Тайна третьего постулата

Путенихин П.В.
m55@mail.ru

Введение

Приведённые в данной статье выкладки и доводы основаны на Очевидности, Здравом смысле и Логике. Многое в наблюдаемых явлениях очевидно, то есть не нуждается в каком-либо обосновании и объяснении. С возражением, что одному очевидно одно, а другому – другое, можно согласиться: это очевидно. Здесь, в данной работе, очевидность служит мне оправданием отказа от строгих математических доказательств, являясь как бы призывом к оппонентам: кто не согласен - пусть докажет обратное. Следует понимать, что она допускает не столько недоказуемость выкладок, но, в первую очередь, возможную их ошибочность. Приводимые ниже выкладки, наблюдения, очевидные и логические построения интересны сами по себе даже при отсутствии их доказательств. Арбитром в этом конфликте очевидностей выступает Здравый смысл. Именно он и заставляет нас признать эту «многополярную» очевидность. В наше время очень часто можно услышать высказывание в адрес Здравого смысла, что он ошибается, что он «пошатнулся» и ведёт нас по неверному пути. Говорят, Эйнштейну принадлежат примерно такие, можно сказать, уничижительные слова: «Здравый смысл – это набор заблуждений, приобретённых человеком к 18 годам». Могу сказать лишь одно: «Не отвергай здравого смысла, иначе он тебя покинет». Именно Здравый смысл требует от нас опираться на Логику, а уж по поводу неё, надеюсь, возражений быть не может.

Из чего следует V постулат?

Среди аксиом (постулатов) Евклида V постулат занимает особое место: «Если прямая падает на две прямые и образует внутренние односторонние углы, в сумме меньшие двух прямых, то при неограниченном продолжении этих двух прямых они пересекутся с той стороны, где углы меньше двух прямых». В наше время этот постулат Евклида обычно заменяют на равносильную аксиому параллельности: В плоскости через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести одну и только одну прямую, параллельную данной. На протяжении столетий многие математики пытались доказать этот постулат, исходя из предыдущих постулатов Евклида, пытались доказать, что он – лишний, то есть может быть доказан как теорема на основании остальных аксиом. Но это никому так и не удалось [3]:

«Авторы этих доказательств ставили себе задачей вывести логическим путем V постулат из остальных постулатов Евклида. Следует заметить, что хотя эта задача стояла перед геометрами на протяжении многих веков, она до конца XIX столетия оставалась неопределенной.

Действительно, определения и аксиомы Евклида столь несовершенны, что не могут служить базой для развертывания строгих логических построений. Интересно, что проблема V постулата, уже будучи решенной Лобачевским, все еще не была точно сформулирована, так как во времена Лобачевского недостатки евклидова обоснования геометрии оставались неустраненными.

После изложения аксиом Гильберта мы получаем возможность проблему V постулата сформулировать точно следующим образом:

Приняв аксиомы, перечисленные в группах I—IV, вывести из них аксиому V.

Результат Лобачевского мы можем теперь выразить также с полной определенностью:

Аксиома V не является следствием аксиом I—IV.

Этот же результат может быть формулирован иначе:

Если к аксиомам I—IV присоединить положение, отрицающее справедливость аксиомы V, то следствия всех этих положений будут составлять логически непротиворечивую систему (неевклидову геометрию)».

Обращаю внимание, что доказательство V постулата Евклида в приведённой цитате предлагается делать не на основе его постулатов, а на основе аксиом Гильберта. Однако, причиной неудачи известных доказательств следует считать не столько слабость постулатов Евклида, сколько слабое определение основного понятия - прямой линии. Поскольку прямая определена слишком обще, появилась возможность подмены понятий.

Определяющим следствием пятого постулата является единственность прямой, параллельной данной и проходящей через внешнюю точку. Очевидно, что это утверждение допускает два противопоставления: такой прямой нет вообще и прямая не единственная. Первое противопоставление привело к появлению геометрии Римана, второе - к геометрии Лобачевского. Эти два обстоятельства – нечёткое определение прямой и примеры нарушения постулата – наталкивают на мысль, что эти две криволинейные геометрии и должны стать основой для доказательства постулата. Если дать корректное определение прямой и плоского изотропного пространства, то появится возможность доказательства V постулата Евклида строго на основе его предшествующих постулатов. Отсюда можно дать и обратное определение «действительно прямой линии». Это такая линия, для которой выполняется V постулат Евклида. У Евклида постулаты I-V сформулированы так [1]:

«Допустим:

1. Что от всякой точки до всякой точки <можно> провести прямую линию.

2. И что ограниченную прямую <можно> непрерывно продолжать по прямой.

3. И что из всякого центра и всяким раствором <может быть> описан круг.

4. И что все прямые углы равны между собой.

5. И если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние и по одну сторону углы, меньшие двух прямых, то продолженные эти две прямые неограниченно встретятся с той стороны, где углы меньшие двух прямых».

