О некоторых геометрических аспектах интерпретации однородных координат

Н.Д. Вертинская, член-корр. РАЕ, д. т. н., профессор
stevia@mail.ru

I. Предисловие

Как известно, синтетическая геометрия является основанием открытий в аналитической геометрии, что подтверждают высказывания Г. Кантора [1] : «…на пути введения комплексных величин долгое время встречались трудности, пока после многих усилий нашли их геометрическое представление с помощью точек и отрезков на плоскости»; и Ф. Клейн [2]: «…исторически возникновение понятия иррациональных чисел имеет своим источником геометрическую интуицию» и др.

Ф. Клейн в своей работе [3] уточняет: «…разделяют два рода геометрий: геометрия синтетическая…и…геометрия аналитическая... Кроме этих двух…можно еще рассматривать третий род,…являющийся обобщением двух первых». Известно, что одна из синтетических геометрий называется начертательной геометрий, которая изучает методы отображения пространственных форм на плоскость.

В процессе отображения участвуют:

- оригинал,
- аппарат отображения,
- модель (изображение),
- носитель модели.

В качестве оригинала выступают любые объекты пространства, простейшим из них является точка, которая определяется однозначно тремя координатами, с мерностью ∞^3(точка на поверхности (плоскости) имеет мерность ∞^2, точка на кривой (прямой) - ∞^1) [4].

В качестве аппарата отображения можно использовать кривые (прямые) линии или поверхности (плоскости).

Моделью (изображением) точки будет точка при проецировании кривой (прямой) линией или кривая (прямая) при проецировании поверхностью (плоскостью).

Носителем модели может быть поверхность (плоскость) или кривая (прямая) линия. Мы для изложения из всего выше сказанного берем в качестве оригинала точку, т.е.:

оригинал – точка,
аппарат отображения – связка (S) или связки прямых,
модель – точка или точки,
носитель модели – плоскость.

При этом, необходимым требованием при проецировании точки пространства, имеющей мерность ∞^3, является требование, чтобы модель ее имела мерность ∞^3.

Аппаратом проецирования являются связки (S_1) и (S_2) прямых, а носитель модели плоскость Π. Точку A пространства проецируем из центра S_1 в точку A_1 на плоскость Π (рис. 1), имеющей мерность ∞^2 при чем в точку A_1 проецируются все точки луча SA_1. Чтобы выполнить требование проецирования, берем еще один центр проецирования S_2 при этом точки S_1 и S_2 определят в пространстве прямую m, которая пересечет плоскость Π в точке F_0, постоянную для данного аппарата проецирования, которая на плоскости Π выделит пучок (F_0) прямых. Точка A_1 из пучка (F_0) прямых выделит прямую a, на которую проецируем точку A из центра S_2 в точку A_2 с мерностью ∞^1. В результате имеем на плоскости Π модель точки A - пару точек A_1 и A_2, т. е мерность модели будет

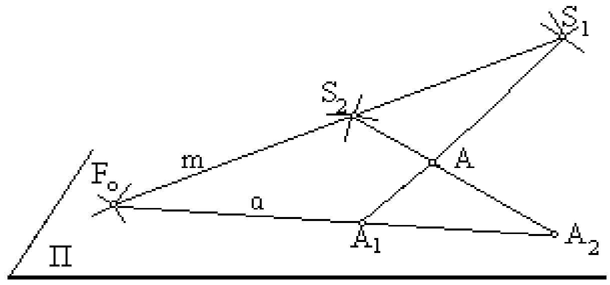

Рис.1

равна $\left.\begin{matrix} A_1 - \infty^2 \\ A_2 - \infty^1 \end{matrix}\right\} = \infty^3$ отсюда видно, что мерности оригинала и модели равны.

Если в качестве оригинала будет выступать тело, то оно пучком (m) плоскостей будет расслаиваться на сечения, которые из центров (S_1) и (S_2) проецирования будут моделироваться в пучке (F_0) прямых на плоскости П .

Таким образом, начертательная геометрия решает две задачи: прямую – по данному оригиналу при помощи аппарата проецирования получить модель оригинала на носителе модели; и обратную задачу – по данной модели при помощи аппарата проецирования получить оригинал. Прямая задача начертательной геометрии называется моделированием, обратная – конструированием.

Изложим процесс моделирования и конструирования, используя рис. 1.

