Эволюционная нестационарная модель распределения персонального дохода

Целью этой работы является установление распределения персонального дохода на основе элементарных составляющих свободного рынка. В первую очередь общих благ, продуктов, и агентов, формирующих экономическую сеть. Экономика рассматривается как самоорганизующаяся система. Динамика экономики описывается медленными модами. Данная модель предполагает, что на коротких временных интервалах существует постоянное соотношение между полным трудовым доходом (капитальным (или главным) доходом) и чистым доходом (соотношение Кобба-Дугласа). Закон Гибрата явно выводится из эволюционной динамики рынка с краткосрочными флуктуациями. Показано, что распределение полного частного дохода состоит из четырёх частей. Распределение источников капитальных прибылей частных фирм содержит логнормальное распределение для маленьких прибылей и распределение Парето для больших доходов. Трудовой доход экспоненциально распределен. Также учтен доход от системы социального страхования, приближённо описанный как пик функции Гаусса. Эволюционная модель может воспроизвести общепринятые факты распределения дохода. Это показано сравнением с выборочными данными распределения доходов. Данная теория предполагает, что на свободном рынке конкуренция между товарами является главным источником неравномерности распределения дохода.

Ключевые слова: мультипликативный случайный процесс, закон Гибрата, эволюция, самоорганизация, конкуренция.

Введение

Исследование распределения дохода имеет долгую историю. Независимо от различий в культуре, языке, стране или истории, наблюдается, что распределение дохода следует универсальной модели [1]. Парето предположил, что распределение дохода подчиняется степенному доходу [2]. Однако последующие исследования обнаружили, что это соотношение применимо только к верхнему доходу 1-3% населения. Гибрат предположил, что распределение дохода большинства населения следует логнормальному распределению, вызванному мультипликативным процессом роста [3]. Недавно Яковенков и Драгулеску обнаружили, что распределение низшей части персонального дохода больше определено экспоненциальным распределением (распределением Гиббса-Больцмана) [4]. Как явно выведено из динамики свободного рынка, все это описывает специфическую часть распределения дохода[1].

Ключевая идея модели заключается в рассмотрении экономики как самоорганизующейся системы, состоящей из сети агентов, переносящих деньги. Теория описывает экономический оборот благ. Существует несколько вариантов благ – товары, брэнды, ... Элементарные единицы модели – агенты, образующие экономическую сеть и продукты (блага).

В синергетическом подходе к самоорганизации, динамика самоорганизующейся системы главным образом определена её медленно меняющимися переменными, так называемыми медленными режимами [5]. Так как эволюция быстро меняющихся переменных подчиняется ограничениям, создаваемым медленными режимами модели. Один вид ограничения, относящийся к медленным режимам, определяется сохраняющимися величинами. Однако, в экономических системах многие перемены сохраняются только в течение коротких промежутков времени. Поэтому, произведено разделение временных шкал на короткую и длинную временные шкалы. Для коротких временных интервалов законы сохранения могут быть выведены для полного числа агентов N экономической сети, полного количества (текущих) денег M и для полного количества вариантов продукта K. Эта модель принимает во внимание, что поставщик рынка создаёт дополнительный медленный режим, увеличивая суммарные мощности. Это происходит вследствие того, что возрастание мощностей сопряжено с инвестициями, занимающими много времени.

Стандартная микроэкономика предполагает, что рынок находится в равновесии, когда полное предложение равен полному спросу. Однако представленная модель предполагает, что рынок находится в стабильном состоянии только, когда средняя цена соответствует небольшому избытку предложения. Причиной этого является, что только избыточное предложение соответствует конкуренции между товарами. Конкуренция, в свою очередь, – это источник воспроизводства лучше всего продающихся товаров и, следовательно, процесса эволюционного роста единичных продаж [6]. Как выведено ниже, единичные продажи определяются динамикой репликатора, в которой каждый продукт может быть охарактеризован пригодностью. Другими словами, товар ведёт себя подобно видам экологической системы в соответствии с Модисом [7] . В то время как Модис рассматривал товары, как если бы они имели постоянную пригодность, данная модель принимает во внимание стохастические флуктуации пригодности. Единичные продажи в данном случае подчиняются мультипликативному процессу, такому, в котором эти продажи растут пропорционально предыдущим продажам. Это соотношение известно в экономической литературе как «закон соразмерного эффекта», введённый Гибратом [3]. Однако показано, что закон Гибрата применяется напрямую только к товарам, но не к фирмам, поскольку фирмы обычно продают несколько товаров. Фирмы больше чем просто сумма их продуктов. Они могут пользоваться преимуществами размера для создания и покупки новых брендов. В биологической классификации фирмы не виды, а скорее классы. А про биологические классы известно, что их рост подчиняется дополнительному процессу, называемому преимущественным приспособлением. Принимая во внимание этот эффект, размеры фирм с точки зрения единичных продаж показывают логнормальное распределение для маленьких фирм и степенное распределение для крупных фирм, как показано в [8, 18]. Поскольку прибыль (частных) фирм пропорциональна их продажам, этот результат подразумевает, что частные фирмы имеют распределение дохода, которое является логнормальным с основанием Парето.

Однако далее за частными фирмами следуют другие группы, получающие прибыль. Главная группа – получатели зарплаты. Сотрудники фирмы не являются прямыми конкурентами, поскольку современные технологии основаны на разделении труда. Личный доход сотрудников – это результат индивидуальных переговоров. Как показано ниже, трудовой доход может быть описан распределением Гиббса-Больцмана. В данную модель также включён доход от системы социального страхования. Далее описывается динамика свободного рынка и выводится распределение личного дохода. Применимость этой модели, анализируется сравнением с данными о распределении дохода.

Модель

Представленная модель создана для экономики с закрытым рынком. Рынок построен из сети агентов, переносящих деньги. Для того чтобы построить качественную картину распределения личного дохода, рассмотрим рыночную экономику общего потребительского блага. Это благо производится фирмами и покупается потребителями, образуя экономический кругооборот.

Начнём с введения двух горизонтов времени, короткий временной масштаб τ и длинный временной масштаб t, связаны:

$$t = \varepsilon\tau \qquad (1)$$

где ε<<1. Короткие временные интервалы обычно порядка месяцев, в то время как длинные – порядка лет. Короткий временной масштаб выбирается таким образом, чтобы выполнялись следующие условия:

(i). Число агентов, формирующих экономическую сеть было бы примерно постоянным:

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{d\tau} \cong 0 \qquad (2)$$

(ii). Номинальный объём денег в закрытой экономике равен:

$$M_t = \sum_{j=1}^{N} M_j \qquad (3)$$

где индекс j обозначает агента. В течение короткого периода времени финансовая система создаёт (уничтожает) количество денег dM. Второе условие заключается в том, что в коротком временном интервале изменением денежной массы можно принебречь:

$$\frac{1}{M_t}\frac{dM_t}{d\tau} \cong 0 \qquad (4)$$

M_t в данном случае относится преимущественно к сумме обесценивающихся денег, выпущенных центральным банком, известной в стандартной экономике как M_1.

(iii). Суммарные мощности, а следовательно, и поток общего предложения S_t единиц общего блага в единицу времени предполагаются постоянными на коротком временн*о*м масштабе:

$$\frac{1}{S_t}\frac{dS_t}{d\tau} \cong 0 \quad (5)$$

Это предположение основано на том опытном факте, что увеличение полного выпуска является занимающим много времени.

(iv). Общее благо *K* - несколько различных вариантов продуктов и брэндов. Предположим, что число продуктов примерно постоянно:

$$\frac{1}{K}\frac{dK}{d\tau} \cong 0 \quad (6)$$

(v) Существует достаточное число денежных транзакций между агентами в течение короткого времени, поэтому распределения релаксируют к своим стационарным состояниям.

