

Определение нормальных напряжений в поперечных сечениях балок с гофрированной стенкой

ассистент Лукин А.О.

При расчете балок с гофрированной стенкой принято считать, что полки воспринимают нормальные напряжения, а стенка – касательные [1, 2]. Но реальная работа гофрированных балок отличается от таких предположений [3]. Участки стенки, примыкающие к поясам, воспринимают нормальные напряжения, которые возникают от изгиба. Для гофров треугольного очертания [4] экспериментально-теоретическим путем выявлено влияние параметров гофров (длины и высоты волны) на степень участия гофрированной стенки в восприятии изгибающего момента. Решения о распределении напряжений в стенке для других видов гофров отсутствуют.

Новый подход к расчету балок с гофрированной стенкой можно сформулировать, если представить ее в виде трехслойной конструкции. Основное предположение при расчете трехслойных конструкций заключается в том, что изменение модуля упругости среднего слоя по высоте сечения описывается математической зависимости, например, экспоненциальной [5] или степенной [6]. Такое допущение для балки с гофрированной стенкой позволит получить аналитическое решение для распределения напряжений в поперечном сечении.

В данной работе предложена методика для определения нормальных напряжений в поперечных сечениях балок с гофрированной стенкой при изгибе со сжатием.

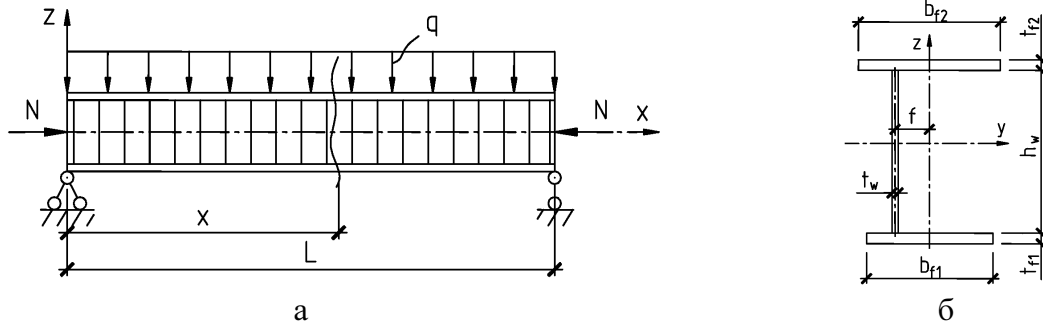


Рис. 1. – К расчету балки с гофрированной стенкой
а – расчетная схема; б – поперечное сечение

В основу методики приняты следующие положения:

- справедлива гипотеза плоских сечений;
- элементы балки претерпевают сдвиг;
- при работе материалов возникает линейная зависимость между деформациями и напряжениями.

Для определения напряженного состояния балки гофрированная стенка заменяется на плоскую ортотропную пластинку такой же толщины, но с приведенными упругими характеристиками. Упругие постоянные для плоской ортотропной пластинки, которые зависят от вида и размеров гофра, определяются путем сравнения деформации гофрированной и плоской пластинки при одних и тех же нагрузках.

