных формул [3, 4, 9]. В данном случае оказывается:

$$\chi_{\alpha\beta}(t)=(2\Omega_{\alpha\beta})^{-1}\sin[\Omega_{\alpha\beta}(t-T/4)]\cos^{-1}(\Omega_{\alpha\beta}T/4), \qquad (11)$$

причем это представление имеет место только при $0\le t<T/2$, а для других всех других значений t необходимо продолжить это представление по периодичности на всю числовую ось учитывая также и условие симметрии $\chi_{\alpha\beta}(t+T/2)=-\chi_{\alpha\beta}(t)$.

Представление (11) должно быть скорректировано при выходе значения аргумента из интервала периодичности или, соответственно, симметрии. Соответствующие формулы здесь не понадобятся и не выписываются [3, 4, 12]. Приведенные представления позволяют существенно упростить (10), так что можно записать:

$$\chi_{kq,nj}(t)=\zeta\sum_{\alpha=1}^{N_1-1}\sum_{\beta=1}^{N_2-1}\sin(k\alpha\pi N_1^{-1})\sin(q\beta\pi N_2^{-1})\sin(\alpha n\pi N_1^{-1})\sin(\beta j\pi N_2^{-1})\chi_{\alpha\beta}(t),\ 0\le t<T/2, \qquad (12)$$

где выражение $\chi_{\alpha\beta}(t)$ определяется при помощи (11). Заметим также, что конечные выражения типа (12) могут быть выписаны и для «элементарного» оператора $(\Omega^2_{\alpha\beta}+2\psi_{\alpha\beta}\Omega_{\alpha\beta}p+p^2)^{-1}$. Сложность записей соответствующих выражений определяет редкость их использования при проведении практических расчетов [3, 4, 10].

Теперь мы имеем все необходимое для построения решений (5), (6).

3. В формулы (5) и (6) входят решения линейных задач $f_{ij}(t)$. В соответствии со сделанным предположением внешние силы $g_{ij}(t)$- T-периодичны и симметричны. В соответствии с соотношениями частотно-временного анализа [2-4] имеем:

$$f_{kq}(t)=\varepsilon\sum\sum\int_0^{T/2}\chi_{kq,nj}(t-s)g_{nj}(s)ds, \qquad (13)$$

где двойное суммирование ведется по всем индексам n и j. В формуле (13) индексы k и q не фиксированы, а свободны. В данном случае, когда к каждому узлу приложена сила из семейства $\{A_{KQ}\cos(\nu t+\varphi_{KQ})\}$, используя формулу (13), находим:

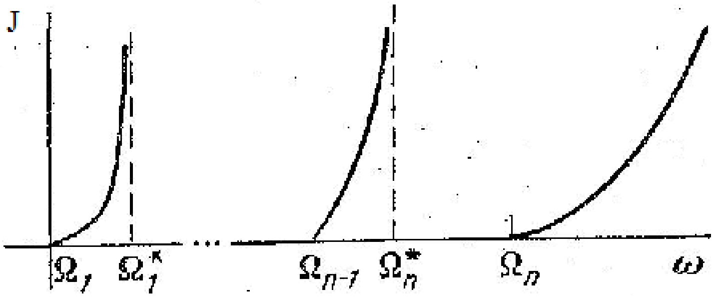
$$f_{kq}(t)=\sum_{(K,Q)}A_{KQ}L_{kq,KQ}(i\nu)\cos(\nu t+\Psi_{KQ}),\quad \Psi_{KQ}=\arg[L_{kq,KQ}(i\nu)]+\varphi_{KQ}. \qquad (14)$$

Импульс и фаза удара - J_{kq} и φ_{kq} определяются из условий (2) и (3). В соотношения для них мы не приводим (см.[2, 12]).