Какова же причина того, что указанные обстоятельства оказались незамеченными на протяжении двух тысячелетий? Почему была принята эта очевидная подмена понятий: кривую линию назвали прямой? Как утверждается в цитате, результат Лобачевского, его «воображаемая геометрия» выражает невозможность вывода V постулата Евклида из четырёх предыдущих. Однако, присмотримся к постулатам Евклида более внимательно. Поскольку постулат 4 был доказан на основе предыдущих трёх, будем говорить о выводе 5-го постулата из 3-х предыдущих. Особый интерес представляет постулат 3. Обратим самое пристальное внимание на слова «всяким» в этом постулате: «из всякого центра и всяким раствором». Это очень важное слово. Евклид будто предвидел появление геометрий Лобачевского, Римана и других возможных неевклидовых геометрий. Этот постулат явно все их отсекает! Поэтому с учётом третьего постулата можно использовать геометрии Лобачевского и Римана для доказательства V постулата. Однако на важность 3-го постулата никто не обратил внимания. Более того, в аксиомах Гильберта для абсолютной геометрии 3-ий постулат оказался «спрятан», и эта подмена понятий вообще стала не видна. Попробуем найти, в какой из 20-ти аксиом Гильберта «спрятался» 3-й постулат Евклида [2]:

I_1. Каковы бы ни были две точки *A*, *B*, существует прямая *a*, проходящая через эти точки.

В данной аксиоме просматривается явное сходство с первым постулатом Евклида: «Что от всякой точки до всякой точки <можно> провести прямую линию». Второй постулат присутствует неявно, в том смысле, что прямая продолжена дальше, чем от точки до точки.

I_2. Каковы бы ни были две точки *A* и *B*, существует не более одной прямой, проходящей через эти точки.

И эта аксиома относится больше к первому постулату, как его неявное усиление, расширение. Здесь видно, что единственность прямой вступает в противоречие со сферическим пространством Римана, но приём отождествления в эллиптическом пространстве устраняет это противоречие. Третий постулат в этих аксиомах не просматривается.

I_3. На каждой прямой лежат, по крайней мере, две точки. Существуют, по крайней мере, три точки, не лежащие на одной прямой.

Первая часть выглядит как обратная формулировка первого постулата. Вторая её часть, перекликается с разыскиваемым нами третьим постулатом Евклида, хотя и очень отдалённо: «И что из всякого центра и всяким раствором <может быть> описан круг». Действительно, три точки, не лежащие на прямой – это точки, которые могут быть связаны только дугой (окружности).

Если внимательно рассмотреть остальные группы аксиом, то можно легко обнаружить отсутствие в них какого-либо сходства с третьим постулатом. Только аксиома I_3 отдалённо напоминает третий постулат Евклида, принципиально отличаясь от него. Отсюда вывод: третий постулат Евклида исключён из аксиом Гильберта и не влияет на формирование последующих аксиом и постулатов. Поэтому пятый постулат Евклида никак не может быть выведен из аксиом Гильберта, и «явиться следствием аксиом I-IV Евклида»: решающий постулат отсутствует.

Однако, рассмотрим, зависит ли пятый постулат от исключённого, отброшенного третьего постулата? Как указано выше, он не может быть выведен из предыдущих постулатов Евклида (с первого по четвертый). Это не так: третий постулат является необходимым и достаточным условием справедливости пятого постулата. Если существует третий постулат, то и пятый имеет силу строго в формулировке Евклида, то есть является его следствием. Действительно, допустим, V постулат не соблюдается. Для удобства рассмотрим производную от этого постулата формулировку - о единственности параллельной линии через внешнюю точку. Возможны несколько вариантов отрицания этого постулата:

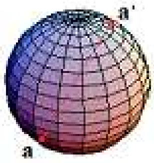
1. Не существует ни одной прямой (геометрия Римана).
2. Существуют две прямые (геометрия Лобачевского).
3. Существует более двух прямых (другая неевклидова геометрия).

Рассмотрим подробнее каждый из этих трёх вариантов отрицания пятого постулата Евклида.

Не существует ни одной прямой

Первый из приведённых вариантов отрицания об отсутствии указанных прямых приводит к кривому анизотропному (деформированному) неевклидову пространству - Риманову. Если через точку нельзя провести ни одной прямой, то постулат Евклида для этого пространства ложен. Но ложен он, как я утверждаю, исключительно вследствие некорректного определения прямой линии. В геометрии Римана прямая - это геодезическая, кривая линия. Если определение прямой линии Евклида считать верным в расширенном толковании, вопреки вложенному в него геодезическому смыслу, то отсутствие параллельной прямой означает, что пространство кривое, сферическое. Но это не евклидово плоское пространство, каковым его, несомненно, представлял Евклид. Получается: если прямую провести нельзя, значит пространство - кривое. Следовательно, доказательство означает, что прямую нельзя провести, только если пространство кривое.