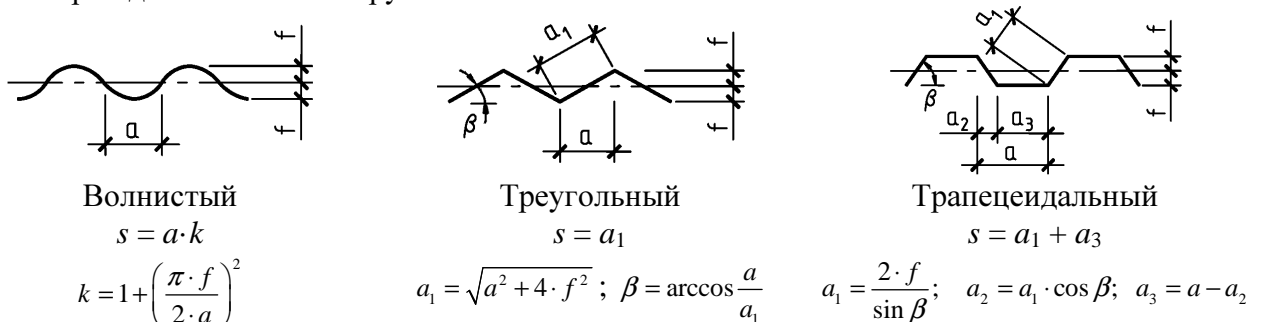


Рис. 2. – Профиль гофрированной стенки

Приведенный модуль сдвига примем по [7]:

$$G_{\text{зоф}} = G \cdot a/s, \quad (1)$$

где G – модуль сдвига для изотропного материала; a – длина полуволны; s – длина дуги или панели полуволны (рис. 2).

Приведенный модуль упругости примем из работы Андреевой Л.Е. [8]:

$$E_{\text{зоф.х}} = E/k_1 \quad (2)$$

где E – модуль упругости для изотропного материала; k_1 – коэффициент анизотропии, который зависит от профиля гофра, длины и высоты волны, толщины стенки:

- для трапецидальных гофров: $k_1 = \frac{(2 \cdot f)^2}{t_w^2} \left[\frac{1 - a_3}{\cos \beta} + \frac{3 \cdot a_3}{a} \right] + \left(1 - \frac{a_3}{a} \right) \cdot \cos \beta + \frac{a_3}{a}; \quad (2a)$

- для треугольных гофров значение k_1 определяется по формуле (2a) при $a_3 = 0$;

- для синусоидальных гофров:

- пологий профиль ($f/a < 1/8$): $k_1 = \frac{3(2f)^2}{2t_w^2} + 1; \quad (2б)$

- произвольный профиль:

$$k_1 = \frac{(2 \cdot f)^2}{t_w^2} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - a_0^2}} \left[\left(\frac{1}{a_0^2} - 1 \right) F_0 + \left(2 - \frac{1}{a_0^2} \right) E_0 \right] + \frac{2\sqrt{1 - a_0^2}}{\pi} F_0, \quad (2в)$$

где F_0 и E_0 – полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно.

$$E_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - a_0^2 \sin^2 \theta} d\theta, \quad F_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - a_0^2 \sin^2 \theta}}, \quad a_0 = \frac{f\pi}{a \sqrt{1 + \left(\frac{f\pi}{a} \right)^2}}, \quad \theta = \frac{\pi \cdot x}{a}.$$

Полные эллиптические интегралы можно представить в виде степенных рядов:

$$F_0 = \frac{\pi}{2} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{(2 \cdot m)!}{2^{2 \cdot m} \cdot m!^2} \right]^2 \cdot a_0^{2 \cdot m}; \quad E_0 = \frac{\pi}{2} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{(2 \cdot m)!}{2^{2 \cdot m} \cdot m!^2} \right]^2 \cdot \frac{a_0^{2 \cdot m}}{1 - 2 \cdot m}.$$

Для практических расчетов достаточно принять $m = 5$.

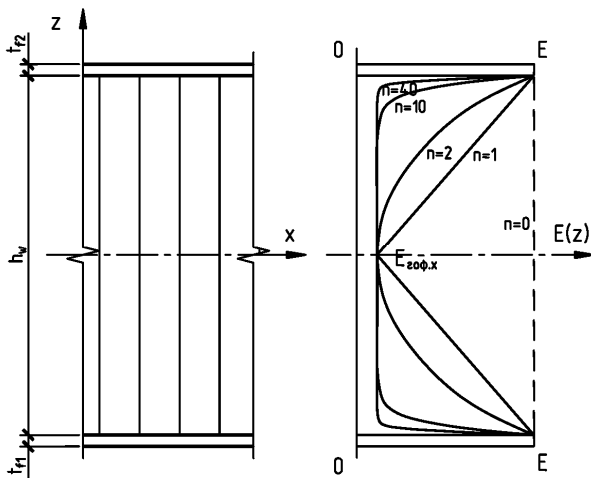


Рис. 3. – Изменение модуля упругости по высоте стенки в зависимости от параметра n