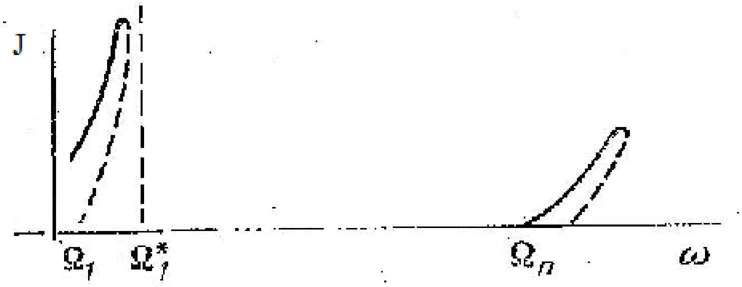
В случае не учета вязкого трения, а при решении задачи фильтрации это вполне допустимо [2, 5], совмещая удар о, например, верхний ограничитель с началом отсчета времени, можно положить $\varphi_{kq}=0$. В результате получаем аналог хорошо известного [3, 4] соотношения:

$$J_{kq}=\Delta/\chi_{kq,kq}(0);\ J_{ij}=J_{kq}. \qquad (15)$$

С помощью соотношения (12) представление (15) можно конкретнее связать с параметрами системы. На рис. 2. Показаны эскизы зависимостей $J(\omega)$ в случае отсутствия трения (15) и при учете вязкого трения [3, 4].



а)



б)

Рис.2

Здесь $n=(N_1-1)(N_2-1)$; семейство частот$\{\ \Omega_k^*\}$-суть простые корни уравнения $\chi_{kq,kq}(\omega;0)=0$.

Рассмотрим теперь вопросы, связанные с фильтрацией систематического ударного воздействия. В работах [8-10] было отмечено, что широкий класс линейных систем обладает свойством фильтра низших частот: высшие гармоники возбуждения хуже воспринимаются ими, чем низшие. В нашей задаче это свойство хорошо видно из следующего рассуждения.

Если $L_{kq,\,kq}\,(p)=O(p^{-2})$, то режим движения $u_{kq}(t)$ непрерывен, но имеет разрывную производную: ряд Фурье, его определяющий, содержит коэффициенты $O(\kappa^{-2})$. Легко показать, что, например, для режимов движения $u_{(k\pm1,q\pm1;\ k\pm1,q\pm1)}(t)$ тел, соседних с фиксированным, определяющие их локальные операторы описываются функциями, которые имеют скорость убывания при $p\to\infty$ уже не меньше, чем $O(p^{-3})$, и, вообще, при удалении от точки взаимодействия скорость убывания функций операторных функций $L_{qj,qj}\ (p)$ при $p\to\infty$ увеличивается: $L_{qj,qj}\ (p)=O(p^{-\alpha})$, где $\alpha=\ 2\ +\ |q\text{-}j|$ В соответствии с этим и соответствующие ПФГ, входящие в представления для законов движения узлов решетки имеют $|q\text{-}j|$ непрерывных производных, и при большом удалении узла от фиксированного двмжение оказывается весьма близким к синусоидальному лишь первая гармоника оказывается существенной. Убедиться в описанном свойстве операторов можно, непосредственно исходя из их записи [2, 12] (с учетом ортогональности матрицы собственных форм линейной системы[Θ_{kq}=$C\sin(kn\pi N_1^{-1})\sin(qj\pi N_2^{-1})$], C=const, которые определяют вид операторов динамической податливости, в данном случае, решетчатых конструкций) или из уравнений движения посредством их дифференцирования. Заметим также, что при достаточно высокой частоте вынуждающей силы подавляться будут даже первые гармоники; удаленные тела вообще могут практически находится в состоянии покоя. Таким образом фильтрация виброударного режима в решетчатых конструкциях аналогична фильтрации в протяженных цепочках: при удалении от соударяющегося тела режимы стремятся к большей гладкости и уменьшаются по амплитуде.

