

## **Квантовый акселерометр на динамическом эффекте Казимира.**

Квантовая метрология полезная для наземных и космических технологий уже успешно применяется для разработки таких точных инструментов, как часы и датчики, которые, используя квантовые свойства, превосходят классические приборы. Есть продвинутые планы по реализации этих и других квантовых технологий в космическом пространстве. Намереваются реализовать проект космических оптических часов в режимах, в которых относительность начинает влиять на квантовые коммуникации и квантовые часы. Однако, типичные установки не учитывают влияние относительности на квантовые свойства электроники. Чтобы включить и использовать эти свойства электроники, введем метод применения метрологии к квантовой теории поля (КТП). КТП должным образом включает в себя квантовую теорию и теорию относительности, в частности, в режимах, которые имеют место в космических экспериментах. Эта структура обеспечивает высокую точность оценки параметров, появляющихся в КТП включая надлежащее время и ускорение. Более того, методы могут быть применены в разработке нового поколения релятивистской квантовой технологии для гравиметра, часов и датчиков. В качестве примера приведем прецизионное устройство, внедрение которого улучшает квантовые акселерометры, используя релятивистские эффекты. Ширятся ожидания, что квантовые технологии, принесут много ключевых технологических достижений в этом столетии. Эксперименты по квантовой связи быстро развиваются из настольных в космические установки. Так, например, с 2012 года протокол телепортации успешно выполняется на расстоянии в 143 км группой А. Цайлингера [1]. Частично руководствуясь этим успехом, ведущие космические агентства Европы и Канады инвестировали ресурсы в осуществление космических квантовых технологий [2 -4]. Существуют прогрессивные планы использовать спутники для распространения запутанности квантовой криптографии и телепортации (см., например, проект [5]) и для установки квантовых часов в космосе (например, космический проект оптические часы [6]). Тем не менее, на этих масштабах релятивистские эффекты становятся наблюдаемыми. Общая теория относительности обеспечивает эффективное описание Вселенной на больших пространственных масштабах, поэтому наблюдаемые эффекты можно ожидать в режимах, в которых работают спутники. Так, например, в системе глобального позиционирования (GPS), системе спутников, используемых для распространения временного и навигационного сигналов, релятивистские

поправки требуются для точного определения времени и позиций [7]. Передовые эксперименты достигают релятивистских режимов, но влияние гравитации и движения на квантовые технологии в значительной степени неизвестно. Неспособность соединения квантовой теории и общей теории относительности остается одной из самых больших нерешенных проблем в современной физике. Понимание общей теории относительности при малых масштабах длин, где квантовые эффекты стали актуальными является очень нетривиальной задачей, которая страдает от недостатка экспериментальных указаний. Таким образом, альтернативным подходом является изучение квантовых эффектов на больших масштабах, где эксперименты будут в пределах досягаемости в ближайшем будущем [8, 9]. Однако, для того, чтобы использовать квантовые свойства правильно для измерения положения и времени в масштабах, где относительность становится актуальной, необходимо работать в рамках квантовой теории поля, которая обеспечивает описание квантовых полей в связном искривленном пространстве-времени [10]. Это квазиклассическое описание в том смысле, что материя и излучение квантованы, но пространство-время является классическим. В качестве первого шага в этом направлении, было показано, что методы квантовой релятивистской метрологии могут быть применены для измерения эффекта Unruh'a при экспериментально достижимых ускорениях [11 - 13] пригодных для оценки кривизны пространства-времени [14]. Было также показано, что запутывание может быть использована для определения пространственно-временных параметров, таких как скорость расширения Вселенной [15]. Соответствующий подход квантовой теории поля, который включает в себя эффекты квантовой теории и теории относительности, будет способствовать развитию новой генерации квантовых технологий для измерения пространственных переменных. В самом деле, предыдущие работы по релятивистской квантовой информации уже обращались к фундаментальным вопросам о запутанности в квантовой теории поля. Результаты показывают, что гравитация, движение и пространственно-временная динамика могут как создавать, так и ухудшать запутанность [16]. Последние работы [17] показывают, что это означает, что релятивистское движение производит наблюдаемое воздействие на квантовые коммуникации. Эти предварительно полученные результаты имеют большое значение для космических квантовых экспериментов, которые проверяют квантовую теорию в целом в мега масштабах. В работе [50] развивают новый формализм релятивистской квантовой метрологии, включая и используя релятивистские эффекты квантовой оценки параметров. Инфраструктура обеспечивает необходимую методологию, которая будет включать разработку и производство новых

