

Ортогональные преобразования вейвлет – Хаара в задачах дистанционного зондирования Земли

М. Л. Казарян. Северо-Осетинский государственный университет, Россия, Владикавказ.
Тел. (8672) 53-41-28, e-mail: marettak@bk.ru

Аннотация

В статье исследуются ортогональные преобразования и их использование в технологиях дистанционного зондирования Земли. Дистанционное зондирование Земли позволяет с космических аппаратов получать информацию среднего, высокого пространственного разрешения и проводить гиперспектральные измерения. Космические аппараты имеют несколько десятков или сотен спектральных каналов. При обработке снимков используется аппарат дискретных ортогональных преобразований и, в частности, вейвлет – преобразования. В работе подробно анализируются вейвлеты Хаара. Проводится математическое исследование их на корректность методом Тихонова. Доказывается теорема подтверждающая справедливость метода Тихонова в отношении рядов Фурье – вейвлет - Хаара. Далее проводится эксперимент, из которого следует справедливость теоретических исследований преобразований вейвлет – Хаара.

Введение

Технология ДЗЗ является доступным, оперативным и эффективным средством экологического мониторинга. Многозональная космическая видеоинформация может быть использована в системах контроля экологического состояния территориальных объектов для наблюдения [1-2].

Первый этап космического мониторинга – определение на космических изображениях квазиоднородных по яркости областей по измерениям в каждой из частотных полос сканера.

В работе рассматривается решение актуальной научно-технической задачи, связанной с повышением эффективности применения методов обработки (компрессии) цифровых изображений для задач ДЗЗ для хранения и последующей обработки снимков [6].

Пространственные преобразования позволяют извлекать информацию из данных дистанционного зондирования и обрабатывать ее нужным образом [2]. В некоторых преобразованиях используются только локальные данные из относительно небольшой окрестности пиксела, в других - информация обо всех элементах изображения. Первая группа преобразований представляется операцией свертки, вторая - преобразованием Фурье. Между этими крайними случаями находится приобретающая все большее значение категория многомасштабных преобразований, в которую входят гауссовы пирамиды, пирамиды Лапласа и вейвлет – преобразования [3]. Обработка данных с помощью этих методов позволяет получить доступ к пространственной информации в широком диапазоне масштабов, от локального до глобального.

Одним из эффективных методов обработки изображений является вейвлет - анализ. Термин «вейвлет», означающий в переводе с англ. «маленькая волна» появился в 80-х г.г. прошлого столетия в работах Марле и Глоссмана, связанных с анализом сейсмических данных. В общем виде вейвлет - преобразование $W\{f(t)\}$

функции $f(t)$ состоит в разложении этой функции по базису сконструированному из семейства функции $\Psi_{ab}(t)$ [3]: $W\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi_{ab}(t)dt$.

Это семейство нормированных на $|a|^{-1/2}$ функции $\Psi_{ab}(t): \psi_{ab}(t) = |a|^{-1/2}\psi\left[\frac{t-b}{a}\right]$ получено из функции-прототипа $\Psi(t)$, называемой материнским вейвлетом, путем масштабных преобразований (дилатаций), определяемых действительным положительным числом $\infty > a > 0$, и путем параллельных переносов (трансляций), определяемых действительным числом $\infty > b > -\infty$. Числа a и b называют соответственно параметрами масштаба и сдвига. Интегральное вейвлет-преобразование локализует сигнал во «временном окне»: $[b + at - a\Delta_\psi, b + at + a\Delta_\psi]$, с центром окна в $b+at$ и шириной, равной $2a\Delta_\psi$, где Δ_ψ - радиус функции окна. В анализе сигналов это носит название «временная локализация».

Вейвлеты, являясь функциями времени, имеют свое частотное представление, называемое средней круговой частотой вейвлета w_0 . В частотной области спектры многих вейвлетов напоминают всплеск, пик которого приходится на частоту w_0 . Если приближенно трактовать вейвлет как модулированную синусоиду, то ее частота и будет средней частотой вейвлета.

Прямое непрерывное вейвлет-преобразование означает разложение произвольного входного сигнала на совокупность волновых пакетов – вейвлетов, которые характеризуются четырьмя принципиально важными свойствами: имеют вид коротких, локализованных во времени (или в пространстве), волновых пакетов с нулевым значением интеграла; обладают возможностью сдвига по времени; способны к масштабированию (сжатию/растяжению); имеют ограниченный (или локальный) частотный спектр.