Для создания непрерывной модели, экстенсивные переменные масштабируются общим числом агентов. Соответствующие плотности (интенсивные переменные) обозначены малеькими буквами. Отсюда, $m_j = M_j/N$ – это относительное количество денег, принадлежащих *j*-ому агенту, в то время как $m_t = \Sigma m_j$ – общее количество денег.

Источники дохода

В соответствии с ограничениями (i) и (ii), обмен деньгами подчиняется закону сохранения. Количество денег *j*-ого агента увеличивается с притоком и уменьшается с оттоком в соответствии со следующим балансом:

$$\frac{dm_j}{d\tau} = i_j - o_j \quad (7)$$

где i_j – приток (доход), а o_j – отток (расход) денег *j*-ым агентом.

Следуя стандарнтым взглядам неоклассической теории, предположим, что главный процесс притока денег вызван экономическим обращением, являющимся резутатом производства и обмена общего блага. Процесс перетока денег разделяет агентов на разные группы, которые могут быть охарактеризованы по их источнику дохода. Для сохранения простоты модели, мы рассматриваем только три основных источника прибыли.

1. Капитальная прибыль:

Существуют агенты, создающие поток денег, продавая товары. Обозначим соответствующих агентов как фирмы. Для фирм уравнение (7) приобретает вид:

$$\frac{dm_j}{d\tau} = \kappa_j = g_j - tx'_j - e'_j \quad (8)$$

В этом соотношении κ_j – это сбережения в единицу времени, а tx'_j показывает соответствующие налоговые, страховые платежи, гранты *j*-ого агента. Переменная e'_j определяет частные расходы фирмы на общественное благо. Прибыль фирм определяется их доходом, который равен:

$$g_j = r_j - c'_j \quad (9)$$

где r_j – выручка, а c'_j – затраты. Прибыль фирмы обозначается как доход от капитала, h=g.

Фирмы тратят доход на общественное благо, но также и на инвестиции в средства производства, в том числе и на увеличение мощностей. Следуя стандартной микроэкономике разделим общественное потребительское благо и дополнительные средства производства, обмениваемые только между фирмами. Выручка и затраты от средств производства обозначены как r^*_j и c^*_j. Выручка от общественного блага и стоимость труда обозначены, как e_j и w_j, соответственно. Отсюда, доход *j*-ой фирмы становится равным:

$$g_j = e_j + r*_j - w_j - c*_j \quad (10)$$

Поскольку средства производства обмениваются только между фирмами, для финансового потока, вызванного средствами производства, мы получим:

$$\sum_j^{N_F} r*_j - c*_j = 0 \quad (11)$$

где сумма рассчитывается для общего количества фирм N_F. Финансовый поток между фирмами, вызванный средствами производства предположен малым в (iii), и поэтому им пренебрегли здесь.

Фирмы могут быть классифицированы как открытые акционерные общества N_{CF}, так и закрытые N_{PF}. Поэтому общее количество фирм дано как:

$$N_F = N_{CF} + N_{PF} \quad (12)$$

2. Трудовой доход

В современной рыночной экономике большое количество агентов наняты компаниями. Для таких агентов уравнение (7) превращается:

$$\frac{dm_j}{d\tau} = \sigma'_j = w_j - e''_j - tx''_j \quad (13)$$

Здесь σ'_j – сбережения в единицу времени, w_j – зарплата, e''_j – частные расходы на общественное благо, и tx'_j – налоговые отчисления *j*-ого агента. Источник дохода обозначен как трудовой доход, h=w. Общее число наёмных работников равно N_E

Система социального страхования

Предполагается, что оставшиеся агенты поддерживаются системой социального страхования. В этой страховой системе, часто управляемой государством, деньги (налог) собираются с наёмных работников и фирм, и переводятся безработным агентам. Этот трансферт создает поток прибыли для безработных агентов, h=tx. Финансовый баланс таких агентов определяется как:

$$\frac{dm_j}{d\tau} = \sigma''_j = tx_j - e'''_j \quad (14)$$

Где σ'_j – соответствующие сбережения в единицу времени, а e''_j – расходы безработных агентов, когда их общее количество равно N_{UE}.

Однако поток налогов напрямую не связан с экономическим обращением. Для сохранения простоты модели, предполагается, что правительство, как крупнейший агент, имеет сбалансированное хозяйство, так, что:

$$\sum_j tx_j - tx'_j - tx''_j = 0 \quad (15)$$

Другими словами, мы хотим изучить универсальные свойства структуры дохода без влияния политических решений.

Экономическое обращение

Экономическое обращение – это финансовый поток, отнесённый к общественному благу. Из уравнений (8) и (13) мы получаем соотношение баланса:

$$e_t = g_t + w_t \quad (16)$$

В то время как полные расходы на благо представлены $e_t = \Sigma(e'_j + e''_j + e'''_j)$, общая зарплата равна $w_t = \Sigma w_j$ и общая выручка равна $g_t = \Sigma g_j$. В неоклассической модели e $_t$ представляет чистую прибыль, которая приблизительно соответствует валовому внутреннему продукту (ВВП).

Из уравнения (4) следует ограничение:

$$\frac{dm_t}{d\tau} = \kappa_t + \sigma_t \cong 0$$
(17)

где мы используем уравнение (15) и выражения $\sigma_t = \Sigma(\sigma'_j + \sigma''_j)$ и $\kappa_t = \Sigma\kappa_j$, соответственно. Этот результат предполагает, что нет дополнительного дохода, производимого созданием денег (сеньораж). Это означает, что агенты финансовой системы (банки) рассматриваются в этом приближении, как акционерные компании.

Распределение дохода

В отношении источников дохода, индивидуальные агенты могут быть классифицированы в этой модели на три группы: частные фирмы, наёмные работники и безработные агента. Общее количество субъектов тогда дано как:

$$N_p = N_{PF} + N_E + N_{UE}$$
(18)

где соответствующие плотности равны:

$$n_{PF} = \frac{N_{PF}}{N_p}; n_E = \frac{N_E}{N_p}, n_{UE} = \frac{N_{UE}}{N_p}$$
(19)

Целью модели является вывести, хотя бы качественно, распределение персонального дохода P(h). Оно определяет вероятность того, что агент, являющийся частным лицом, имеет доход в интервале между h и h+dh. Ограничение (v) позволяет применить статистические методы таким образом, что стабильное распределение дохода эволюционирует с постоянными средними значениями на коротких промежутках времени.

Распределение полного дохода подчиняется следующему выражению:

$$P(h) = n_{PF} P_F(h) + n_E P_E(h) + n_{UE} P_{UE}(h)$$
(20)

где P_F, P_E, P_{UE} показывают вклады от частных фирм, наёмных работников и безработных в распределение персонального дохода. Поскольку эти три ресурса дохода подчиняются различной динамике, нам прийдётся установить три распределения дохода, рассматривая плотности, определённые в уравнении (19), постоянными на коротких временных масштабах.

Альтернативные формы дохода считаются малыми по сравнению с тремя главными формами, так что ими можно пренебречь. Поскольку распределение персонального дохода в основном определяется обменом общественного блага, мы начнём с изучения эволюционирования свободного рынка в коротком временн*о*м масштабе.

Свободный рынок

Потребительские товары могут быть разделены на товары длительного пользования с продолжительным временем жизни (порядка лет) и товары короткого пользования (порядка недель). Хотя они могут меняться различно в большом временном масштабе, они могут быть рассмотрены одинаковым образом в коротком временн*о*м масштабе. Поскольку мы заинтересованы в качественном описании распределения персонального дохода, то вполне достаточно изучать распределение дохода, которое является результатом экономического обращения. Мы начнём с рассмотрения предложения и спроса на статичном свободном рынке, прежде чем динамика свободного рынка будет создана.

