

О ВЫВОДЕ И АНАЛИЗЕ УРАВНЕНИЯ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ РУБИТЕЛЬНОГО ДИСКА С НОЖАМИ РАЗЛИЧНОЙ КОНСТРУКЦИИ

Фокин С.В., Березников С.В.

ФГБОУ ВПО «Саратовский государственный аграрный университет им.
Н.И.Вавилова»

Россия, Саратов

Для расчета и анализа энергетических характеристик процесса резания порубочных остатков дисковой рубительной машиной [1] выведем и исследуем дифференциальное уравнение вращательного движения диска с ножами, рис.1.

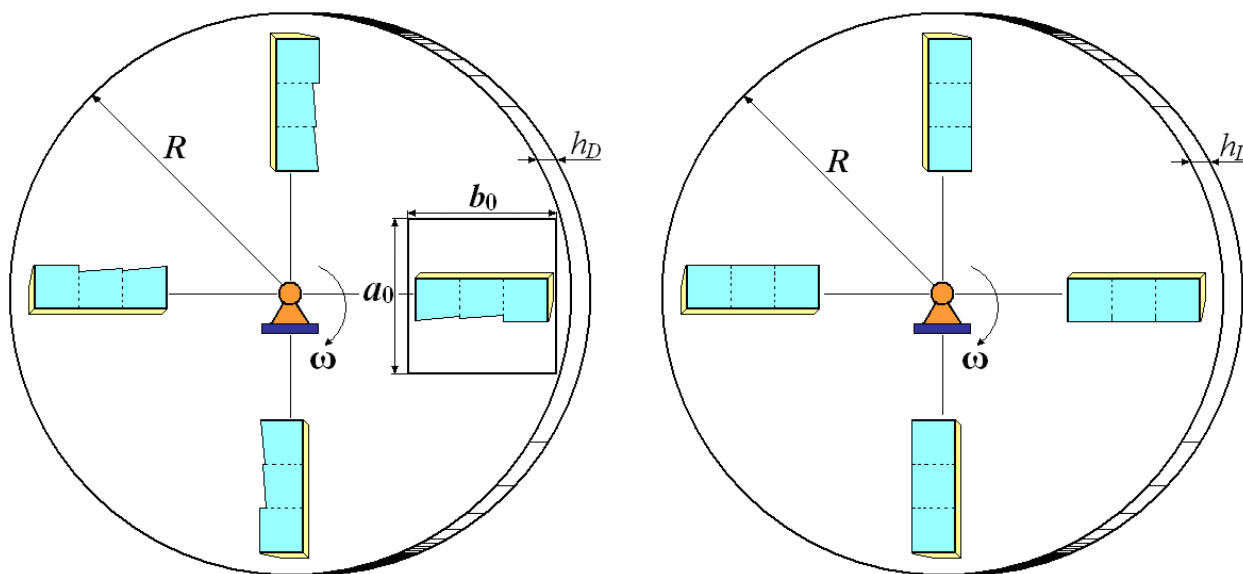


Рис.1. Расположение на диске режущих элементов с тремя и одним лезвием

Для вывода используем уравнение Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial E}{\partial \varphi} = Q_{\varphi},$$

где φ - обобщенная координата, угол поворота диска с ножами; $\dot{\varphi} = \omega$ - обобщенная скорость, угловая скорость диска с ножами; E - кинетическая энергия диска с ножами; Q_φ - обобщенная сила, действующая на диск с ножами.

Кинетическая энергия диска с ножами:

$$E = E_D + nE_N,$$

где E_D - кинетическая энергия диска; E_N - кинетическая энергия ножа; n - количество ножей на диске.

При вращательном движении [2-3] имеем:

$$E_D = J_D \frac{\omega^2}{2}, \quad E_N = nJ_N \frac{\omega^2}{2},$$

где J_D, J_N - моменты инерции диска и ножа относительно оси вращения.

Приближенно можно записать для моментов инерции диска и ножа:

$$J_D = \frac{M_D R^2}{2} = \frac{\rho_D \pi R^2 h_D R^2}{2} = \frac{\rho_D \pi h_D R^4}{2}, \quad J_N = M_N (\ell + b_3/2)^2, \quad (1)$$

где M_D, M_N - массы диска и ножа; ρ_D - плотность материала диска; R, h_D - радиус и толщина диска.

Масса комбинированного и традиционного ножа определится как $M_N = \rho_N G_N$, $M_{Ntr} = \rho_N G_{Ntr}$, где G_N, G_{Ntr} - объемы комбинированного и традиционного ножей; ρ_N - плотность материала ножа.

Объемы традиционного ножа и комбинированного вычисляются по формулам геометрии [5] для многогранников.