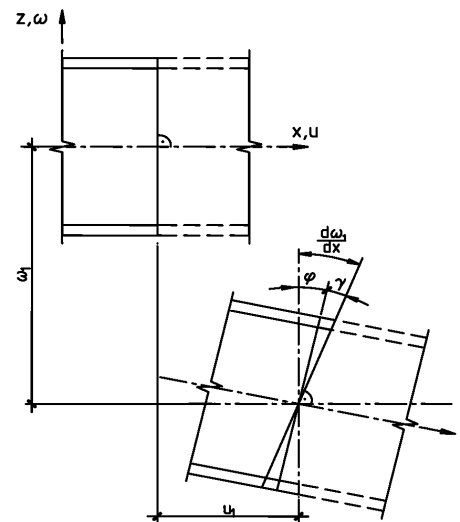


Рис. 4. – Деформация поперечного сечения с учетом сдвига

Известно, что нормальные напряжения быстро падают от полки к оси балки. По мере удаления от пояса к оси балки защемляющее влияние поясов на работу гофрированной стенки уменьшается и на некотором расстоянии становится пренебрежимо мало. Поэтому будем считать, что приведенный модуль упругости в стенке по высоте сечения описывается степенной функцией. Тогда для всего сечения можно записать:

$$E(z) = \begin{cases} E & \text{если } z \in [(0,5 \cdot h_w); (0,5 \cdot h_w + t_{f2})] \\ \left((E - E_{\text{зоф.х}}) \cdot \left(\frac{2 \cdot z}{h_w} \right)^n + E_{\text{зоф.х}} \right) & \text{если } z \in [-(0,5 \cdot h_w + t_{f1}); (0,5 \cdot h_w + t_{f2})] \\ E & \text{если } z \in [-(0,5 \cdot h_w + t_{f1}); -(0,5 \cdot h_w)] \end{cases} \quad (3)$$

где z – координата по высоте сечения; $n = \sqrt{k_1} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{B_{\text{зоф}}}}$ – коэффициент, учитывающий защемля-

ющее влияние полки на работу стенки (рис. 3); $B_{\text{зоф}} = \frac{\pi^2 \cdot S_{x,f2} \cdot E}{L^2 \cdot t_w \cdot G}$ – коэффициент податливости

[9]; $S_{x,f2}$ – статический момент пояса относительно оси балки.

Продольные и поперечные перемещения всех точек сечения определяются зависимостью (рис. 4)

$$u(x, z) = u_1(x) + z \cdot \left(-\gamma + \frac{dw_1}{dx} \right) \quad (4)$$

$$w(x, z) = -w_1(x)$$

где $u_1(x)$ – продольное перемещение от осевой силы; γ – угол сдвига сечения от действия поперечных сил; $w_1(x)$ – прогиб балки с учетом изгибных и сдвиговых деформаций.

Относительную деформацию точек сечения получим, продифференцировав (4)

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du(x, z)}{dx} = \frac{du_1}{dx} + z \left(-\frac{d\gamma}{dx} + \frac{d^2w_1}{dx^2} \right) \quad (5)$$

Закон Гука при продольном растяжении имеет вид

$$\sigma_x = E(z) \varepsilon_{xx} \quad (6)$$

Тогда нормальные напряжения с учетом (5) определяются следующим образом

$$\sigma_x = E(z) \varepsilon_{xx} = E(z) \left(\frac{du_1}{dx} + z \left(-\frac{d\gamma}{dx} + \frac{d^2w_1}{dx^2} \right) \right) \quad (7)$$