Вейвлет – спектрограммы отчетливо выделяют такие особенности сигнала, как небольшие разрывы, изменение знаков первой и второй производных, изменение частоты составляющих сигнала и их энергий во времени и т. д., именно те особенности сигнала, которые плохо выделяются на спектре Фурье – сигнала.

В работе проводится математический анализ вейвлет-преобразований Хаара [4].

Исследовательская часть

Известно, что задача суммирования ряда Фурье интегрируемой с квадратом на отрезке $[a, b]$ функции $f(t)$ с приближенными коэффициентами $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ вместо точных коэффициентов

$$a_k = \int_a^b f(t) \psi_k(t) dt, \quad k = 1, 2, \dots$$

по некоторой ортонормированной системе функций [9] $\{\psi_k(t)\}$ является некорректно поставленной. А именно, если

$$\sum_{k=1}^{\infty} (c_k - a_k)^2 \leq \delta^2, \quad \delta > 0 \quad (1)$$

то погрешность, то есть отклонение функции $f(t)$ и суммы ее ряда Фурье с коэффициентами $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ вместо $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, в равномерной метрике может оказаться сколь угодно большой [6]. Исследуем вейвлеты Хаара на устойчивость.

Определение 1. Определим функции вейвлет Хаара следующим образом [4]:

$$\chi_1(t) \equiv 1$$

$$\chi_{mj}(t) = \begin{cases} 2^{\frac{m-1}{2}}, & \text{put } \in \left[\frac{j-1}{2^{m-1}}, \frac{2j-1}{2^m} \right) \\ -2^{\frac{m-1}{2}}, & \text{put } \in \left[\frac{2j-1}{2^m}, \frac{j}{2^{m-1}} \right) \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases},$$

где $m = 1, 2, \dots$; $j = 1, \dots, 2^{m-1}$, а при $j = 2^{m-1}$ правый из отрезков считается замкнутым также справа. При нумерации функций одним индексом k полагается $k = 2^{m-1} + j$.

Это определение отличается от определения самого Хаара [5] значениями функций Хаара в точках разрыва, но при этом сохраняется основное свойство системы Хаара - равномерное стремление ряда Фурье - Хаара непрерывной на $[0, 1]$ функции $f(t)$ к $f(t)$ [6].

В случае системы Хаара не удовлетворяется условие равномерной ограниченности, а предложенный в [6] метод не обеспечивает непрерывность функции, аппроксимирующей непрерывную функцию.

В самом деле, пусть функция, непрерывная на $[0, 1]$ представлена своим рядом Фурье - вейвлет - Хаара

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_k(t) \quad (2)$$

Пусть вместо $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ известны их приближенные значения $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяющие условию (1).

Тогда, как приближение $f(t)$ согласно [6] берется сумма

$$f_{\delta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{1 + \alpha \xi_k} a_k \chi_k(t) \quad (3)$$

где $0 < \alpha \leq 1$, $\xi_k \sim k^{\lambda}$, $\lambda > 1$.

Для непрерывной функции $f(t)$ известно [6], что $a_k = O(k^{-\frac{1}{2}})$, а при $a_k = O(k^{-\frac{3}{2}}) f(t) = const$.

Из сказанного следует, что $f_{\delta}(t)$ не обязана быть непрерывной, хотя бы потому, что ее коэффициенты могут иметь порядок выше $k^{-\frac{3}{2}}$ и не только при $\lambda > 1$.

Из этих соображений следует обоснованность рассмотрение задачи регуляризации ряда Фурье - вейвлет - Хаара с приближенными коэффициентами. Задаче регуляризации таких рядов обобщенным методом суммирования и, в частности, методом Тихонова, посвящены дальнейшие исследования.

В решении этой и последующих задач значительную роль играют классы S_p , $1 \leq p < \infty$, которые были введены и детально описаны И. М. Соболев (см. 5) для изучения многомерных квадратурных формул и содержат функции с быстро сходящимся рядом Фурье - Хаара.

Определение 2 [5]. Через S_p , $1 \leq p < \infty$ обозначим класс функций $f(t)$, удовлетворяющих условиям:

$$1) \text{ представимы рядом Хаара: } f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_k(t)$$

$$2) A_p(f) \equiv \sum_{m=1}^{\infty} 2^{\frac{m-1}{2}} \left\{ \sum_{j=1}^{2^{m-1}} |a_{mj}|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \leq A, \text{ где } A = const, A \geq 0. \quad (4)$$

Пусть $S_p = \cup_{A \geq 0} S_p(A)$.