инструментов измерений. В качестве примера можно привести акселерометр с точностью, которая, в принципе превосходит точность достигнутую в передовых экспериментах по обнаружению аномалий силы тяжести в космическом пространстве [18, 19]. Устройство основано на том, что ускорение производит наблюдаемый релятивистский эффект в конденсате Бозе-Эйнштейна (БЭК) [20]. Индуцированное движением преобразование состояния релятивистского фононного поля БЭК позволяет очень точно оценить величину ускорения. В квантовой метрологии используют, в частности, квантовую информацию Фишера [21] для вычисления оптимальной оценки погрешности процедуры. Есть заинтересованность применить метрологические методы определения с высокой точностью параметров, которые появляются в квантовой теории поля, например, ускорения, напряженности гравитационного поля, и надлежащего времени. Для того, чтобы это сделать, начнем с обзора основных понятий квантовой теории поля и формализма ковариационной матрицы. Рассмотрим вещественное скалярное квантовое поле, которое подчиняется уравнению Клейна-Гордона в искривленном пространстве-времени. Удобно расширить поле в дискретное множество режимов [22], так что мы можем представить поле и его преобразования в формализме ковариационной матрицы, который обычно используется в теории квантовой информации и квантовой метрологии с непрерывными переменными. Дополнительную информацию можно получить в [23, 24]. Функции, являющиеся решением уравнения поля, образуют полное множество ортонормированных наборов режимов с учетом выбранного скалярного произведения [10]. Эффект Унру или излучение Унру (англ. Unruh effect) — предсказываемый квантовой теорией поля эффект наблюдения теплового излучения в ускоряющейся системе отсчёта при отсутствии этого излучения в инерциальной системе отсчёта. Другими словами, ускоряющийся наблюдатель увидит фон излучения вокруг себя, даже если неподвижный наблюдатель не видит ничего. Основное квантовое состояние (вакуум) в неподвижной системе кажется состоянием с ненулевой температурой в ускоряющейся системе отсчёта. Эффект был открыт в 1976 году Биллом Унру из Университета Британской Колумбии. Унру показал, что понятие о вакууме зависит от того, как наблюдатель движется сквозь пространство-время. Если вокруг неподвижного наблюдателя находится только вакуум, то ускоряющийся наблюдатель увидит вокруг себя много частиц, находящихся в термодинамическом равновесии, то есть тёплый газ. Эффект Унру произвёл переворот в понимании слова вакуум, так как теперь можно говорить о вакууме только относительно какого-то объекта [10,51]. Другим интересным примером будет то, что происходит с вакуумом в

полости при неинерциальном движении. Вакуумное состояние инерциальной полости заселяется частицами после перехода полости в неравномерно ускоренное движение [26]. Для исследования запутанности используют формализм ковариационной матрицы, которая была очень полезна в квантовой теории поля [24, 27, 28]. В этом формализме фазового пространства гауссовых состояний бозонного поля вся соответствующая информация о состоянии кодируется в первом и втором моментах поля. Формализм ковариационной матрицы позволяет элегантно упростить расчеты. Как было доказано, полезно определить и проанализировать вычислимые меры двух частичной и много частичной запутанности для гауссовых состояний [23, 28]. Каждое унитарное преобразование в гильбертовом пространстве, которое порождено квадратичным гамильтонианом, можно представить как симплектическую  $S$  матрицу в фазовом пространстве. Эволюция во времени поля, а также боголюбовских преобразований, может быть закодирована в этой структуре. Симплектическая матрица, соответствующая преобразованию Боголюбова, может быть записана посредством коэффициентов Боголюбова. Описав состояние поля и его преобразования в формализме ковариационной матрицы можно применить основные инструменты [29] метрологии [21], которые были разработаны для систем непрерывных переменных. Целью квантовой метрологии является обеспечение стратегии определения значений параметров с высокой точностью, когда параметры не являются наблюдаемыми системы. Температура, время, ускорение и напряженность - хорошие примеры. Стратегия соответствует нахождению оптимального начального состояния и измерения в конечном состоянии. Рассмотрим бозонное квантовое поле в плоском пространстве-времени ограниченное неравномерно движущейся полостью. Индуцированное движением изменение квантового поля зависит от величины ускорения. Можно показать, используя упомянутые выше методы, что этот факт может использоваться как принцип работы акселерометра высокой точности и чувствительности. Важно определить точность, с которой ускорение может быть оценено из измерений режимов поля. Анализ проводили в  $(1 + 1)$  - мерном пространстве-времени с сигнатурой метрики  $(- +)$  [50]. Дополнительные поперечные размерности могут быть включены с помощью своих вкладов в эффективную массу в поле, как обсуждалось в [25, 34]. Рассмотрим граничные условия Дирихле на стене полости. Детали выбранных граничных условий немного изменяют количественно особенности модели [34], но не качественно. Физическое воплощение этой установки может быть реализовано оптическими полостями [35], сверхпроводящими