Моделируем точку A аппаратом проецирования – двумя связками (S_1) и (S_2) прямых на плоскость $П$. Центры проецирования S_1 и S_2 определят в пространстве прямую m, которая пересечет плоскость $П$ в точке F_0 определяющей в плоскости П пучок (F_0) прямых. Моделирование точки A пространства выполняется в плоскости $\Delta(A, m)$. Точка A из центра S_1 проецируется в точку A_1, выделяющей из пучка (F_0) прямых, например, прямую a, на которую проецируем точку A из центра S_2 в точку A_2. В итоге моделью точки A является пара точек A_1 и A_2.

Конструирование точки A пространства выполняется, если задана модель точки, т. е пара точек A_1 и A_2 на плоскости $П$ и аппарат проецирования, на пример, пара связок (S_1) и (S_2) прямых в пространстве. Как и ранее центры S_1 и S_2 проецирования определят в пространстве прямую m, которая пересечет плоскость $П$ в точке F_0, определяющей пучок (F_0) прямых носителей моделей точек пространства, на одной из прямых пучка (F_0) прямых лежат данные точки A_1 и A_2, например, на прямой a. Пересекающиеся прямые a и m определят плоскость $\Sigma(a, m)$ - плоскость конструирования точки A. Лучи проецирования точки A_1 из центра проецирования S_1 и точки A_2 из центра S_2, лежащие в плоскости $\Sigma(a, m)$ пересекутся в одной точке A. Из выше изложенного видно, что оригинал можно сконструировать при наличии двух проекций модели.

На плоскости проекций $П$ проекции точек пространства будут двух типов, которые поясниманарис.2,2’.

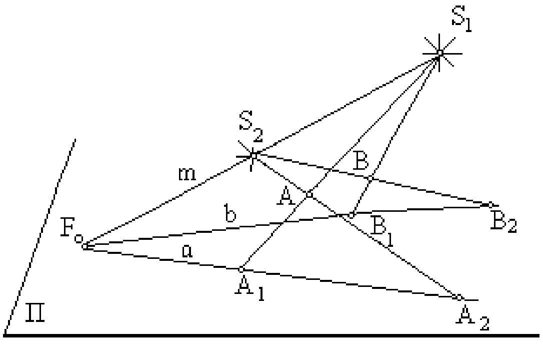

Рис.2

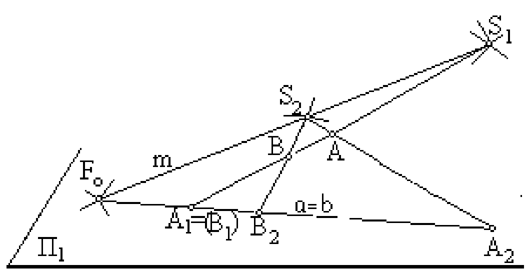

Рис. 2'

Моделируем две точки A и B из центров S_1 и S_2 на плоскости Π. Точки A и B выделят из пучка (m) плоскостей две плоскости, которые пересекут плоскость Π по прямым a и b пучка (F_0) прямых (рис. 2’). Из центров проецирования точки A и B проецируются соответственно парами точек A_1 и A_2 на прямой a и B_1 и B_2 на прямой b. Возможен частный случай расположения пространственных точек A и B. Эти точки могут располагаться на одном луче связки (S_1) или (S_2)прямых. В этом случае точки A и B будут принадлежать одной плоскости пучка (m) плоскостей, образованной пересекающимися прямыми m и прямой (AB). Эта плоскость пересечет плоскость Π по прямой $a = b$ пучка (F_0) прямых (рис. 2’). Точки A и B из центра проецирования S_1 проецируются в совпавшие проекции $A_1 = (B_1)$, такие точки на плоскости проекций называются **конкурирующими** [5,6]. Проекции точек A и B из центра проецирования S_2 проецируются на плоскость Π в две различные точки A_2 и B_2 прямой $a = b$.

II. Возникновение проблемы

Рассмотрим применение методов начертательной геометрии для решения вопросов аналитической геометрии. Для этого рассмотрим аффинные координаты на плоскости.

Простейшую координатную систему на прямой можно представить, если на ней задать начало отсчета, точку O, единицу измерения точкой с координатой 1 и положительные или отрицательные расстояния x от точки O (рис. 3).