Следующая теорема характеризует классы S_p .

Теорема 1 [5]. Для любой функции $f(t)$ из S_p ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_k(t) \quad (5)$$

где $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ есть последовательность коэффициентов Фурье - Хаара функции $f(t)$ сходится равномерно на $[0, 1]$.

Следствие 1 [5]. Функции классов S_p непрерывны на всех точках отрезка $[0, 1]$, кроме, быть может двоично - рациональных точек, то есть точек вида $\frac{p}{2^q}$; $p = 0, 1, \dots$; $q = 0, 1, \dots$, в которых они непрерывны справа и могут иметь разрывы первого рода.

Будет показано, что аппроксимирующая непрерывную функцию сумма ряда, регуляризованного обобщенным методом и, в частности, методом Тихонова, принадлежит классу $S_{p'}$, $p' \geq 2$.

Для функций Хаара справедливо следующее очевидное соотношение:

$$\sum_{j=1}^{2^{m-1}} |\chi_{mj}(t)|^q = 2^{\frac{1}{2}(m-1)q}, \quad q > 0 \quad (6)$$

Для рядов Хаара справедлива следующая теорема, которая в дальнейшем послужит нам теоремой единственности.

Теорема 2 [5]. Если ряд Хаара $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_k(t)$ с произвольными действительными коэффициентами, сходится равномерно на $[0, 1]$, то он есть ряд Фурье – Хаара своей суммы.

Введем несколько обозначений.

Через $C_{(0,1)}$ обозначим пространство функций, непрерывных на отрезке $[0,1]$, а через $L^p_{(0,1)}$ – пространство интегрируемых в p -ой степени функций.

Пусть $f(t) \in C_{(0,1)}$. Модулем непрерывности функции $f(t)$ называется функция

$$\omega(\delta, f) = \sup_{\substack{|h| \leq \delta \\ 0 \leq t \leq 1-h}} |f(t+h) - f(t)| \quad (7)$$

Функцию $\varphi(t)$, представляющую обобщенный метод суммирования и являющуюся аналогом сумматорной функции из [6], определим следующим образом.

Определение .3. Непрерывную справа в точке 0 монотонную функцию $\varphi(t)$ с $\varphi(0) = 1$; $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0$; $\int_0^{\infty} \varphi(t) t^{-\frac{1}{2}} dt < \infty$ (8)

назовем обобщенной сумматорной функцией, а метод суммирования рядов посредством этой функции - обобщенным методом суммирования.

Из следующего соотношения видно, что классы S_p достаточно широки: класс Липшица $H_{\alpha'}(L)$, $0 < \alpha' \leq 1$, $L > 0$, $L = const$.

$$H_{\alpha'}(L) = \left\{ f(t); |f(t_1) - f(t_2)| \leq L |t_1 - t_2|^{\alpha'} \right. \\ \left. \text{для любых точек } t_1, t_2 \text{ из } [0, 1] \right\}$$

принадлежит S_p при $\alpha' P > 1$ [5].

Здесь мы докажем теорему об устойчивости регуляризованной сумматорной функцией $\varphi(t)$ ряда Фурье – вейвлет-Хаара функции $f(t) \in S_p$, $1 \leq p < \infty$ с приближенными коэффициентами и о его равномерной сходимости.

Пусть вместо точных коэффициентов $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ функции $f(t)$ известны их приближенные значения $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ так, что удовлетворяется соотношение (1). Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Пусть $f(t) \in S_p$, $1 \leq p \leq \infty$, $t \in [0, 1]$, $\alpha = \alpha(\delta)$ монотонно стремится к нулю и $\delta \alpha^{-\frac{1}{2}}(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$, тогда:

$$1. f_{\delta}(\alpha, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(\alpha k) c_k \chi_k(t) \text{ принадлежит } S_{p'}, \quad p' = \max(2, p);$$

$$2. f_{\delta}(\alpha, t) \text{ равномерно на } [0, 1] \text{ стремится к } f(t).$$

Доказательство.

Функция $f(t)$ аппроксимируется суммой $f_{\delta}(\alpha, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(\alpha k) c_k \chi_k(t)$ которая, согласно признаку Дирихле равномерной сходимости рядов и теореме 2 сходится равномерно и есть ряд Фурье – Хаара своей суммы.

Нетрудно убедиться, что $A_p(f_{\delta}(\alpha, t)) < \infty$.