цепями [17], или конденсатами Бозе-Эйнштейна [20]. Исходно полость считается покоящейся, а состояние поля определяется формулой для матрицы ковариаций. В случае общей траектории моды поля (режимы) претерпевают преобразования Боголюбова. Для того, чтобы решать задачу аналитически предположим, что коэффициенты Боголюбова, связывающие начальное и конечное состояния поля можно разложить в ряд по безразмерному параметру из ускорения центра полости, длины полости и скорости распространения возбуждений квантового поля внутри полости. В общем, движение полости может быть произвольной комбинацией сегментов с постоянным ускорением и инерционных движений. Например, мы можем рассмотреть конечный период с постоянным ускорением, повторение сегментов одинаковых траекторий или даже синусоидальное колебание с фиксированной амплитудой [35]. Конкретный вид коэффициентов Боголюбова зависит от траектории полости. Произвольные траектории, состоящие из дискретных интервалов ускоренного движения и движения по инерции, были рассчитаны, например, в [25], в то время как непрерывное движение было рассмотрено в [35]. В последнем случае, непрерывного синусоидального движения с малой амплитудой, возможны два различных вида резонансов. Если частота колебания странным образом соответствует сумме частот двух отдельных мод (режимов), возникает линейный рост с увеличением продолжительности колебаний. Это приводит к резонансному рождению частиц известному как динамический эффект Казимира [26]. Если, с другой стороны, частота колебаний равна разности между частотами двух режимов (мод) необычный резонанс связан с другим коэффициентом (см. [35]). Этими резонансами пользуются для увеличения квантовой информации Фишера в уравнениях. В экспериментальной реализации используют квазиодномерный БЭК [37] с плоской метрикой пространства-времени [38, 39] с граничными условиями жестких стенок [20, 40-42]. Разбавленный БЭК может быть описан в приближении среднего поля с учетом флуктуаций фазы и разложением по так называемым модам Боголюбова. Моды с частотами значительно ниже частот, связанных с толщиной слоя конденсата от его нулевой плотности на стене полости до постоянной в объеме [52], подчиняются без массовому уравнению Клейна-Гордона с эффективной метрикой искривленного пространства-времени. Эффективная метрика зависит от метрики реального пространства-времени, давления  $p$ , плотности энергии  $\rho$ , плотность числа частиц и скорости потока [38, 39]. При отсутствии фонового потока скорость обращается в ноль и для постоянной плотности, т. е. в однородном случае, эффективная метрика также плоска [43]. Опишем теперь БЭК после ускорения, подобная ситуация была ранее просчитана [44].

В сопутствующей системе координат эффективная метрика остается плоской до тех пор, пока ускорения достаточно малы. В этом случае можно гарантировать, что классический вакуум не возбужден и что конденсат остается примерно однородным. В [44] было показано, что сжатие мод Боголюбова происходит, когда БЭК у жестких стенок (граничные условия) подвергается малым ускорениям, и плотность БЭК в принципе может стать неоднородной. Тем не менее, эти эффекты являются незначительными в рассматриваемых режимах. При данных обстоятельствах упомянутых выше, мы получим уравнение Клейна-Гордона для боголюбовских режимов БЭК с эффективной метрикой и скоростью распространения [50]. Граничные условия на жесткой стенке приводят к спектру мод определяемому длиной конденсата. Более подробное описание установки с БЭК можно найти в [20].