Усилия в поперечном сечении определяются суммированием напряжений на элементарных площадках

$$N = \int_A \sigma_x dA; \quad M = \int_A \sigma_x \cdot z dA \quad (8)$$

Подставляя значения напряжения из (7) в (8), получим

$$N = A_0 \frac{du_1}{dx} + B_0 \left(-\frac{d\gamma}{dx} + \frac{d^2w_1}{dx^2} \right); \quad M = B_0 \frac{du_1}{dx} + D_0 \left(-\frac{d\gamma}{dx} + \frac{d^2w_1}{dx^2} \right) \quad (9)$$

где A_0, B_0, D_0 – упруго-геометрические характеристики сечения.

Для двутавровой балки упруго-геометрические характеристики будут иметь вид:
- жесткость при растяжении

$$A_0 = \int_A E(z) dA = \int_{-0,5h_w - t_{f1}}^{-0,5h_w} E \cdot b_{f1} dz + \int_{-0,5h_w}^{0,5h_w} E(z) \cdot t_w dz + \int_{0,5h_w}^{0,5h_w + t_{f2}} E \cdot b_{f2} dz$$

- упруго-статический момент сечения

$$B_0 = \int_A E(z) \cdot z dA = \int_{-0,5h_w - t_{f1}}^{-0,5h_w} E \cdot b_{f1} \cdot z dz + \int_{-0,5h_w}^{0,5h_w} E(z) \cdot t_w \cdot z dz + \int_{0,5h_w}^{0,5h_w + t_{f2}} E \cdot b_{f2} \cdot z dz$$

- жесткость при изгибе относительно оси у (рис. 1)

$$D_0 = \int_A E(z) \cdot z^2 dA = \int_{-0,5h_w - t_{f1}}^{-0,5h_w} E \cdot b_{f1} \cdot z^2 dz + \int_{-0,5h_w}^{0,5h_w} E(z) \cdot t_w \cdot z^2 dz + \int_{0,5h_w}^{0,5h_w + t_{f2}} E \cdot b_{f2} \cdot z^2 dz$$

Запишем уравнения (9) в матричном виде

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 & B_0 \\ B_0 & D_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{du_1}{dx} \\ -\frac{d\gamma}{dx} + \frac{d^2 w_1}{dx^2} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Из матрицы (10) найдем значения производных

$$\begin{bmatrix} \frac{du_1}{dx} \\ -\frac{d\gamma}{dx} + \frac{d^2 w_1}{dx^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 & B_0 \\ B_0 & D_0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^* & B^* \\ B^* & D^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} \quad (11)$$

где $A^* = \frac{D_0}{A_0 \cdot D_0 - B_0 \cdot B_0}$; $B^* = \frac{-B_0}{A_0 \cdot D_0 - B_0 \cdot B_0}$; $D^* = \frac{A_0}{A_0 \cdot D_0 - B_0 \cdot B_0}$.

Тогда из (12) производные перемещений будут определяться

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dx} &= A^* \cdot N + B^* \cdot M \\ -\frac{d\gamma}{dx} + \frac{d^2 w_1}{dx^2} &= B^* \cdot N + D^* \cdot M \end{aligned} \quad (12)$$

Подставляя (12) в (6) и используя (3), найдем нормальные напряжения в произвольной точке несимметричного поперечного сечения

$$\sigma_x = E(z) \varepsilon_{xx} = E(z) \left(A^* \cdot N + B^* \cdot M + z \cdot (B^* \cdot N + D^* \cdot M) \right) \quad (13)$$

При $N = 0$ и при симметричном сечении ($B_0 = 0$)

$$\sigma_x = E(z) \cdot z \cdot D^* \cdot M = E(z) \cdot z \cdot \frac{M}{D_0} \quad (14)$$

Пример.