Действительно, представим $f_{\delta}(\alpha, t)$ в виде сумм двух функций

$$f_\delta(\alpha, t) = f(\alpha, t) + g_\delta(\alpha, t)$$

с коэффициентами $\{\varphi(\alpha k)a_k\}_{k=1}^\infty$ и $\{\varphi(\alpha k)\gamma_k\}_{k=1}^\infty$ соответственно.

Поскольку $f(t) \in S_p$, то очевидно, что $f(\alpha, t)$ также принадлежит S_p . Пусть $p' = \max(2, p)$, тогда для $g_\delta(\alpha, t)$ имеем

$$\begin{aligned} A_{p'}(g_\delta(\alpha, t)) &\leq \sum_{m=1}^{\infty} 2^{\frac{m-1}{2}} \varphi(\alpha 2^{m-1}) \left\{ \sum_{j=1}^{2^{m-1}} |\gamma_{mj}|^{p'} \right\}^{\frac{1}{p'}} \leq \sum_{m=1}^{\infty} 2^{\frac{m-1}{2}} \varphi(\alpha 2^{m-1}) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \delta \sum_{m=1}^{\infty} 2^{\frac{m-1}{2}} \varphi(\alpha 2^{m-1}) \leq \frac{\delta \alpha^{-\frac{1}{2}}}{\ln 2} \int_0^\infty \varphi(t) t^{-\frac{1}{2}} dt \end{aligned}$$

где $\gamma_k = c_k - a_k$, $k = 0, 1, \dots$

Отсюда следует, что $A_{p'}(g_\delta(\alpha, t)) < \infty$, а также равномерное стремление ряда $\sum_{k=1}^\infty \varphi(\alpha k) \gamma_k \chi_k(t)$ к $g_\delta(\alpha, t)$, что достаточно для того, чтобы $g_\delta(\alpha, t)$ принадлежала $S_{p'}$.

Таким образом, $f(\alpha, t) \in S_{p'}$ и $g_\delta(\alpha, t) \in S_{p'}$, следовательно, $f_\delta(\alpha, t) \in S_{p'}$ и первая часть теоремы доказана.

Для доказательства второй части рассмотрим уклонение

$$|f(t) - f_\delta(\alpha, t)| \leq \left| f(t) - \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(\alpha k) a_k \chi_k(t) \right| + \left| \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(\alpha k) \gamma_k \chi_k(t) \right|$$

Имеем

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \varphi(\alpha k) \chi_k(t) \right| \leq |\gamma_1 \varphi(\alpha)| + \sum_{m=1}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{2^{m-1}} \gamma_{mj} \varphi(\alpha(2^{m-1} + j)) \chi_{mj}(t) \right|$$

И поскольку

$$\left| \sum_{j=1}^{2^{m-1}} \gamma_{mj} \varphi(\alpha(2^{m-1} + j)) \chi_{mj}(t) \right| \leq \delta \varphi(\alpha 2^{m-1}) 2^{\frac{m-1}{2}}$$

то

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \varphi(\alpha k) \chi_k(t) \right| \leq \delta + \delta \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(\alpha 2^{m-1}) 2^{\frac{m-1}{2}}$$

Отсюда, учитывая условия, наложенные на $\varphi(t)$, получаем

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \varphi(\alpha k) \chi_k(t) \right| \leq \delta + \frac{\delta \alpha^{-\frac{1}{2}}}{\ln 2} \int_0^\infty \varphi(t) t^{-\frac{1}{2}} dt \leq c \delta(\alpha) \alpha^{-\frac{1}{2}} \quad (9)$$

Оценим другой член:

$$\left| f(t) - \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(\alpha k) a_k \chi_k(t) \right| \leq \left| \sum_{k=1}^{n(\infty)} [1 - \varphi(\alpha k)] a_k \chi_k(t) \right|$$

где $n(\infty)$ выбирается описанным ниже образом.

Поскольку $0 \leq [1 - \varphi(\alpha k)] \leq 1$ и $f(t) \in S_p$, то

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n(\infty)+1}^{\infty} [1 - \varphi(\alpha k)] a_k \chi_k(t) \right| &\leq \sum_{k=n(\infty)+1}^{\infty} |[1 - \varphi(\alpha k)] a_k \chi_k(t)| \leq \\ &\leq \sum_{k=n(\infty)+1}^{\infty} |a_k \chi_k(t)| \end{aligned} \quad (10)$$

где последняя сумма, согласно теореме 1, равномерно стремится к нулю при $n(\alpha) \rightarrow \infty$.