Статичный рынок

Предложение

Сторона предложения свободного рынка определяется числом различных вариантов продуктов общественного блага, обозначенных индексом k. Они создаются и распространяются фирмами, когда общее количество различных брэндов равно K. Абсолютное число проданных единиц k-ого брэнда в единицу времени равно Y_k, а абсолютное число предлагаемых продуктов в единицу времени равно S_k. Соответствующие плотности могут быть записаны как $y_k=Y_k/N$ и $s_k=S_k/N$.

Финансовое значение k-ого продукта определяется его номинальной ценой p_k. Средняя цена определена как:

$$\langle p \rangle = \frac{1}{y_t}\sum_{k=1}^{K} y_k p_k \qquad (21)$$

Скобки обозначают среднее по количеству проданных единиц. Общие единичные продажи могут быть получены из:

$$y_t = \sum_{k=1}^{K} y_k \qquad (22)$$

Однако фирмы, как агенты, предлагают обычно несколько продуктов. Мы потребуем обозначить отдел фирмы, ответственный за один брэнд, как хозяйственную единицу. Единичные продажи l-той фирмы x_l определяются как:

$$x_l = \sum_{k} y_k \qquad (23)$$

где сумма рассчитывается по числу хозяйственных единиц фирмы.

Выручка за единицу k-го продукта определена как:

$$\pi_k = p_k - c_k(s_k) \qquad (24)$$

где рассматривается цена продукта определённая динамикой рынка. Однако хозяйственные единицы имеют существенное влияние на затраты и продукцию. Поэтому отнесемся к единичным затратам как к явной функции выработки. Фирмы имеют тенденцию к максимизации выручки за единицу по отношению к выработке:

$$\frac{d\pi_k}{ds_k} = -\frac{dc_k}{ds_k} \cong 0 \qquad (25)$$

Это означает, что они стараются минимизировать единичные затраты. Полные затраты хозяйствующей единицы c'_k могут быть разложены в ряд как функция выработки как:

$$c'_k(s_k) \cong c_{0k} + c_{1k}s_k + c_{2k}s_k^{\ 2} + \ldots$$
(26)

где первый член представляет постоянные затраты, а остальные члены являются переменными затратами $c0_k$,$c1_k$, $c2_k$ >0. Заметьте, что в стандартной микроэкономике сочетание капитала и труда имеет максимальную продуктивность при конкретной выработке. Поэтому разложение в ряд выполнено до третьего члена, для того чтобы получить функцию производства, подчиняющуюся закону снижающейся выручки. Это, однако, не относится к дальнейшей аргументации, поскольку в качестве элементарных составляющих здесь рассмотрены единицы продуктов.

Затраты на единицу равны:

$$c_k(s_k) = \frac{c'_k(s_k)}{s_k} = \frac{c_{0k}}{s_k} + c_{1k} + c_{2k}s_k$$
(27)

При применении уравнения (25) затраты на единицу имеют минимум при оптимальной выработке:

$$s_k = \sqrt{\frac{c_{0k}}{c_{2k}}}$$
(28)

которую примем за предел выработки хозяйственной единицы. Точка минимума затрат на единицу соответствует примерно максимальной продуктивности. Поиск максимальной выручки обозначает поэтому, что полное предложение имеет порядок:

$$s_t \cong \sum_{k=1}^{K} s_k$$
(29)

а соответствующие полные затраты определяются затратами на пределе мощности:

$$c'_t = \sum_{k=1}^{K} c_k s_k$$
(30)

Покупатели

Покупатели - совокупность агентов, заинтересованных в приобретении блага, имеющего рыночный потенциал. Процесс покупки может быть разделён на первую покупку и повторную покупку. Поскольку мы фокусируемся на коротком временном периоде, явное рассмотрение первых покупок, так называемого диффузионного процесса, не является необходимым. Предположим, что заинтересованные агенты, называемые потенциальными потребителями, появляются в коротком временн*о*м масштабе как функция средней цены со скоростью полного спроса $d_t(<p>)$. В явном виде скорость спроса выведена в [6]. Следуя стандартной микроэкономике, мы просто предполагаем, что полный спрос уменьшается при возрастании средней цены:

$$\frac{d\left[d_t(\langle p\rangle)\right]}{dp} < 0$$
(31)

Динамика рынка

Динамика предложения

Основной процесс на стороне предложения – это производство и распространение блага фирмами (соответствующими хозяйствующими единицами).

Динамика предложения подчиняется балансу между предложением и потоком покупок единиц продукта. Он определяется плотностью доступных единиц k-го продукта, хранящихся на складах производителей и продавцов. Этот баланс равен:

$$\frac{dz_k}{d\tau} = s_k - y_k = \gamma_k y_k$$
(32)

где γ_k обозначает коэффициент воспроизводства. Общее число доступных единиц продуктов z_t поэтому возрастает с:

$$\frac{dz_t}{d\tau} = \langle \gamma \rangle y_t$$
(33)

где $\langle\gamma\rangle$ – средний коэффициент воспроизводства. Проанализируем случай $\langle\gamma\rangle>0$ и обсудим противоположный случай. Поток полного предложения равен:

$$s_t = (1 + \langle \gamma \rangle) y_t$$
(34)

Для положительного значения коэффициента воспроизводства, полная выручка от общего блага может быть записана как:

$$g_t = \sum_k p_k y_k - c_k s_k = \langle p \rangle y_t - \langle c \rangle y_t (1 + \langle \gamma \rangle) = (\langle \pi \rangle - \langle c \rangle \langle \gamma \rangle) y_t$$
(35)

где мы использовали приближение $\langle c\gamma\rangle \approx \langle c\rangle\langle\gamma\rangle$. Это соотношение предполагает, что выручка может быть максимизирована, когда избыточное производство, пропорциональное $\langle\gamma\rangle$, мало. Поэтому для максимизации прибыли хозяйственных единиц средний коэффициент воспроизводства будет малой переменной в коротком временн*о*м масштабе:

$$\langle \gamma \rangle \sim \varepsilon$$
(36)

где $\varepsilon>0$. Это утверждение предполагает, что полное предложение примерно равно полным продажам:

$$s_t = (1 + \langle \gamma \rangle) y_t \cong y_t$$
(37)

Короткий временной масштаб выбирается таким образом, чтобы полная мощность рынка s_t была приблизительно постоянной (iii). Это предполагает, что полные затраты c'_t также должны быть постоянными в коротком временн*о*м масштабе:

$$\frac{ds_t}{d\tau} = \frac{dc'_t}{d\tau} \cong 0$$
(38)

поскольку хозяйствующие единицы работают в среднем на пределе мощности.

Динамика спроса

Спрос определен потенциальными потребителями (агентами), которые хотят приобретать благо. Плотность потенциальных потребителей ψ(t) (число агентов, заинтересованных в приобретении блага, отнесённое к общему количеству агентов). Скорость создания потенциальных потребителей равна скорости полного спроса, как функции средней цены $d_t(\langle p \rangle)$. Потенциальные потребители исчезают при покупке блага с полной скоростью покупки y_t. Отсюда:

$$\frac{d\psi}{d\tau} = d_t(\langle p \rangle) - y_t = d_t(\langle p \rangle) - \frac{1}{(1+\langle \gamma \rangle)} s_t$$
(39)

использовано уравнение (37). Стационарная плотность потенциальных потребителей ψ определяется условием dψ/dτ=0. В стационарном состоянии поток полного предложения связан с потоком полного спроса для заданной средней цены:

$$s_t = (1+\langle \gamma \rangle) d_t(\langle p \rangle) \cong d_t(\langle p \rangle)$$
(40)

поскольку <γ> – малая величина. Соответствие предложения и спроса характеризуется в неоклассической модели, как рыночное равновесие.