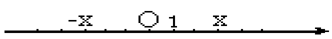

Рис.3

На плоскости или в пространстве будем брать две или три координатные прямые x, y или x, y, z с общей точкой O и составляющие между собой произвольные углы. Чаще углы образованные между осями берутся 90^0. Аффинная прямая является неограниченной в обоих направлениях, но на ней мы никогда не достигнем хотя бы одной точки лежащей на противоположном направлении движения.

Особенность аффинной плоскости состоит в том, что параллельные прямые на ней не пересекаются.

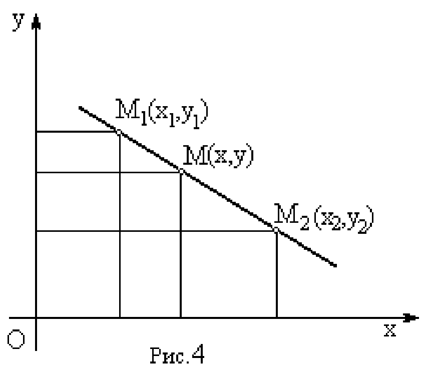

Рис.4

Рассмотрим на аффинной плоскости деление отрезка M_1M_2 прямой точкой M в данном отношении $\frac{m}{n}$, где m и n любые числа (рис. 4). Координаты точки $M(x, y)$ по координатам данных точек $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ выводятся в учебниках по аналитической геометрии [7, 8, 9], где $x = \frac{nx_1 + mx_2}{m+n}$; $y = \frac{ny_1 + my_2}{m+n}$ для точки M, лежащей внутри отрезка и $\frac{m}{n} \rangle 0$, если точка M будет лежать вне отрезка, то $\frac{m}{n} \langle 0$. Если $\frac{m}{n} = 1$, то точка M с координатами $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ и $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ делит отрезок M_1M_2 пополам. Если $\frac{m}{n} = -1$, то координаты точки M' будут $x = \infty$ и $y = \infty$ такие точки называются бесконечно удаленные и в аффинной геометрии не рассматриваются. Эти бесконечно удаленные точки в геометрии на практике ввели как несобственные элементы.

Таким образом, на прямой вводится несобственная точка, на плоскости – несобственная прямая, в пространстве – несобственная плоскость. Поэтому каждая прямая приобретает несобственную точку, представленную на замкнутой линии (рис. 5). Теперь параллельные прямые стали иметь общую несобственную точку. Введение несобственных точек на прямой позволило упростить многие предложения, например, на плоскости теперь две прямые пересекаются. Поэтому утверждается, что при движении в любом направлении по прямой мы можем через бесконечную точку вернуться в исходную. Такую прямую назвали проективной прямой, а плоскость – проективной плоскостью и пространство - проективным пространством. Рассматривая задачу деления отрезка M_1M_2 прямой в отношении $\dfrac{m}{n}$ на проективной прямой точка $M_\infty(\infty)$ теперь у нас узаконена, и можно предположить, что она делит отрезок $M_1M_\infty M_2$ в отношении $\dfrac{m}{n}=-1$.

Вместе с тем, несобственные геометрические образы не могут быть заданы с помощью аффинных координат. Поэтому вводится новое координатоопределение, положив для прямой $x=\dfrac{x_1}{x_2}$, так что всякой точке на прямой соответствует не одна, в две координаты x_1 и x_2, для прямой имеем избыточность координат [3]. При этом одной точке прямой будет ставиться в соответствие множество систем значений, которые представляются в виде $(\rho x, \rho y)$, например, точка $x=1$на рис. 6, где ρ любое не равное нулю число и x_1, x_2 принимают любые значения, кроме одновременного равенства их нулю.

В этом случае на прямой получаем определенную единственную точку и в случае $x_2=0$ и $x_1=\lambda$ получаем несобственную или бесконечную точку. Введенные таким образом координаты называются **однородными координатами**.