Пользуясь монотонностью $\varphi(\alpha)$ получаем

$$\left| \sum_{k=1}^{n(\alpha)} [1 - \varphi(\alpha k)] a_k \chi_k(t) \right| \leq [1 - \varphi(\alpha k)] \sum_{k=1}^{n(\alpha)} |a_k \chi_k(t)| \leq [1 - \varphi(\alpha n(\alpha))] \sum_{k=1}^{\infty} |a_k \chi_k(t)|$$

Теперь, если выбрать $n(\alpha)$ так, чтобы $\alpha \rightarrow 0$ одновременно с $n(\alpha) \rightarrow \infty$ и $\alpha n(\alpha) \rightarrow 0$, то правая часть последнего неравенства стремится к нулю при $\alpha \rightarrow 0$, что вместе с первой оценкой завершает доказательство теоремы.

Учитывая условие (4) и теорему 3, доказанную теорему можно переформулировать следующим образом:

Теорема 4. Пусть последовательность действительных чисел $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию (4) и вместе с $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ - условию (1). Пусть далее $\alpha = \alpha(\delta)$ монотонно стремится к нулю и $\delta \alpha^{-\frac{1}{2}}(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$. Тогда

1. **Функции**

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_k(t)$$

и

$$f_{\delta}(\alpha, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(\alpha k) c_k \chi_k(t)$$

принадлежат соответственно классам S_p , $1 \leq p < \infty$ и $S_{p'}$, $2 \leq p < \infty$;

2. $f_{\delta}(\alpha, t)$ равномерно на $[0, 1]$ стремится к $f(t)$.

Экспериментальные исследования

Проведем эксперимент. Для экспериментального исследования вышерассмотренных теоретических выкладок возьмем одну из задач предварительной обработки изображений – сжатие или зонное кодирование сигнала (изображения).

Приведем математическую постановку задачи сжатия с регуляризацией.

Пусть $\bar{x} = (x_0, \dots, x_{N-1})$ исходный вектор данных размерности N , рассматриваемый, как реализация некоторого случайного процесса с определенными свойствами;

F – дискретное ортогональное преобразование (Уолша, Фурье и т.д.),

F^{-1} – обратное преобразование,

S – матрица выбора размерности $m \times N$ ранга m , $1 \leq m \leq N$,

R_{α} – регуляризирующая матрица в задаче сжатия исходного вектора \bar{x} определяемая следующим образом:

$$R_\alpha = \begin{bmatrix} \varphi(1, \alpha) & & & & \\ & \varphi(2, \alpha) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \varphi(N, \alpha) \end{bmatrix},$$

где: $\varphi(n, \alpha)$ – регуляризирующие множители; $n = \overline{1, N}$; α – регуляризирующий параметр.

Задача состоит в выборе при заданных F_0, S_0 , такой регуляризирующей матрицы R_α чтобы выполнялось следующее условие: $\rho(\bar{x}, R_\alpha \bar{x}) \rightarrow \min$, где ρ –

заданная метрика; $\bar{x} = F_0^{-1} S_0^T S_0 F_0 \bar{x}$.

Замечание:

При фиксированном преобразовании F_0 , произвольной матрице $S, R_\alpha = I$ эта задача, известная как задача зонного кодирования посредством преобразования F , изучена в работе [6].

Приведем общий алгоритм сжатия одномерных сигналов с регуляризирующей матрицей R_α .

1 шаг: вектор – сигнал \bar{x} , подвергается преобразованию F :
 $\bar{y} = F \bar{x} = (y_0, \dots, y_{N-1})^T$,

2 шаг: вектор – δ приближений компонент \bar{y}_δ заменяется посредством оператора выбора S на меньший по размерности вектор $\tilde{y}_\delta = (\tilde{y}_0, \dots, \tilde{y}_{N-1})$, который подлежит передаче по каналу связи, хранению и т.д. (величина $k = N/N_0$ называется коэффициентом сжатия).

3 шаг: производится «экстраполяция» посредством матрицы S^T . т.е. на приемной стороне полученный вектор дополняется до размерности N (так, например, все компоненты кроме отобранных полагаются равными 0).

4 шаг: полученный вектор подвергается обратному преобразованию F^{-1}

5 шаг: осуществляется умножение на матрицу регуляризирующих множителей R_α .