Подчеркнем, что <γ>>0 соответствует конкурентному рынку, в то время как для <γ>≤0 конкуренция между товарами мала. Это становится ясным, когда мы рассматриваем ситуацию с постоянной <γ> ≤0. В этом случае рост спроса увеличивает предложение, из уравнения (33) следует, что число свободно доступных единиц уменьшается до нуля. Потребители больше не имеют выбора между разными продуктами и вынуждены покупать единицу, когда они могут достать её. Фирмы в свою очередь могут избавиться от всех своих единиц. Однако на свободном рынке состояние с $\langle\gamma\rangle \leq 0$ не может продолжаться долго, поскольку фирмы могут увеличить выручку через увеличение цены товара. Как результат, средняя цена не является постоянной и быстро вырастет, пока $\langle\gamma\rangle>0$. Только случайно рынок приближается к $\langle\gamma\rangle=0$. Для $\langle\gamma\rangle>0$ имеется конкуренция, поскольку потребители могут выбирать между разными единицами продукта, когда число доступных единиц медленно растёт со временем. Только в этом случае флуктуации в окрестности средней цены малы (см. Приложение С) и рынок приближается к стационарному состоянию на малых временн*ых* масштабах. Поэтому модель выводится для конкурентного рынка с $\langle\gamma\rangle\sim\varepsilon >0$. Стационарное состояние при средней цене, определённой уравнением (40), обозначается как квази-рыночное равновесие. Потому что стационарное состояние сдвигается на больших временах [6]. Поскольку полное предложение - медленный режим, изменения $\langle\gamma\rangle$ рассматриваются как малые, уравнение (40) предполагает, что и полный спрос, и полные продажи медленно меняются в рыночном квази равновесии:

$$\frac{ds_t}{d\tau} \cong \frac{dd_t(\langle p\rangle)}{d\tau} = \frac{dy_t}{d\tau} \cong 0$$
(41)

Из уравнения (41) следует, что средняя цена тоже медленно изменяется:

$$\frac{dd_t(\langle p\rangle)}{d\tau} = \frac{dd_t(\langle p\rangle)}{dp}\frac{d\langle p\rangle}{d\tau} \cong 0$$
(42)

использовано уравнение (31). Анализ стабильности в приложении А. Оказалось, что для постоянной скорости спроса стационарное состояние (квази-рыночное равновесие) всегда стабильно в коротком временн*о*м масштабе.

Процесс продаж

Главная идея моделирования процесса продаж заключается в рассмотрении процесса покупок товаров как статистических событий, где потенциальные потребители сталкиваются с доступными единицами k-ого брэнда и покупают их с определенной вероятностью. Единичные продажи y_k должны равняться нулю либо если нет потенциальных покупателей, либо доступных единиц. При разложении в ряд единичных продажи k-го брэнда до первого члена, y_k должны быть пропорциональны произведению обеих плотностей. Следовательно, события покупки происходят с частотой:

$$y_k \cong \eta_k z_k \psi(p_k) \tag{43}$$

где постоянная норма $\eta_k>0$ задаёт средний успех k-го продукта и обозначает параметр предпочтения. Этот параметр характеризуется полезностью товара и пространственной доступностью брэнда.

Соотношение Кобба-Дугласа

Из уравнений (38) и (41) следует, что средние единичные затраты $\langle c\rangle = c'_t/y_t$ постоянны. Как следствие, общая выручка, которая подчиняется выражению:

$$g_t = \langle \pi \rangle y_t \cong \langle p \rangle y_t - \langle c \rangle y_t \tag{44}$$

а также средняя единичная выручка $\langle\pi\rangle$ должны быть постоянными.

Запишем чистую прибыль от продаж общественного блага как:

$$e_t = \langle p \rangle y_t \tag{45}$$

сравнение уравнений (44) и (16) даёт:

$$w_t = \langle c \rangle y_t \tag{46}$$

Поскольку g_t и e_t – постоянны, полный зарплатный доход w_t также должен быть постоянным в коротком временн*о*м масштабе. Отсюда мы получаем для соотношения:

$$\frac{w_t}{e_t} = \frac{\langle c \rangle y_t}{\langle p \rangle y_t} = \alpha \cong const$$
(47)

Это соотношение было получено опытным путём Коббом и Дугласом век назад [9]. Оно было использовано для создания подходящей функции производства в неоклассической теории. Мы обозначим уравнение (47) как соотношение Кобба-Дугласа. В то время как это соотношение выведено здесь для малых временных масштабов, исследования показывают, что оно выполняется на большом временном масштабе, не рассмотренном здесь. Это соотношение – результат стационарного рынка в коротком временн*о*м масштабе, а не следствие специфической формы производства.

В квази-равновесии средние затраты связаны со средней ценой:

$$\langle c \rangle = \alpha \langle p \rangle$$
(48)

Вместе с этим соотношением полная выручка равна:

$$g_t = \langle \pi \rangle y_t \cong (1-\alpha)\langle p \rangle y_t$$

(49)

что предполагает постоянный коэффициент доходности $\langle\pi\rangle/\langle c\rangle$.

Эволюционная динамика

Временная эволюция единичных продаж k-ой хозяйствующей единицы определяется производной по времени уравнения (43). Соответствующее приближение (Приложение B):

$$\frac{dy_k}{d\tau} \cong \psi(p_k)\eta_k\gamma_k y_k$$
(50)

Уравнение медленного режима (41) определяет ограничение для уравнения (50), которое может быть удовлетворено добавлением константы скорости роста ξ, так чтобы:

$$\frac{dy_k}{d\tau} = (f_k - \xi) y_k \cong 0$$
(51)

где введена функция:

$$f_k = \psi(p_k)\eta_k\gamma_k$$
(52)

Вычисляя сумму по всем брэндам, получим что:

$$\xi = \langle f \rangle = \frac{\sum_k y_k f_k}{y_t}$$
(53)

Из уравнения (51) эволюция продаж k-ого брэнда определяется:

$$\frac{dy_k(\tau)}{d\tau} \cong (f_k - \langle f \rangle) y_k(\tau)$$
(54)

Это соотношение известно как уравнение репликатора, где норма f_k – пригодность. Назовем f_k пригодностью продукта. Эта модель предполагает, что на свободном рынке товары испытывают эволюционную конкуренцию. Это прямое последствие избыточного предложения. В длительной перспективе недостаток потенциальных покупателей ведёт к адаптации товаров. Это означает, что товары высокого предпочтения, низкой цены и высокого качества предпочтительны для производства. Эволюция товаров обсуждается более детально в [6]. Запишем пригодность товара как:

$$f_k = \langle f \rangle + \delta f_k$$
(55)

где δf_k обозначает случайные флуктуации пригодности товаров. Тогда уравнением репликатора будет:

$$\frac{1}{y_k}\frac{dy_k}{d\tau} = \delta f_k(\tau)$$
(56)

Следовательно, эволюция единичных продаж подчиняется мультипликативному стохастическому процессу. Уравнение (56) выражает закон Гибрата соразмерных эффектов [3]. Закон Гибрата – модель, предполагающая стохастический характер темпов роста компании[16]. Это прямое последствие конкуренции между товарами в квази-рыночном равновесии. Основные флуктуации пригодности происходят из флуктуаций цены товара. Как показано в Приложении С, взаимодействие между флуктуациями пригодности и цены приводит к распределению цены по типу Субботина.

Распределение фирм по объёмам

Мы охарактеризуем размеры фирм по их единичным продажам. Поскольку фирмы состоят из нескольких хозяйствующих единиц, мы должны различать распределение по объёму хозяйствующих единиц (товаров) и соответствующих фирм.

Распределение товаров по объёму

Распределение товаров по объёму P(y) определено вероятностью обнаружить единичные продажи хозяйствующей единицы в интервале от y до y+dy. Как показано выше, единичные продажи товара определены стохастическим мультипликативным процессом, см. уравнение (56). Для случая, когда δf может считаться независимой распределённой случайной величиной предельная центральная теорема предполагает, что распределение хозяйствующих единиц по объёмам для достаточно длительных периодов времени равняется логнормальной функции распределения вероятностей:

$$P(y,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}\,\omega y} \exp\left(- \frac{\left(\ln(y/y_0) - u\tau\right)^2}{2\omega^2\tau} \right)$$

где u и ω – свободные параметры, а y/y_0 – размер хозяйствующей единицы в данный момент времени, отнесённый к размеру в момент времени t=0.