Использовать БЭК решили для того, чтобы воспользоваться эффектом усиления из-за малых скоростей распространения по сравнению с другими удобными экспериментами. На данный момент достаточно комментариев к релятивистскому характеру фононов в экспериментах с БЭК. Интересно сравнить обсуждаемые методы с методами, которые были разработаны ранее, чтобы оценить ускорения, используя БЭК, в рамках нерелятивистской квантовой механики. В частности, учитывая квантовую информацию Фишера в современных акселерометрах, предназначенных для обнаружения аномалий силы тяжести [18, 19], которые основаны на атомной интерферометрии Маха-Цандера. В этих схемах волновая функция БЭК разделяется и рекомбинирует с помощью лазерных импульсов, что увеличивает фазовый сдвиг [45]. Рассматриваемая схема может быть дополнительно улучшена, если использовать запутанные двумодовые начальные состояния, либо путем увеличения количества измерений. Можно увидеть, что в предлагаемом эксперименте ошибка уменьшается за счет увеличения степени одномодового сжатия исходного состояния. Обратите внимание, что достижимый уровень сжатия, определяемый методом захвата, зависящим от времени, в принципе, гораздо выше, чем в оптических полостях. В то время как в оптических резонаторах возможно сжатие порядка 10 дБ [47], параметр сжатия порядка 10 окажется в пределах досягаемости для фононов, в зависящей от времени потенциальной ловушке [48]. Кроме того, большое число измерений может быть в принципе достигнуто за счет использования атомных квантовых точек или оптических решеток с конденсатом при исследовании состояния фононного поля [45]. Этот метод позволяет несколько тысяч повторных измерений, которые могут быть выполнены в течение жизни БЭК. Можно параллельно использовать большое количество БЭК. Отметим также, что установка не ограничена конкретной частотой

вибрации, так как есть резонансы между любыми парами отдельных мод, как при рождении частиц, так и при смешивании мод. Таким образом, один БЭК чувствителен к нескольким частотам. Кроме того, каждый БЭК может быть настроен изменением длины ловушки или скорости распространения фононов, с использованием стандартных экспериментальных методов [49]. Принимая во внимание все вышесказанное, установка может в принципе обладать хорошей широкополосной производительностью. Основной целью исследовательской программы является изучение влияния релятивистских эффектов на квантовые технологии. Всеобъемлющее понимание таких явлений позволит не только внести необходимые исправления в технологии, а также использовать ресурсы релятивистских эффектов. Действительно, показано, что релятивистские эффекты могут быть использованы для улучшения точности квантовых измерений. В частности, показано, как при рождении частиц в движущейся полости, квантово-полевой теоретический эффект, который называют динамическим эффектом Казимира, может быть использован для определения ускорений с точностью, которая при внедрении, в принципе, может улучшить точность акселерометров. В качестве конкретного эксперимента обсуждаются установки с конденсатом Бозе-Эйнштейна (БЭК). Кроме того, очерчены общие ограничения измерения параметров, появляющихся в квантовой теории поля, таких как напряженность гравитационного поля, правильное время и ускорение. Хотя возможны и наземные приложения, например, графеновые вентили, рассматриваемые методы особенно полезны в космических квантовых технологиях, где релятивистские эффекты стали особо актуальными. Насколько известно, в первый раз было показано, что релятивистские эффекты - ресурс квантовых технологий в [50]. Подобные работы открывают возможности для развития нового поколения релятивистских квантовых технологий.

#### Литература

1. X.-S. Ma, T. Herbst, T. Scheidl, D. Wang, S. Kropatschek, W. Naylor, A. Mech, B. Wittmann, J. Koer, E. Anisimova, V. Makarov, T. Jennewein, R. Ursin, and A. Zeilinger, [Nature \(London\) 489, 269\(2012\)](#).
2. P. Villoresi, T. Jennewein, F. Tamburini, M. Aspelmeyer, C. Bonato, R. Ursin, C. Pernechele, V. Luceri, G. Bianco, A. Zeilinger, and C. Barbieri, [New J. Phys. 10, 033038 \(2008\)](#).
3. C. Bonato, A. Tomaello, V. D. Deppo, G. Naletto, and P. Villoresi, [New J. Phys. 11, 045017 \(2009\)](#).
4. J.-Y. Wang, B. Yang, S.-K. Liao, L. Zhang, Qi Shen, X.-F. Hu, J.-C. Wu, S.-Ji Yang, H. Jiang, Y.-L. Tang, et al., [Nature Photonics 7, 387 \(2013\)](#).