III. Конкурирующие точки

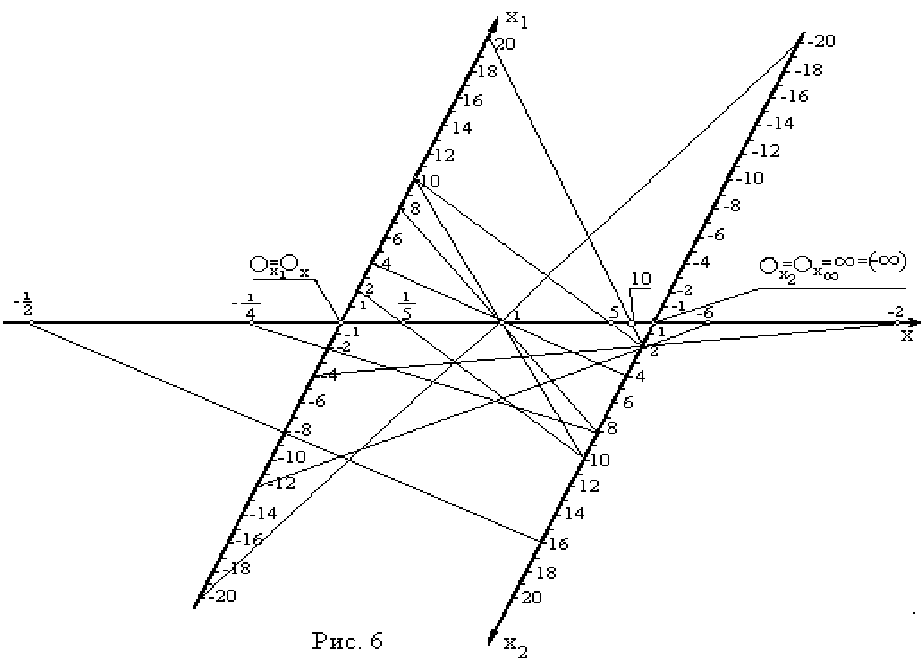

Рис. 6

Подробнее рассмотрим координату $x=\dfrac{x_1}{x_2}$ на оси Ox, где x_1 и x_2 изменяются от 0 до ∞ и необходимо заметить, что при возрастании x_1 и фиксированном значении x_2, x-возрастает и при фиксированном x_1 при возрастании x_2, x-убывает. Поместим переменные x, x_1, x_2 на прямые, x на горизонтальную прямую, а переменные x_1 и x_2 на параллельные между собой прямые с противоположным отсчетом от начала координат. Поместим точку бесконечности в пределах видимости, это будет точка пересечения оси Ox_2 с осью Ox и рассмотрим поведение x в этом случае.

Поэтому к высказыванию Г. Кантора [3], что точка ∞ на проективной прямой одна, можно добавить теорему: **Две точки пространства ∞ и $-\infty$ на проективную прямую проецируются в конкурирующие точки.**

Проследим изменения x на оси (рис. 6), то он убывает от ∞ до 0 и далее убывает до $-\infty$. Поэтому на числовой оси самое большое число ∞ убывает до самого малого числа $-\infty$. Но $-\infty$ ни как не может перейти в ∞ и обратно. На рис. 6 мы видим, что точка ∞ приближается к точке $O_{x_2} = O_x$ справа, а точка $-\infty$ слева от нее и совпадают с точкой $O_{x_2} = O_x$. То есть на проективной прямой проекции точек ∞ и $-\infty$ являются **конкурирующими точками** (как это видно на рис. 2’ с точками $A_1 = (B_1)$). Поэтому оригинал проективной прямой будет в виде разорванной пространственной кривой.

Если теперь значения x увеличиваются от $x = 0$ до ∞ в точке $O_{x_2} = O_x$, то значения x уменьшается влево от нуля в точки O_{x_1} до $-\infty$ в точке $O_{x_2} = O_x$.

При условии, что прямые (2,-2),(-3,3), (10,-10) и т. д. параллельны оси Ox и являются прямыми пучка $M_\infty(-1)$ прямых, то точка $x = -1$ оказывается в бесконечности.

Таким образом, ясно, что на оси Ox нет точки $x = \dfrac{0}{0}$.

На основании изложенного, ясно, что для построения точек на проективной прямой мы вынуждены выходить в плоскость, для построения точек на плоскости, где работают две оси Ох и Оу, т.е. $x = \dfrac{x_1}{x_3}$ и $y = \dfrac{x_2}{x_3}$ нужны две плоскости, у которых линия их пересечения будет нести ось Ox_3 и оси Ох и Оу будут ей параллельны..

Так как рассматриваемая нами проективная прямая является моделью пространственного объекта, то его сконструировать мы не можем, т. к. проективная прямая имеет одну проекцию. Каждая точка оригинала проективной прямой проецируются на модель в одну точку и только две точки ∞ и $-\infty$ проецируются в конкурирующие точки.