Для применения полученной формулы рассмотрим шарнирно опертую балку по двум сторонам (рис. 1). Балка находится под действие постоянной равномерно распределенной нагрузки $q=100$ кН/м. Профиль гофра – синусоидальный. Модуль упругости стали $E = 2,06 \cdot 10^4$ кН/см², модуль сдвига $G = 0,8 \cdot 10^4$ кН/см². В примере рассматриваются две балки с различными параметрами гофров (табл. 3).

Табл. 3. Параметры гофрированных балок

№	Пролет L , м	h_w , мм	t_w , мм	$b_{f1} =$ b_{f2} , мм	$t_{f1} =$ t_{f2} , мм	a , мм	f , мм	k_1	$E_{гоф.х}$ кН/см ²	$G_{гоф}$ кН/см ²	n	Эскиз гофра
БГС-1	9	750	2,5	200	12	77,5	20	414,2	49,7	6871	41,9	
БГС-2	6	500	8	200	12	150	5	3,34	6160	7978	4,83	

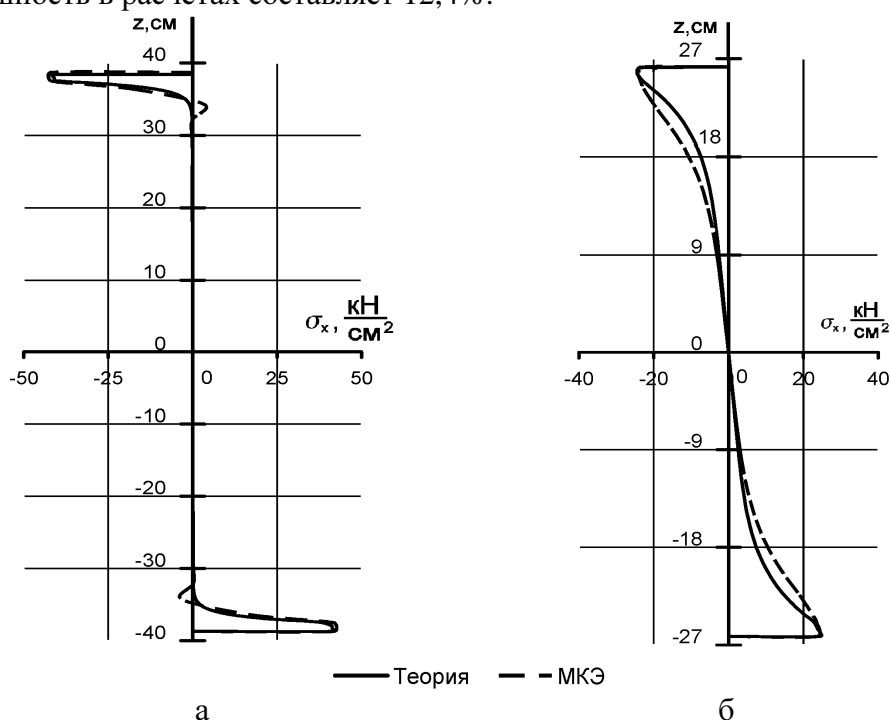
Для проверки надежности полученных результатов по (14) были выполнены расчеты этих же балок по общеизвестной методике, представленной в [1, 2], и методом конечных элементов (МКЭ) в программном комплексе «Лира». Моделирование балок и принятая сетка конечных элементов описано в [11].

Табл. 4. Сравнение результатов значений напряжений.

Параметры	Методика Автора ф. (15)	Мето- дика [1,2]	МКЭ	$\Delta_1 = \frac{\sigma_{автора} - \sigma_{общ}}{\sigma_{автора}} \cdot 100\%$	$\Delta_2 = \frac{\sigma_{автора} - \sigma_{МКЭ}}{\sigma_{МКЭ}} \cdot 100\%$
Нормальные напря- жения в крайнем во- локне балки ($x=L/4$), кН/см ²	$\frac{41,81}{24,43}$	$\frac{41,52}{27,46}$	$\frac{41,8}{24,1}$	$\frac{0,69}{12,4}$	$\frac{0,02}{1,4}$

Примечание: значения над чертой для балок БГС-1, под чертой для балок БГС-2: i – соответствующий параметр сравнения.