В результате выполнения этих шагов исходный вектор восстанавливается с погрешностями:

$$\varepsilon_1 = \rho_{l_2}(\bar{x}, F^{-1} S^T S F \bar{x}_\delta), \quad \varepsilon_2 = \rho_c(\bar{x}, R_\alpha F^{-1} S^T S F \bar{x}_\delta)$$

Задача состоит в выборе α и, следовательно, $\varphi(n, \alpha)$ так, чтобы для заданной k выполнялось следующее условие: $\varepsilon_2 \ll \varepsilon_1$.

Выбор α и $\varphi(n, \alpha)$ для соответствующих ортогональных преобразований зависит от входных данных и структуры преобразований.

Вид матрицы R_α определен для непрерывного случая и используется в дискретной интерпретации задачи сжатия изображений с регуляризацией. В таблице 1 приводится конкретный вид матрицы R_α для различных преобразований.

Таблица 1

Фурье	$\varphi(\alpha, k) = \frac{1}{1+k^2\alpha}$	$k = \overline{1, \infty}$	[6]
Уолш	$\varphi(\alpha, k) = \frac{1}{1+k^p\alpha}$	$k = \overline{1, \infty}; \quad p > 1/2$	[6]
Хаар	$\varphi(\alpha, k) = \frac{1}{1+(\alpha k)^\lambda}$	$k = \overline{1, \infty}; \quad \lambda > 1/2$	[6]

В указанной таблице не сказано о точных значениях α . Возникает вопрос определения значений α , для которых справедливы выводы поставленного эксперимента.

Конкретное значение регуляризирующего параметра α определяются экспериментально и приводятся в таблице 2. Здесь α_1 - нижняя граница; α_2 - верхняя граница изменения α

Таблица 2

α	<i>COS</i>	<i>HAAR</i>	<i>WALSH</i>	<i>FURIE</i>
α_2	0,5	0,99	0,5	0,99
α_1	0,00005	0,000001	0,000001	0,000001

На рисунке 1 иллюстрируется расположение ошибок сжатия с регуляризацией ϵ_1 и без регуляризации ϵ_2 для усредненных параметров эксперимента.

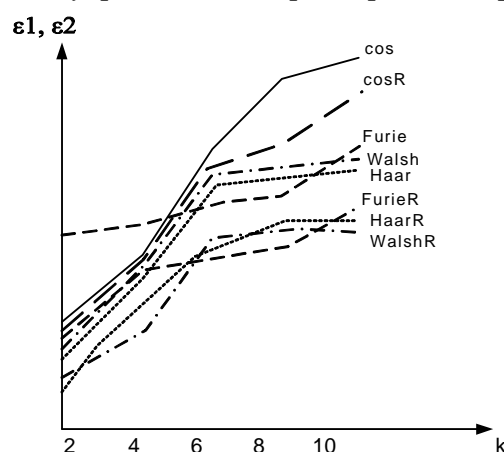


Рис.1. Ошибки сжатия с регуляризацией и без регуляризации для усредненных параметров эксперимента.

Заключение

Дистанционное зондирование Земли позволяет с космических аппаратов получать информацию среднего, высокого пространственного разрешения и проводить гиперспектральные измерения. Космические аппараты имеют несколько десятков или сотен спектральных каналов.

При обработке снимков используется аппарат дискретных ортогональных преобразований и, в частности, вейвлет – преобразования. В работе подробно анализируются вейвлеты Хаара.

Проводится математическое исследование на корректность методом Тихонова. Доказывается теорема подтверждающая справедливость метода Тихонова в отношении рядов Фурье – вейвлет - Хаара.

Далее проводится эксперимент на примере задачи сжатия изображения, из которого следует справедливость теоретических исследований преобразований вейвлет – Хаара.

Литература:

1. Шахраманьян М. А. Новые информационные технологии в задачах обеспечения национальной безопасности России (природно – техногенные аспекты). Монография – М.: ФЦ ВНИИ ГОЧС, 2003 – 398 с., с иллюстр.
2. Шовенгердт Р. А. Дистанционное зондирование. Модели и методы обработки изображений М.: Техносфера, 2010 – 560 с.
3. Dobechie I. Ten Lectures on wavelets. SIAM, Philadelphia, 1992 y.
4. Haar A. Zur Theorie der orthogonalen Funktionssysteme. – Math.Fnn. 1910, 69, hh. 331 – 371.
5. Соболев И. М. Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара. – М.: Наука, 1969, 288 с.
6. Казарян М. Л. Исследование задач цифровой обработки сигналов посредством дискретных ортогональных преобразований на устойчивость. Монография – Владикавказ 2009.