Необходимо заметить, что в решетчатых конструкциях понятие удаленности имеет более сложный смысл, чем в линейных цепочках. Здесь удаленность определяется ячейками решетки на плоскости. Для узла, находящегося в глубине решетки равноудаленными от него оказываются четыре соседних узла. Для приграничных узлов – равноудалены соответственно три узла. Сказанное позволит нам в дальнейшем ввести понятие *метрики механического фильтра.*

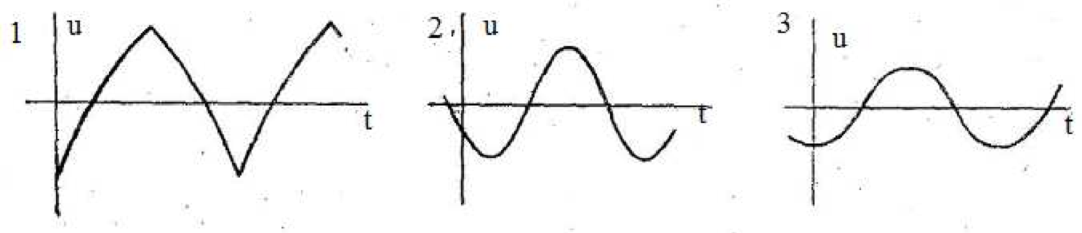


Рис.3.

На рис.7 кривая 1 отвечает виброударному процессу, а две следующих – соответствуют отфильтрованным законам движения.

В дальнейшем проблема фильтрации будет рассмотрена и для виброударных процессов в системах боле высокой размерности.

Отметим. Наконец, что решетчатые конструкции, имеющие несколько ударных элементов [11, 12] также обладают свойствами фильтра, однако анализ здесь усложняется и задача нуждается в самостоятельных рассмотрениях.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты №№ *13-08-01235 а*, *13-08-90419 Укр_ф_а*).

ЛИТЕРАТУРА

1. Крупенин В.Л. К проблеме фильтрации и вибропередачи виброударных процессов: одномерные линейные фильтры// Интернет журнал «Вестник научно технического развития»(www.vntr.ru). -№9 (61), 2012г.-С.22-29.
2. Нагаев Р.Ф., Ходжаев К.Ш. Колебания механических систем с периодической структурой. - Ташкент: ФАН, 1973. – 272 с.
3. Бабицкий В.И., Крупенин В.Л. Колебания в сильно нелинейных системах.-М., Наука,1985. – 384 с.
4. Babitsky V.I.,. Krupenin V.L Vibration of Strongly Nonlinear Discontinuous Systems.- Berlin. Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 2001. –404 p.p.
5. Крупенин В.Л. К теории сильно нелинейных виброводов // Машиноведение.-1987. -№1.-С.25-32.
6. В.Л. Крупенин К проблеме фильтрации и вибропередачи виброударных процессов (часть1) // Интернет-журнал «Вестник научно-технического развития» (http://vntr.ru/ftpgetfile.php?id=605).- № 6 (58).- 2012 г.- С. 21-26

7. Крупенин В.Л. Модель сильно нелинейной вибропроводящей среды с распределенным ударным элементом// ДАН. – 1995/- Т. 343,- №6. -С. 759-763.
8. Широкополосные виброударные генераторы механических колебаний.// Веприк А.М., Featured Вознюк А.Д., Крупенин В.Л., Чирков И. М.- Л: Машиностроение, 1987.-72 с.
9. Крупенин В.Л Периодические движения в семействе упругих систем со взаимодействующими через удары граничными элементами // Проблемы машиностроения и надежности машин,- 2001.- №3. - С.20-28.
10. Крупенин В. Л. О представлении периодических виброударных процессов через параметры движения "импульс-фаза" // Проблемы машиностроения и надежности машин. - 2010. - № 1. - С. 34-42.
11. Крупенин В.Л. Колебания решетчатых двумерных конструкций в присутствии препятствий // ДАН. -2006.- Т. 400.- №2. -С. 1-4.
12. В.Л.Крупенин К описанию виброударных процессов в решетчатых двумерных системах// Интернет-журнал (www.vntr.ru). Вестник научно-технического развития. №1.- 2008. - С.22 –32