Результаты расчета показывают (табл. 4), что предложенная методика достоверно отражает работу балки с гофрированной стенкой. Максимальная разница в сравнении с результатами по МКЭ составляет 1,4%. Эпюры напряжений представлены на рис. 5. Сравнивая результаты, полученные по предложенному методу и общепринятым формулам, видно, что при пологих гофрах погрешность в расчетах составляет 12,4%.



а

б

Рис. 5. – Эпюры напряжений при $x=L/4$:

а – нормальные напряжения в балке БГС-1; б – нормальные напряжения в балке БГС-2

Для проверки применимости предложенного метода дополнительно было рассчитано 15 балок с различным соотношением параметров гофрирования. Отклонения вычисленных значений по предложенной методике от результатов МКЭ для нормальных напряжений в крайнем волокне балки составляет 0,5-2%.

Выводы.

1. Дано аналитическое решение для распределения напряжений в поперечном сечении балок с гофрированной стенкой.
2. Предложенная методика с высокой точностью позволяет определять нормальные напряжения в балке с гофрированной стенкой при различных параметрах гофров.

Литература

1. Бирюлев В.В. Проектирование металлических конструкций: Специальный курс [Текст] / В.В. Бирюлев, И.И. Кошин, И.И. Крылов, А.В. Сильвестров, под ред. В.В. Бирюлева. – Л.: Стройиздат, 1990. – 432 с.
2. EN 1993-1-5: 2006. Eurocode 3: Design of steel structures. Part 1-5: General rules - Plated structural elements.
3. Соловьев А.В. Анализ эффективности применения двутаврового элемента с гофрированной стенкой при работе в сложном напряженно-деформированном состоянии [Текст] / А.В. Соловьев, А.О. Лукин, В.Ю. Алпатов // Промышленное и гражданское строительство. – 2010. – № 6. – С. 27-30.
4. Остриков Г.М. Исследование несущей способности стальных двутавровых балок с вертикально гофрированной стенкой [Текст] / Г.М. Остриков, Ю.С. Максимов, В.В. Долинский // Строительная механика и расчет сооружений. – 1983. – № 1. – С. 68-70.
5. Venkataraman S., Sankar B. V. Elasticity Solution for Stresses in a Sandwich Beam with Functionally Graded Core // AIAA Journal, VOL. 41, NO. 12: pp. 2501-2505.
6. Simsek M. Static analysis of a functionally graded beam under a uniform distributed load by Ritz method // International Journal of Engineering and Applied Sciences (IJEAS). Vol.1, Issue (2009) pp. 1-11.
7. Лукин А.О. Определение прогибов балок с гофрированной стенкой с учетом сдвиговых деформаций / А.О. Лукин // Инженерный Вестник Дона: электронный журнал. №1. 2013. ISSN 2073-8633. URL: <http://www.ivdon.ru/magazine/archive/n1y2013/1496>.
8. Андреева Л.Е. Расчет характеристик гофрированных мембран [Текст] / Л.Е. Андреева // Приборостроение. – 1956. – № 3. – С. 11-17.
9. Осипов Ю.К. Исследование клееных деревянных балок с волнистой стенкой из фанеры [Текст]: автореферат / Осипов Ю.К. – Новосибирск, 1969. – 15 с.
10. Биргер И.А. Соппротивление материалов [Текст] / И.А. Биргер, Р.Р. Мавлютов. – М.:Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 560 с.
11. Соловьёв А.В. Учет особенностей работы балок с гофрированной стенкой в расчетах на стесненное кручение [Текст] / А.В. Соловьев, А.О. Лукин, В.Ю. Алпатов, В.Н. Савостьянов // Вестник МГСУ. – 2012. – № 11. С. – 105–112.