Распределение фирм по объёмам

Распределение коммерческих фирм по объёму P(y) определено вероятностью обнаружения единичных продаж фирмы в интервале от x до x+dx. Из-за того, что фирмы могут состоять из нескольких хозяйствующих единиц, распределение фирм по объёму будет расходиться с логнормальным распределением их хозяйствующих единиц. Для того чтобы вывести распределение фирм по объёмам, нам требуется установить соотношение для временной эволюции фирм.

С одной стороны, рост единичных продаж фирмы равняется временной производной уравнения (23):

$$\frac{dx_l(\tau)}{d\tau} \sim \sum_k \delta f_k y_k(\tau)$$

(58)

где использовано уравнение (56).

С другой стороны, фирмы имеют возможность расти путём добавления новых товаров. Это может быть сделано созданием новых товаров или слияниями и поглощениями. Однако в этом процессе роста крупные фирмы имеют существенное преимущество в сравнении с малыми фирмами. Они имеют, например, большие финансовые и НИОКР возможности, чем меньшие фирмы. Воспользовавшись результатами предыдущих исследований роста фирм, мы обозначим этот рост, зависимый от размера, как преимущественное приспособление [10-12]. Преимущественное приспособление может быть учтено через включение вклада, зависящего от размера, F(x) в уравнение (58):

$$\frac{dx_l(\tau)}{d\tau} = F(x_l) + \sum_k \delta f_k y_k(\tau)$$

(59)

В качестве первого приближения мы рассмотрим влияние преимущественного приспособления как небольшое, так что:

$$F(x) \cong ax$$
(60)

где a – маленькая норма, большая нуля *(a~ε)*.

Для решения уравнения (59) сделано два приближения:

1. Фирмы имеют превосходный товар, называемый денежной коровой [13]. Это главный источник дохода фирмы. Идея заключается в приближении суммы по всем товарам основным вкладом:

$$\sum_k \delta f_k y_k \cong \upsilon \delta f_k' x_l$$
(61)

где δf_k – флуктуации пригодности денежной коровы, а v – доля этого товара в отношении к суммарным единичным продажам фирмы.

2. Флуктуации пригодности в окрестности средней пригодности считаются белым шумом в коротком временном масштабе, таким образом, что флуктуации денежной коровы $v\delta f_k$‘$=\rho$ подчиняются случайной величине со средним значением и функцией корреляции по времени:

$$\langle \rho(\tau) \rangle_\tau = 0$$
$$\langle \rho(\tau), \rho(\tau') \rangle_\tau = 2D'\delta(\tau - \tau')$$

(62)

где D’ – амплитуда шума. Вместе с этими приближениями эволюция продаж фирмы превращаются в общее уравнение Ланжевена в форме:

$$\frac{dx}{d\tau} = F(x) + \rho G(x)$$
(63)

где G(x)=x. Это стохастическое уравнение может дать при решении степенной закон распределения (Приложение D):

$$P(x) \sim \frac{1}{x^{\left(1+\frac{a}{D}\right)}}$$

(64)

Поскольку предполагается, что механизм преимущественного приспособления мал для небольших фирм, им можно пренебречь для $x_l \to 0$. В приближении «денежной коровы» распределение фирм по объёму равно логнормальному для маленьких фирм. Для крупных фирм механизм преимущественного приспособления превращает логнормальное распределение в степенное распределение. Отсюда, распределение фирм по объёму предполагается быть логнормальным со степенной предэкспонентой [8].

Распределение персонального дохода

Распределение капитального дохода

Доход частных фирм определяется прибылью, g=h. Для качественного описания распределения прибылей частных фирм, мы воспользуемся уравнением (49) и приближением выручки фирмы g_l как:

$$g_l = \pi_l x_l = \left(\langle\pi\rangle + \delta\pi_l\right)x_l \cong \langle\pi\rangle x_l$$

(65)

где $\delta\pi_l$ – отклонение от среднего выручки от единицы товара l-той фирмы. Поскольку в соответствии с уравнением (44) средняя выручка является постоянной, в этом приближении выручка фирмы в основном определяется единичными продажами x_l. Распределение выручки может быть получено заменой переменных в распределении фирм по объёму. Из уравнения (57) мы получим для малых частных фирм:

$$P_{PF}(g) \sim \frac{1}{g} e^{-\ln^2\left(\frac{g}{g_0}\right)}$$

а для больших частных фирм из уравнения (64):

$$P_{PF}(g) \sim \frac{1}{g^{\lambda}}$$

с параметром λ>0.

Отсюда, вклад частных фирм в распределение персонального дохода – это логнормальное распределение для малых и степенное распределение для крупных частных компаний.

Распределение трудового дохода

В то время как капитальный доход определяется законом Гибрата, наёмные работники не являются прямыми конкурентами друг другу. Организация фирм основана на кооперации между сотрудниками. Индивидуальная зарплата определяется переговорами с работодателем. Для выведения распределения трудовых доходов пользуются уравнением (46). Предполагает, что полный трудовой доход w_t должен быть постоянным в коротком временн*о*м масштабе. Но зарплата агента не является постоянной. Она колеблется из-за, например, смены работы, случайных надбавок и т.п. Поэтому доход i-го получателя зарплаты может быть записан как:

$$w_j(\tau) = T + \Delta w_j(\tau)$$
(68)

где $T=w_t/n_E$ – постоянная средняя зарплата, а Δw_j – зависящие от времени флуктуации зарплаты *j*-ого агента. В первом приближении предполагают, что флуктуации зарплаты не коррелированы:

$$\left\langle \Delta w(\tau) \right\rangle_{\tau} = 0$$
$$\left\langle \Delta w(\tau), \Delta w(\tau') \right\rangle_{\tau} = 2Q\delta(\Delta\tau)$$

(69)

где корреляционная функция определена амплитудой белого шума Q. В этом случае может быть показано, что распределение трудовых доходов экспоненциально. Оно может быть выведено двумя способами.

1. Когда флуктуации зарплаты не коррелированы, зарплаты с наивысшим числом комбинаций имеют наибольшую вероятность [14]. Поскольку зарплата строго положительна, а полный зарплатный доход w_t постоянен, получается, что плотность вероятности трудового дохода должна иметь форму (приложение E):

$$P_E(w) \sim \exp(-w)$$
(70)

2. Этот результат также может быть получен в предположении, что существуют два противоположных потока дохода, которые порождают квази-рыночное равновесие. С одной стороны, тенденция к увеличению зарплат увеличивает трудовые доходы наёмных работников. С другой стороны, работодатели минимизируют затраты на единицу товара. Это сокращает зарплаты, уменьшая нисходящий трудовые доходы. В представленном приближении оба потока компенсируют друг друга, поэтому средний доход постоянен. Оба потока могут быть интерпретированы как результат противоположных обобщённых сил. Работодатели (в России, работники(на Диком Западе)) всегда стремятся сократить единичные затраты независимо от прибыли, как показывает уравнение (25). Для обобщённой силы *F’* постоянного среднего порядка нисходящий поток может быть отнесён к обобщённому потенциалу *V’(w)* как:

$$F' = -\frac{dV'(w)}{dw}$$
(71)

с потенциалом:

$$V'(w) \sim w$$
(72)

Восходящий поток, в свою очередь, - это результат некоррелированных флуктуаций. Изменение зарплатного дохода, поэтому может быть записано, как обобщённое уравнение Ланжевена в форме:

$$\frac{dw}{d\tau} = -\zeta \frac{dV'(w)}{dw} + \Delta w$$
(73)

где первое слагаемое представляет поток к нулевому доходу, вызываемый работодателями, со средней скоростью ζ. Второе слагаемое – это результат случайных флуктуаций зарплатных доходов, ведущих к диффузионному восходящему потоку. Вместе с уравнением (69) для стохастического слагаемого, уравнение Ланжевена соответствует уравнению Фоккера-Планка со стационарной функцией распределения трудового дохода в форме уравнения (70) [14].