Масса традиционного ножа:

$$M_{Ntr} = \rho_N G_{Ntr} = \rho_N b_3 \delta (a - \delta \operatorname{ctg} \beta / 2)$$

Для комбинированного ножа из трех лезвий:

общая масса

$$M_N = M_{NI} + M_{NII} + M_{NIII},$$

где масса участка I

$$M_{NI} = \rho_N b_1 \delta (a - \delta \operatorname{ctg} \beta / 2) - \rho_N b_1 \delta (b_1 \operatorname{tg} \alpha_1 - a_1) \cos \beta;$$

масса участка II

$$M_{MII} = \rho_N (b_2 - b_1) \delta (a - \delta \operatorname{ctg} \beta / 2) - \rho_N (b_2 - b_1) \delta ((b_2 - b_1) \operatorname{tg} \alpha_2 + a_1) \cos \beta;$$

масса участка III

$$M_{MIII} = \rho_N (b_3 - b_2) \delta (a - \delta \operatorname{ctg} \beta / 2);$$

Теперь формулы для момента инерции традиционного и комбинированного ножей запишутся в виде:

$$J_{Ntr} = M_{Ntr} (\ell + b_3 / 2)^2, \quad J_N = (M_{MI} + M_{MII} + M_{MIII}) (\ell + b_3 / 2)^2. \quad (2)$$

Окончательно кинетическая энергия запишется в виде:

$$E = (J_D + nJ_N) \frac{\omega^2}{2}. \quad (3)$$

Обобщенная сила складывается из моментов действующих внешних сил относительно оси вращения диска с ножами [1-3]:

$$Q_\varphi = M_{ep} - n(M^z + M^\mu + M_T), \quad (4)$$

где $M_{ep} = \operatorname{const}$ – момент вращения двигателя привода, раскручивающего диск с ножами; M^z – момент (51) сил сопротивления резанию; M^μ – момент сил вязкого трения; $M_T = \operatorname{const}$ – момент силы сухого трения скольжения.

Момент режущих сил пропорционален квадрату угловой скорости вращения диска с ножами:

$$M^z = A\omega^2, \quad (5)$$

где коэффициент A является функцией геометрических и физических параметров и характеристик ножа.

Момент сил вязкого трения пропорционален первой степени угловой скорости вращения диска с ножами:

$$M^\mu = B\omega, \quad (6)$$

где коэффициент B является функцией геометрических и физических параметров и характеристик ножа.

Момент M_T сил сухого трения скольжения не зависит от угловой скорости вращения диска с ножами.

Следовательно, обобщенная сила (4) примет вид:

$$Q_{\varphi} = M_{\text{вп}} - n(A\omega^2 + B\omega + M_T). \quad (7)$$

Вычисляем нужные производные от кинетической энергии в уравнениях Лагранжа 2-го рода

$$\frac{\partial E}{\partial \varphi} = \frac{\partial E}{\partial \omega} = (J_D + nJ_N)\omega, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\omega}} \right) = (J_D + nJ_N)\dot{\omega}, \quad \frac{\partial E}{\partial \varphi} = 0.$$

С учетом выражения для обобщенной силы, получим следующее нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение движения диска с ножами:

$$(J_D + nJ_N)\dot{\omega} = M_{\text{вп}} - n(A\omega^2 + B\omega + M_T). \quad (8)$$

Полученное уравнение (8) описывает динамику вращательного движения диска с n ножами с учетом найденных моментов внешних сил сопротивления и действующего вращательного момента привода.

Исследуем полученное уравнение движения (8) диска с ножами.

Для этого представим его в приведенном виде:

$$\dot{\omega} = c - a_*\omega^2 - b_*\omega, \quad (9)$$

где
$$c = \frac{M_{\text{вп}} - nM_T}{J_D + nJ_N}, \quad a_* = \frac{An}{J_D + nJ_N}, \quad b_* = \frac{Bn}{J_D + nJ_N}.$$

Отсюда, разделяя переменные, получим:

$$\int \frac{d\omega}{a_*\omega^2 + b_*\omega - c} = -\int dt.$$

После интегрирования будем иметь:

$$\frac{1}{\sqrt{b_*^2 + 4a_*c}} \ln \left| \frac{2a_*\omega + b_* - \sqrt{b_*^2 + 4a_*c}}{2a_*\omega + b_* + \sqrt{b_*^2 + 4a_*c}} \right| = -t + \ln D,$$

где $b_*^2 + 4a_*c > 0$.