Есть несколько пространственных линий одна из проекций которых представляет замкнутую линию с двумя конкурирующими точками, например, виток винтовой цилиндрической линии, если точки ∞ и $-\infty$ поместить в конце и начале витка, при проецировании его

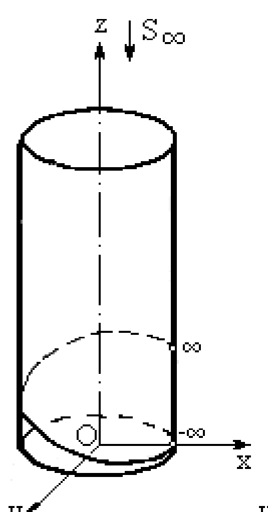

Рис.7

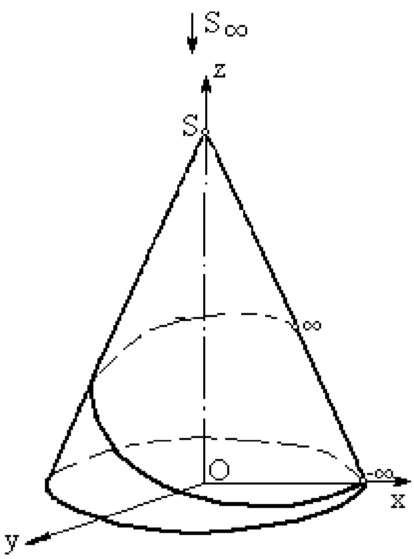

Рис .8

связкой прямых с центром в несобственной точке (рис. 7) или виток конической винтовой линии проецированной связкой прямых из точки S совпадающей с вершиной конуса (рис. 8), аналогичную одну из проекций будет иметь виток винтовой линии расположенной на однополостном гиперболоиде.

Выводы:

Таким образом, мы показали геометрически, что:

1) проекции точек ∞ и $-\infty$ пространства на проективной прямой являются конкурирующими точками.

2) Невозможность равенства нулю одновременно x_1 и x_2 так как на оси Ox нет такой точки.

3) На аффинной прямой в однородных координатах нет точки $x = \dfrac{x_1}{x_2}$, если $x_1 = -x_2$ или $-x_1 = x_2$. Эта точка есть на проективной прямой в точке $M_\infty(-1)$.

Таким образом, используя методы начертательной геометрии можно описать оригинал проективной прямой:

а) Оригинал проективной прямой может располагаться на: конической поверхности, с вершиной в точке S_1 и направляющей проективной прямой, если аппарат проецирования будет состоять из двух связок прямых с собственными центрами S_1 и S_2. Каждая точка оригинала будет лежать на одной образующей конической поверхности, две точки ∞ и $-\infty$ будут лежать одновременно на одной образующей конической поверхности.

б) Оригинал проективной прямой может лежать на цилиндрической поверхности с направляющей проективной прямой и аппаратом проецирования состоящим из двух связок прямых с центрами S_1^∞ и S_2^∞ в несобственных точках.

Использованные литературные источники:

1. . Г.Кантор Учение о множествах. СПТ.: Образование.1914. -189 с.
2. Ф. Клейн Элементарная математика с точки зрения высшей. Т. I.- М.: Наука. 1987. - 431 с., Т. II.- М.: Наука.1987. - 416 с.
3. Ф. Клейн Высшая геометрия. - М.-Л. 1939. 399 с.
4. Вертинская Н. Д. Математическое моделирование на основе конструктивной начертательной геометрии. - Иркутск: ИПИ . 1992. - 130 с.
5. Вертинская Н.Д. Математическое моделирование многофакторных и многопараметрических процессов в многокомпонентных системах на базе конструктивной геометрии. Ч. I. Лекции. Иркутск: ИрГТУ. 2009. - 229 с.
6. Вертинская Н. Д. Математическое моделирование многофакторных и многопараметрических процессов в многокомпонентных системах. Иркутск: ИрГТУ.- 2001. - 289 с.
7. Ф. Клейн Неевклидова геометрия. М.-Л.: ОНТИ – НКТП – СССР. 1936. - 355 с.
8. Андреев К.А. Аналитическая геометрия.- М. 1905. - 610 с.
9. Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии. – М. 1968.- 911 с.