Распределение полного персонального дохода

Распределение полного дохода по уравнению (20) состоит из трёх источников дохода. Распределение капитального дохода h=g состоит из логнормального вклада при малом доходе:

$$P_{PF}(h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_F h} e^{\left(\frac{-\ln^2\left(\frac{h}{h_0}\right)}{2\sigma_F^2}\right)}$$
(71)

со свободными параметрами h_0 и σ_F и членом Парето:

$$P_{PF}(h) = \frac{C_{PF}}{h^{\lambda}}$$
(72)

с экспонентой степенного закона λ и нормирующим коэффициентом C_{PF}.

Распределение трудового дохода определяется уравнением (70) с $h=w$. Отсюда:

$$P_E(h) = \frac{1}{T}\exp\left(-\frac{h}{T}\right)$$
(73)

где T – средний зарплатный доход.

Последний член в уравнении (20) определяется тем, как организовано страхование по безработице. Это меняется для разных стран. Для простоты мы предполагаем, что безработные получают в среднем фиксированный доход. С этим предположением распределение доходов безработных становится дельта-функцией Дирака для среднего дохода h_{UE}:

$$P_{UE}(h) \cong \delta(h_{UE}) + \Delta h$$
(74)

возмущённой случайными флуктуациями Δh. Центральная предельная теорема предполагает, что дельта-функция приближается к нормальному распределению для флуктуаций [5].

Отсюда, вклад безработных агентов может быть приближен нормальным распределением, который мы назовём «страховой пик»:

$$P_{UE}(h) \cong \frac{1}{\sigma_{UE}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{h-h_{UE}}{\sigma_{UE}}\right)^2}$$
(75)

и σ_{ue} – соответствующее стандартное отклонение.

Эти вклады определяют распределение персонального дохода по уравнению (20) качественно. Опытное распределение дохода может быть аппроксимировано с использованием семи неизвестных параметров распределений и тремя неизвестными параметрами уравнения (19).

Сравнение с опытными данными

Представленная эволюционная модель производит качественную картину распределения полного персонального дохода. Она предполагает, что это распределение состоит из трёх главных слагаемых.

1. Доход от средств производства вносит логнормальное распределение для малых доходов и степенное распределение для больших доходов.

2. Трудовой доход подчиняется экспоненциальному распределению.

3. Доход от пособия по безработице может быть аппроксимирован нормальным распределением вокруг фиксированного дохода («страховой пик»).

Как упомянуто выше, часть Парето распределения достаточно высокого дохода хорошо известна, и не обсуждается здесь дополнительно [1, 2, 17]. Присутствие логнормального или экспоненциального распределения – это тема предстоящего обсуждения. Эта модель предполагает, что оба слагаемых должны быть очевидны для индустриализованных стран. Для того чтобы показать применимость модели, рассмотрен пример нижней части распределения дохода, полученного с высоким разрешением [15]. Опытные данные аппроксимируются уравнением (20). Эта аппроксимация является суммой логнормального распределения дохода от средств производства, экспоненциального распределения трудового дохода и страхового пика. Плотности трёх слагаемых суммируются в одну, поскольку слагаемое Парето опущено. Интервал, соответствующий очень маленькому доходу, однако, ниже страхового пика и это означает, что этот доход недостаточен для выживания и не рассмотрен в этой модели. Существуют другие опытные данные, подтверждающие эволюционную теорию. Например, доход от средств производства определяется распределением фирм по объёму. Этот вклад состоит из логнормального распределения для малых компаний и степенного распределения для крупных фирм. И наоборот, поскольку единичные продажи товаров равны затратам потребителей, распределение затрат на товар должно быть логнормальным, как известно.

Заключение

Эволюционный подход предполагает, что (на малых временных интервалах) число агентов, полная сумма денег и количество товаров общественного блага могут рассматриваться как постоянные величины. Финансовый поток экономики преимущественно содержится в экономическом обмене общественного блага. На коротких промежутках времени, поток денег, вложенных в увеличение производительности, слишком мал, чтобы вызвать рост предложения. Поэтому s_t является медленным режимом на кривой постоянного предложения.

Адаптация полного спроса к оптимальному потоку производства (предел мощности) происходит через среднюю цену. Для увеличения выручки фирмы отвечают на краткосрочные флуктуации спроса такими флуктуациями цены, что они увеличивают цену товара, когда единичные продажи увеличивают мощности и наоборот (Приложение С). Отсюда, когда полный спрос увеличивает полное предложение ($<\gamma><0$), увеличение цен на товары ведёт к увеличению средней цены. В то время, как подобный взгляд согласуется с неоклассической теорией, представленная модель предполагает, что средняя цена стабильна только, когда существует небольшой избыток полного предложения ($<\gamma>>0$). Причиной тому является стабильность ценового распределения только для $<\gamma>>0$, потому что конкуренция между товарами восстанавливает ценовые флуктуации δр в окрестности среднего значения. Соответствующее распределение цены $P(\delta_p)$ выведено в Приложении С, как имеющее схожее с распределением Субботина, приближённым для больших флуктуаций в стабильном режиме уравнением (С9). Для $<\gamma><0$ ценовое распределение неустойчиво в силу уширения распределения и увеличения средней цены. Представленная эволюционная модель выведена для конкурентного рынка в стабильном режиме $<\gamma>>0$.

Эволюция цены во времени с маленькими флуктуаций характеризуется тем, что временные интервалы относительной устойчивости прерываются большими изменениями цены, когда рынок входит в нестабильный режим. Эволюция цены на общественное благо поэтому подчиняется само подобной структуре периодов стабильности и нестабильных флуктуаций, подобных опытным данным, найденным для краткосрочных товаров. Эволюция цены соответствует таковой, которая устанавливается в моделях скачок-диффузия.

В квази-рыночном равновесии, медленный режим предложения вызывает замедление средней цены, средних единичных затрат и общих продаж единицы товара. Это означает постоянное соответствие между трудовым (капитальным) доходом и суммарными расходами, обозначенное как соотношение Кобба-Дугласа.

Это соотношение является следствием стационарного рынка в коротком временн*о*м масштабе, а не результатом специфической формы производства.

Конкуренция между товарами – это результат (маленького) избытка предложения. Конкуренция вынуждает сторону предложения производить преимущественно товары, которые преимущественно выбираются покупателями. Этот эволюционный процесс подчиняется динамике репликатора единичных продаж. Представленная модель использует эти соображения для выведения распределения персонального дохода.