Знак модуля опустим, поскольку, выбирая угловую скорость ω вращения диска достаточно большой, можно добиться положительности числителя:

$$\ln \left(\frac{2a_*\omega + b_* - \sqrt{b_*^2 + 4a_*c}}{2a_*\omega + b_* + \sqrt{b_*^2 + 4a_*c}} \right) - \ln D = -t\sqrt{b_*^2 + 4a_*c},$$

или

$$\frac{2a_*\omega + b_* - \lambda}{2a_*\omega + b_* + \lambda} = De^{-\lambda t}.$$

где $\lambda = \sqrt{b_*^2 + 4a_*c}$; $D = (2a_*\omega_0 + b_* - \lambda)/(2a_*\omega_0 + b_* + \lambda)$ - произвольная постоянная определяется из начальных условий $\omega(0) = \omega_0$.

Разрешая полученное уравнение относительно ω , получим выражение для угловой скорости вращения, как функции времени:

$$\omega(t) = \frac{\lambda - b_* + D(b_* + \lambda)e^{-\lambda t}}{2a_*(1 - De^{-\lambda t})}. \quad (10)$$

За счет значительного вращательного момента M_{ep} , входящего в коэффициент c , показатель λ экспоненциальной функции достаточно велик и переходные процессы установления угловой скорости вращения диска с ножами весьма быстрые.

При $t \rightarrow \infty$ установившееся значение угловой скорости вращения диска с ножами примет вид:

$$\omega(\infty) = \frac{\lambda - b_*}{2a_*} = \sqrt{\left(\frac{B}{2A}\right)^2 + \frac{M_{ep}}{An} - \frac{M_T}{A} - \frac{B}{2A}}. \quad (11)$$

Это выражение для $\omega(\infty)$ эквивалентно выражению

$$M_{ep} - n(A\omega^2(\infty) + B\omega(\infty) + M_T) = 0, \quad (12)$$

определяющему равенство нулю суммы моментов внешних сил в установившемся процессе резания порубочных остатков, см, например, уравнения (8), (9).

Полученные моменты режущих сил, сил вязкого и сухого трения и проведенный анализ динамики движения диска с ножами позволяет оценить мощности всех рассмотренных внешних сил.

Мощность внешних сил при вращательном движении тела определяется по формуле:

$$P = M^E \omega,$$

где M^E – момент внешних сил относительно оси вращения; ω – угловая скорость вращения.

Применительно к рассматриваемой задаче исследования процесса резания порубочных остатков n ножами, расположенными на вращающемся с угловой скоростью ω диске, формулы для вычисления мощностей принимают следующий вид.

Мощность момента сил сопротивления резанию:

$$P^z = nM^z \omega = nA\omega^3. \quad (13)$$

Мощность момента сил вязкого трения:

$$P^\mu = nM^\mu \omega = nB\omega^2. \quad (14)$$

Мощность момента сил сухого трения скольжения:

$$P_T = nM_T \omega. \quad (15)$$

Суммарная мощность сил сопротивления:

$$P = nA\omega^3 + nB\omega^2 + nM_T \omega = n\omega(A\omega^2 + B\omega + M_T). \quad (16)$$

Формулы (13-16) позволяют рассчитывать мощности внешних сил как функции параметров движения, геометрических и физических характеристик рассматриваемых ножей.

Мощность сил вращения двигателя привода, раскручивающего диск с ножами равная суммарной мощности сил сопротивления:

$$P_{вр} = M_{вр} \omega = P. \quad (17)$$

Производительность Π [кг/с] процесса резания порубочных остатков может быть оценена как

$$\Pi = k_{\Pi} \rho n a_0 b_0 h \omega, \quad (18)$$

где k_{Π} – коэффициент потерь при резании; ρ – плотность сплошной среды порубочных остатков; n – число ножей; a_0, b_0 – размеры (рис.1) окна подачи

порубочных остатков; h - толщина срезаемого слоя порубочных остатков в рубильной машине; ω – угловая скорость вращения диска с ножами.

Таким образом, построены математические модели в виде формул, соотношений, выражений и уравнений (1-18).

Данные модели, реализованные в компьютерной программе, позволяют решать задачи анализа и синтеза при исследовании процессов резания рассматриваемыми ножами порубочных остатков и получать качественные и количественные оценки этих процессов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Устройство для измельчения порубочных остатков : Пат. на полезную модель 129452 Рос. Федерация : В27L 11/00 / Фокин С. В., Березников С.В. ; заявитель и патентообладатель ФГБОУ ВПО «Саратовский ГАУ». – № 2012157974 ; заявл. 27.12.2013 ; опубл. 27.06.2013, Бюл. № 18.
2. Бутенин Н.В. Курс теоретической механики: в 2 т., Т.1,2 / Н.В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. М., Наука, 1976.
3. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики: 2 т., Т.1,2 / Н.Н. Бухгольц, М., Наука, 1969.
4. Яблонский А.А. Курс теоретической механики в 2ч., ч.1,2 /А.А.Яблонский, В. М. Никифорова -М., Высшая школа 1984.
5. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. -13-е изд., исправленное. – М.: Наука,1986.- 544с.