5. R. Ursin, T. Jennewein, J. Perdigues, L. Cacciapuoti, C. de Matos, M. Aspelmeyer, A. Valencia, C. Barbieri, G. Bianco, S. Cova, et al., [International Astronautical Congress Proceedings A2.1.3 \(2008\)](#).
6. S. Schiller, A. Gorlitz, A. Nevsky, S. Alighanbari, S. Vasilyev, C. Abou-Jaoudeh, G. Mura, T. Franzen, U. Sterr, S. Falke, et al., e-print [arXiv:1206.3765 \[quant-ph\]](#) (2012).
7. N. Ashby, [Living Rev. Relativity 6, 1 \(2003\)](#).
8. D. Rideout, T. Jennewein, G. Amelino-Camelia, T. F. Demarie, B. L. Higgins, A. Kempf, A. Kent, R. Laamme, X. Ma, R. B. Mann, E. Martin-Martinez, N. C. Menicucci, J. Mofat, C. Simon, R. Sorkin, L. Smolin, and D. R. Terno, [Class. Quantum Grav. 29, 224011 \(2012\)](#).
9. T. Scheidl, E. Wille, and R. Ursin, [New J. Phys. 15, 043008 \(2013\)](#).
10. N. D. Birrell and P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1982).
11. M. Aspachs, G. Adesso, and I. Fuentes, [Phys. Rev. Lett. 105, 151301 \(2010\)](#).
12. D. J. Hosler and P. Kok, e-print [arXiv:1306.3144\[quant-ph\]](#)(2013).
13. D. J. Hosler, PhD thesis, University of Sheffield, 2013 [[arXiv:1306.4853](#)] [quant-ph].
14. T. G. Downes, G. J. Milburn, and C. M. Caves, e-print [arXiv:1108.5220\[gr-qc\]](#) (2012).
15. J. L. Ball, I. Fuentes-Schuller, and F. P. Schuller, [Phys. Lett. A 359, 550 \(2006\)](#).
16. P. M. Alsing and I. Fuentes, [Class. Quantum Grav. 29, 224001 \(2012\)](#).
17. N. Friis, A. R. Lee, K. Truong, C. Sabin, E. Solano, G. Johansson, and I. Fuentes, [Phys. Rev. Lett. 110, 113602 \(2013\)](#).
18. P. Wolf, C. J. Bordé, A. Clairon, L. Duchayne, A. Landragin, P. Lemonde, G. Santarelli, W. Ertmer, E. Rasel, F. S. Cataliotti, et. al., [Exper. Astron. 23, 651 \(2009\)](#).
19. F. Sorrentino, K. Bongs, P. Bouyer, L. Cacciapuoti, M. Angelis, H. Dittus, W. Ertmer, et. al., [Microgravity Sci. Technol. 22, 551 \(2010\)](#).
20. D. E. Bruschi, C. Sabin, A. White, V. Baccetti, D. K. L. Oi, and I. Fuentes, e-print [arXiv:1306.1933\[quant-ph\]](#) (2013).
21. M. G. A. Paris, *Int. J. Quant. Inf.* 7, 125 (2009).
22. Анализ применим также к разложению непрерывного режима в случае боголюбовского преобразования, смешивающего конечное число мод.
23. G. Adesso and F. Illuminati, [J. Phys. A: Math. Theor. 40 7821, \(2007\)](#).
24. N. Friis and I. Fuentes, [J. Mod. Opt. 60, 22 \(2013\)](#).
25. D. E. Bruschi, I. Fuentes, and J. Louko, [Phys. Rev. D 85, 061701\(R\) \(2012\)](#).
26. C. M. Wilson, G. Johansson, A. Pourkabirian, M. Simoen, J. R. Johansson, T. Duty, F. Nori and P. Delsing, [Nature \(London\) 479, 376 \(2011\)](#).
27. G. Adesso, I. Fuentes-Schuller, and M. Ericsson, [Phys. Rev. A 76, 062112 \(2007\)](#).
28. G. Adesso, S. Ragy, and D. Girolami, [Class. Quantum Grav. 29, 224002 \(2012\)](#).
29. V. Giovanetti, S. Lloyd, and L. Maccone, [Nature Photon. 5, 222 \(2011\)](#).
31. H. Cramer, *Mathematical Methods of Statistics* (Princeton University, Princeton, NJ, 1946).