Для выведения распределения суммарного частного дохода, необходимо учесть, что доход фирм и получателей зарплаты подчиняется различной динамике. Фирмы обычно предлагают товары, произведённые их хозяйствующими единицами. Поскольку, конкуренция между товарами подчиняется динамике репликатора, единичные продажи товаров испытывают множественный процесс роста, известный в экономической литературе, как закон Гибрата. Этот процесс роста создаёт логнормальное распределение по объёму для маленьких компаний. Для больших компаний, однако, в силу механизма преимущественного приспособления, возникает закон степенного распределения. Из-за существенной зависимости выручки компаний от их размера (в единичных продажах), распределение дохода частных фирм должно быть логнормальным с Парето предэкспонентой. Распределение дохода от получателей зарплаты не подчиняется конкуренции, поскольку современные технологии основаны на разделении труда. Конкуренция возникает между технологиями, но доход для заданной технологии распределён в соответствии с переговорами между наёмными работниками и работодателями. Соотношение Кобба-Дугласа предполагает, что суммарный доход по зарплате должен быть постоянным в коротком временн*о*м масштабе. Распределение дохода получателей зарплаты тогда может быть охарактеризовано экспоненциальным распределением. Принимая во внимание поток дохода, созданный системой социального страхования, в форме «страхового пика» Гаусса, суммарное распределение дохода может быть создано качественно. При сравнении предсказанного и опытного распределения дохода высокого разрешения, модель показывает хорошее качественное согласие с опытными данными. Эволюционная модель позволяет понять неравномерное распределение дохода, обнаруженное в опытных данных. Закон Гибрата – это прямое последствие конкуренции между фирмами. Принимая во внимание преимущественное приспособление, закон Гибрата создаёт распределение Парето для больших доходов и логнормальное распределение для малых доходов частных компаний. Заметьте, что теория примиряет конкуренцию между логнормальным слагаемым и экспоненциальным слагаемым в распределении дохода. Она предполагает, что они существуют одновременно. Зависит от соотношения между частными компаниями и получателями зарплаты, какой вклад преобладает. Представленная эволюционная теория предполагает, что конкуренция между товарами приводит к адаптации товаров к покупательским запросам. Однако конкуренция также является причиной неравномерного распределения дохода.

Приложение А

Нам требуется изучить здесь стабильность квази-рыночного равновесия относительно небольших флуктуаций в коротком временном масштабе. Для стационарного состояния уравнение (43) предполагает:

$$d(\langle p \rangle) = \psi(\langle p \rangle)\langle \eta \rangle_z z_t$$
(A1)

Поэтому цена товара p_k, для которого брэнд доступен, ограничивает плотность потенциальных потребителей $\psi(p_k)$. Раскладывая в ряд цену в окрестности средней цены, получим:

$$p_k(\tau) = \langle p \rangle + \delta p_k(\tau)$$
(A2)

Плотность потенциальных потребителей может быть записана как:

$$\psi(p_k(\tau)) = \psi(\langle p \rangle) + \delta\psi_k(p_k(\tau))$$
(A3)

где последнее слагаемое показывает флуктуации плотности потенциальных потребителей вокруг стационарного значения. Суммируя по всем товарам блага, получим для суммарных единичных продаж:

$$y_t = (\psi(\langle p \rangle) + \delta\psi)\langle \eta \rangle_z z_t$$
(A4)

где скобки с индексом z указывают на среднее по доступным товарам, $z_t = \Sigma z_k$, также принято $\delta\psi_k \approx \delta\psi$. Применяя это выражение в уравнении (37), можно проверить стабильность рыночного равновесия для постоянной нормы среднего спроса. Временная эволюция флуктуаций плотности потенциальных потребителей равна:

$$\frac{d\delta\psi}{d\tau} = -\delta\psi\langle \eta \rangle_z z_t$$
(A5)

где мы использовали уравнения (A1) и (A4). Приравнивая $\delta\psi \sim e^{-\lambda\tau}$, флуктуации плотности потенциальных потребителей всегда исчезают, поскольку $\lambda = <\eta>_z z_t > 0$. Только при $z_t \to 0$, т.е. когда количество доступных товаров очень мало, релаксация в рыночное равновесие происходит медленно. Нам требуется исключить такой случай из нашего рассмотрения и ограничиться здесь функционирующей рыночной экономикой, считая флуктуации плотности потенциальных потребителей пренебрежимо малыми $\delta\psi \to 0$. Этот результат означает, что рыночное квази-равновесие является стабильным состоянием в краткосрочном периоде, несмотря на малые флуктуации.

Приложение B

Временная эволюция единичных продаж k-ой хозяйствующей единицы может быть получена как производная уравнения (43) по времени:

$$\frac{dy_k}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}\left(\psi(p_k)\eta_k z_k\right)$$
(B1)

Для выполнения дифференцирования мы запишем:

$$\frac{dy_k}{d\tau} = z_k \frac{d}{d\tau}\left(\psi(p_k)\eta_k\right) + \psi(p_k)\eta_k \frac{d}{d\tau} z_k$$
(B2)

Вместе с уравнением (32) это соотношение становится:

$$\frac{dy_k}{d\tau} = z_k \frac{d}{d\tau}\left(\psi(p_k)\eta_k\right) + \psi(p_k)\eta_k \gamma_k y_k$$
(B3)

и используя разложение (A2), мы далее получаем:

$$\frac{dy_k}{d\tau} \cong z_k \left(\eta_k \frac{d}{d\tau}(\delta\psi) + \psi(p_k)\frac{d}{d\tau}(\eta_k)\right) + \psi(p_k)\eta_k \gamma_k y_k$$
(B4)

Из уравнения (A5) мы приблизим:

$$\frac{dy_k}{d\tau} \cong z_k \psi(p_k) \frac{d}{d\tau}(\eta_k) + \psi(p_k)\eta_k \gamma_k y_k$$
(B5)

поскольку $\delta\psi$ всегда мало в стационарном состоянии. Параметр предпочтения введён как константа в коротком временн*о*м масштабе. При условии, что предпочтение товарам меняется только в длительном временном масштабе, уравнение (B5) может быть записано как:

$$\frac{dy_k}{d\tau} \cong \psi(p_k)\eta_k \gamma_k y_k$$
(B6)

Приложение C

Нам требуется определить динамику цен в рыночном квази-равновесии. Как предполагается моделью, сторона предложения определяет медленный режим. Но когда производство практически постоянно, нам необходимо задать реакцию хозяйственных единиц на флуктуации продаж. Сделаем следующее предположение:

vi) для восстановления предела мощности, хозяйственные единицы имеют тенденцию увеличивать цену на товар с увеличением единичных продаж и наоборот.

Это предположение может быть сформулировано как:

$$\frac{dp_k}{d\tau} \sim sign\left(\frac{dy_k}{d\tau}\right)$$
(C1)

где функция знака показывает, что хозяйственные единицы не оценивают расстояние до средней цены перед указанием на новую цену товара, но отвечают в соответствии с предположением vi). Масштабируя по положительной величине y_k внутри функции знака, мы используем уравнение репликатора и получаем:

$$\frac{dp_k}{d\tau} \sim sign\left(\frac{1}{y_k}\frac{dy_k}{d\tau}\right) \sim sign\left(f_k - \langle f\rangle\right)$$
(C2)

Модель предполагает поэтому, что изменения в пригодности продукта ответственны за краткосрочные изменения в цене. Поскольку пригодность – функция цены, мы можем применить уравнение (A2) и разложить пригодность для малых вариаций цены на товар в окрестности средней пригодности:

$$f_k(p_k) = f(\langle p\rangle) + \frac{df(\langle p\rangle)}{dp}\delta p_k$$
(C3)

Поскольку $<f>=f(<p>)$, эволюция цены товара становится:

$$\frac{d\delta p_k}{d\tau} \sim -sign\left(\left|\frac{df(\langle p\rangle)}{dp}\right|\delta p_k\right)$$
(C4)

где мы воспользовались постоянством средней цены. Из уравнений (31) и (52) следует:

$$\frac{df(\langle p\rangle)}{dp} \cong \langle\eta\rangle\langle\gamma\rangle\frac{d\psi(\langle p\rangle)}{dp} \sim \frac{d[d(\langle p\rangle)]}{dp} < 0$$
(C5)

где мы использовали неравенства $<\gamma>$ и $<\eta> >0$.

Соотношение (C 4) описывает детерминированную часть эволюции цены в краткосрочном периоде. Для $<\gamma>>0$ его можно интерпретировать как восстанавливающую силу, которая двигает цену в сторону средней цены. Принимая во внимание случайные флуктуации цены Δp, мы можем установить уравнение Ланжевена для флуктуаций цены в форме:

$$\frac{d\delta p}{d\tau} = -b\,sign(\delta p) + \Delta p$$
(C6)

где b – эффективная скорость релаксации. Случайные флуктуации цены могут быть рассмотрены в первом приближении как белый шум со средним значением и временной корреляцией:

$$\langle \Delta p(\tau) \rangle_{\tau} = 0$$
$$\langle \Delta p(\tau), \Delta p(\tau') \rangle_{\tau} = D\delta(\tau - \tau')$$

(C7)

где скобки с индексом τ означают среднее по времени, D – амплитуда шума.

Вместе с соответствующим уравнением Фоккера-Планка, стационарное распределение определено [6]:

$$P(\delta p) \sim \exp\left(-\frac{2b}{D}|\delta p|\right)$$

(C8)

Эволюционная модель предполагает, что флуктуации цены подчиняются распределению Лапласа (двойная экспонента). В полулогарифмических координатах распределение Лапласа демонстрирует шатрообразную форму в окрестности средней цены. В случае, когда $\langle\gamma\rangle < 0$, т.е. в отсутствии конкуренции, отрицательный знак в уравнении (C6) становится положительным, и вследствие этого восстанавливающая сила исчезает. В этом случае распределение (C8) неустойчиво.

Однако мы хотим подчеркнуть, что процесс покупки в общем случае не является некоррелированным, как предположено в уравнении (C7). Напротив, он демонстрирует всплески активности, за которыми следуют периоды низкой активности. Как показано в [8] коррелированные флуктуации в человеческой активности приводят к зависимости распределения Лапласа от объёма. Стандартные отклонения флуктуаций цены алгебраически затухают с размером хозяйственной единицы y, с масштабной экспонентой $\beta \approx 0.15$. Для больших флуктуаций в окрестности средней цены распределение превращается в распределение по типу Субботина. Они могут быть аппроксимированы для достаточно больших флуктуаций $|\delta p| > 0$ функцией [8]:

$$P(\delta p) \cong C_p \frac{\exp\left(-\frac{|\delta p|}{\sigma_p}\right)}{|\delta p|}$$
(C9)

Здесь σ_p и C_p – свободные параметры.

Приложение D

Продажи фирмы по уравнению (36) могут быть представлены в форме обобщённого уравнения Ланжевена:

$$\frac{dx}{d\tau} = F(x) + \rho G(x)$$
(D1)

Это мультипликативное стохастическое соотношение может быть преобразовано в соотношение с дополнительным шумом путём введения функций:

$$\frac{dh(x)}{d\tau} = \frac{1}{G(x)}\frac{dx}{d\tau}$$
(D2)

и

$$-\frac{dV(x)}{dh(x)} = \frac{F(x)}{G(x)}$$
(D3)

Подставляя эти соотношения в уравнение (D1), мы получаем уравнение Ланжевена в форме:

$$\frac{dh}{d\tau} = -\frac{dV}{dh} + \rho$$
(D4)

Для некоррелированных флуктуаций это соотношение описывает случайный шаг в потенциале V(x). Для достаточно длительного времени плотность вероятности приближается:

$$B(h)dh = \frac{1}{N'}\exp\left(-\frac{V(H)}{D}\right)dH$$
(D5)

где N' – нормировочная постоянная. В исходных переменных мы получим:

$$P(x)dx = B(h)dh = \frac{1}{N'}\exp\left(-\frac{1}{D}\int\frac{F(x')}{G(x')^2}dx'\right)\frac{dx}{G(x)}$$
(D6)

это даёт с соответствующими функциями для G(x) и F(x):

$$P(x) \sim \frac{1}{x^{\left(1+\frac{a}{D}\right)}}$$
(D7)

Приложение E

Давайте разделим шкалу дохода на короткие интервалы размера dw и посчитаем число получателей зарплаты N_E в интервале w_l и w_l+dw. Соотношение $N_l/N_E=P_l$ даёт вероятность трудового дохода w_l. Давайте определим многообразие Ω, являющееся числом перестановок дохода между различными ячейками дохода, так что номера ячеек не меняются. Оно дано комбинаторной формулой:

$$\Omega = \frac{N_E!}{N_1!N_2!N_3!\ldots}$$
(E1)

Следуя Больцману, назовём логарифм многообразия энтропией S=ln(Ω) и возьмём предел для большого количества наёмных работников. С использованием приближения Стирлинга, энтропия на одного наёмного сотрудника равна:

$$\frac{S}{N_E} = -\sum_l \frac{N_l}{N_E}\ln\left(\frac{N_l}{N_E}\right) = -\sum_l P_l\ln(P_l)$$
(E2)

Теперь мы найдём распределение зарплатных доходов для максимальной энтропии, при условии что суммарный трудовой доход:

$$w_t = \sum_l w_l N_l$$
(E3)

постоянен. Применив метод множителей Лагранжа получим распределение трудового дохода в форме:

$$P(w) \sim e^{-w}$$
(E4)

являющейся распределением Гиббса-Больцмана.

Литература

1. http://arxiv.org/abs/1203.6507 Evolutionary Model of the Personal Income Distribution Joachim Kaldasch
2. http://arxiv.org/abs/0905.3803 Amit K Chattopadhyay, Graeme J Ackland, Sushanta K Mallick Income and Poverty in a Developing Economy
3. http://arxiv.org/abs/0903.0203 Ivan O. Kitov Mechanical Model of Personal Income Distribution
4. http://arxiv.org/abs/0902.0075 F. Clementi, M. Gallegati, G. Kaniadakis A k-generalized statistical mechanics approach to income analysis
5. http://arxiv.org/abs/0811.1182 Ivan O. Kitov Modelling the transition from a socialist to capitalist economic system
6. http://arxiv.org/abs/0811.0356 Ivan O. Kitov Modeling the evolution of Gini coefficient for personal incomes in the USA between 1947 and 2005
7. http://arxiv.org/abs/0811.0352 Ivan O. Kitov Evolution of the personal income distribution in the USA: High incomes
8. http://www.scirp.org/fileOperation/downLoad.aspx?path=TEL20110200007_81090363.pdf&type=journal Fariba Hashemi Dynamics of Income Distribution—A Diffusion Analysis

9. http://arxiv.org/abs/0710.3645 F. Clementi, T. Di Matteo, M. Gallegati, G. Kaniadakis The k-generalized distribution: A new descriptive model for the size distribution of incomes.

10. http://arxiv.org/abs/physics/0607293 F. Clementi, M. Gallegati, G. Kaniadakis k-Generalized Statistics in Personal Income Distribution.

11. http://arxiv.org/abs/0812.2664 Newton J. Moura Jr., Marcelo B. Ribeiro Evidence for the Gompertz Curve in the Income Distribution of Brazil 1978-2005.

12. http://arxiv.org/abs/physics/0505173 Wataru Souma, Makoto Nirei Empirical study and model of personal income.

13. http://arxiv.org/abs/1109.5791 Joachim Kaldasch. Evolutionary Model of Non-Durable Markets.

14. http://arxiv.org/abs/1109.0828 Joachim Kaldasch. The Product Life Cycle of Durable Goods.

15. http://arxiv.org/abs/physics/0601176 Anand Banerjee, Victor M. Yakovenko, T. Di Matteo. A study of the personal income distribution in Australia.

16. http://ecsocman.hse.ru/data/2011/11/28/1270196043/Vypusk13_Pirogov_Popovidchenko_106_119.pdf Пирогов Н.К. Поповидченко М.Г. Электронный ЖУРНАЛ "КОРПОРАТИВНЫЕ ФИНАНСЫ" №1(13) 2010 Закон Гибрата в исследованиях роста фирмы.

17. http://www.jurnal.org/articles/2012/ekon39.htm Руснак А. А. Распределение частных доходов.

18. http://arxiv.org/abs/1209.4787v2 F. Clementia, M. Gallegatib, G. Kaniadakisc. A generalized statistical model for the size distribution of wealth.