31. S. L. Braunstein and C. M. Caves, [Phys. Rev. Lett.72, 3439 \(1994\)](#).
32. A. Monras, e-print [arXiv:1303.3682\[quant-ph\]](#) (2013).
33. P. Marian and T. A. Marian, [Phys. Rev. A 86, 022340\(2012\)](#).
34. N. Friis, A. R. Lee, and J. Louko, e-print [arXiv:1307.1631\[quant-ph\]](#) (2013).
35. D. E. Bruschi, J. Louko, D. Faccio, and I. Fuentes, e-print [arXiv:1210.6772\[quant-ph\]](#) (2012).
36. C. Weedbrook, S. Pirandola, R. Garcia-Patron, N. J. Cerf, T. C. Ralph, J. H. Shapiro, and S. Lloyd, [Rev. Mod. Phys. 84, 621 \(2012\)](#).
37. A. Gorlitz, J. M. Vogels, A. E. Leanhardt, C. Raman, T. L. Gustavson, J. R. Abo-Shaeer, A. P. Chikkatur, S. Gupta, S. Inouye, T. Rosenband, and W. Ketterle [Phys. Rev. Lett. 87, 130402 \(2001\)](#).
38. M. Visser and C. Molina-Parfis, [New. J. Phys.12, 095014 \(2010\)](#).
39. S. Fagnocchi, S. Finazzi, S. Liberati, M. Kormos and A. Trombettoni, [New. J. Phys. 12, 095012\(2010\)](#).
40. W. Hansel, P. Hommelhoff, T. W. Hansch, and J. Reichel, [Nature \(London\) 413, 498 \(2001\)](#).
41. T. P. Meyrath, F. Schreck, J. L. Hanssen, C.-S. Chuu, and M. G. Raizen, [Phys. Rev. A 71, 041604\(R\) \(2005\)](#).
42. A. L. Gaunt, T. F. Schmidutz, I. Gotlibovych, R. P. Smith, and Z. Hadzibabic, [Phys. Rev. Lett. 110, 200406 \(2013\)](#).
43. C. Barcelio, S. Liberati and M. Visser, [Living Rev. Relativity 8, 12 \(2005\)](#).
44. K. -P. Marzlin, W. Zhang [Phys. Lett. A248, 290 \(1998\)](#).
45. C. Sabin, A. White, L. Hackermuller, and I. Fuentes, e-print [arXiv:1303.6208\[quant-ph\]](#) (2013).
46. A. G. Krause, M. Winger, T. D. Blasius, Q. Lin, and O. Painter, [Nature Photonics 6, 768 \(2012\)](#).
47. H. Vahlbruch, M. Mehmet, S. Chelkowski, B. Hage, A. Franzen, N. Lastzka, S. Gofler, K. Danzmann, and R. Schnabel, [Phys. Rev. Lett. 100, 033602 \(2008\)](#).
48. A. Serafini, A. Retzker, and M. B. Plenio, [New. J. Phys.11, 023007 \(2009\)](#).
49. J.-C. Jaskula, G. B. Partridge, M. Bonneau, R. Lopes, J. Ruaudel, D. Boiron, and C. I. Westbrook, [Phys. Rev. Lett. 109, 220401 \(2012\)](#).
50. M. Ahmadi, D. E. Bruschi, N. Friis, C. Sabin, G. Adesso, I. Fuentes. Relativistic Quantum Metrology: Exploiting relativity to improve quantum measurement technologies, e-print [arXiv:1307.7082\[quant-ph\]](#) (2013).
51. Эффе́кт Унру. [http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%AD%D1%84%D1%84%D0%B5%D0%BA%D1%82\\_%D0%A3%D0%BD%D1%80%D1%83](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%AD%D1%84%D1%84%D0%B5%D0%BA%D1%82_%D0%A3%D0%BD%D1%80%D1%83)
52. H. Fogedby. Healing length for condensate. [http://users-phys.au.dk/fogedby/statphysII/problems/problem\\_1.pdf](http://users-phys.au.dk/fogedby/statphysII/problems/problem_1.pdf)