Не смотря на это, принимается доказанным нарушение V постулата Евклида. Но это не так! Постулаты Евклида определённо сформулированы им для плоскости - незамкнутой бесконечной поверхности с нулевой кривизной. Пространство Римана плоскостью не является. Кроме того, в нём нарушается ещё и третий постулат Евклида. Действительно, не существует ни одного сферического пространства Римана, в котором можно было бы «из всякого центра и всяким раствором описать круг»: для любой сферической или эллиптической поверхности можно выбрать раствор больше радиуса сферы, когда круг очертить не удастся. Отсюда следует: изменённый V постулат Евклида об отсутствии прямых не относится к постулированному Евклидом пространству. Это можно считать доказательством от противного: если V постулат Евклида ошибочен, то мы получаем неевклидово пространство, в котором нарушаются его другие постулаты, то есть абсурд. Следовательно, V постулат Римана ошибочен, а постулат Евклида верен. Действительно, рассмотрим сферическое или эллиптическое пространство Римана в плане применимости к ним третьего постулата [6]:



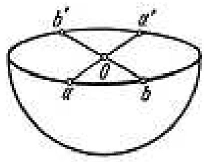


Рис.1. Сферическое и эллиптическое пространства Римана с отождествлёнными точками. Две отождествлённые точки - это одна и та же точка на сфере (a=a' и b=b'). Невозможно описать круг на сфере радиусом, больше диаметра.

То, что аксиома Гильберта I_3 имеет в этих пространствах силу, очевидно: всегда можно найти три точки, не лежащие на одной прямой. А вот третий постулат Евклида – нет! Если мы возьмём один из «всяких растворов» циркуля размером в два диаметра этого пространства, то не найдём центра на плоскости Римана, чтобы можно было описать круг. Причиной этого является замкнутость пространства: римановы сферические и эллиптические пространства не отвечают постулатам Евклида.

Таким образом, если предположить, что через точку вне прямой не проходит ни одной параллельной этой прямой, не пересекающей её, мы неизбежно приходим к непротиворечивой сферической (эллиптической) геометрии Римана. Но эта геометрия отвергается третьим постулатом Евклида. Значит, методом от противного, отвергается и сделанное предположение. Отсюда следует вывод: в согласии с пятым постулатом, через точку вне прямой обязательно проходит, по крайней мере, одна параллельная прямая. И, как видим, этот вывод следует, только если справедлив третий постулат. В данном случае V постулат Евклида требует наличия третьего постулата, является его следствием. Схематично можно сказать так: если есть третий, то есть и пятый; если третьего нет, тогда нет и пятого.

Существуют две прямые

Второй вариант отрицания, как утверждается, доказывается геометрией Лобачевского. Действительно, предположим, что прямых линий, отвечающих условиям постулата, может быть две. Это предположение, как известно, приводит к непротиворечивой геометрии Лобачевского. Однако, на самом деле здесь присутствует всё та же подмена понятий. Скажем, называть шар кубом как-то не принято. А назвать геодезическую, кривую линию Лобачевского прямой линией – запросто. Но прямая Евклида и «прямая» Лобачевского – это разные понятия. Определение прямой у Евклида недостаточно корректно, но, несомненно, подразумевает действительно прямую линию, а не геодезическую.

Рассмотрим внимательнее гиперпространство Лобачевского. Не существует полной и регулярной поверхности, внутренняя геометрия которой представляла бы геометрию полной плоскости Лобачевского. Известно, что Гильберт доказал наличие у этой плоскости существенных особенностей [2]:

«не удаётся с помощью ни одной из известных до сих пор поверхностей постоянной отрицательной кривизны осуществить целиком всю плоскость Лобачевского»

«не существует аналитической поверхности постоянной отрицательной кривизны, не имеющей нигде особенностей и повсюду регулярной»

«на поставленный в начале статьи вопрос о том, можно ли по способу Бельтрами осуществить в евклидовом пространстве на некоторой регулярной аналитической поверхности всю плоскость Лобачевского, надо ответить отрицательно».

«Первоначально я доказал невозможность существования поверхности постоянной отрицательной кривизны, не имеющей особых точек»

Суть регулярности поверхности Лобачевского состоит, очевидно, в постоянстве отрицательной кривизны во всех её точках. Известно множество различных вариантов таких пространств [8]. Например, поверхности, соответствующие различным решениям уравнения синус-Гордона, получаемым с помощью метода обратной задачи рассеяния - одного из наиболее эффективных современных методов интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений:

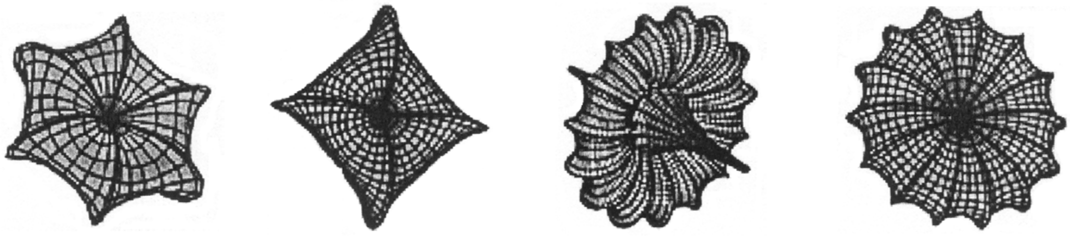


Рис.2. Псевдосферические поверхности, полученные в различных научных публикациях

В литературе описаны разнообразные псевдосферические поверхности вращения [8]:

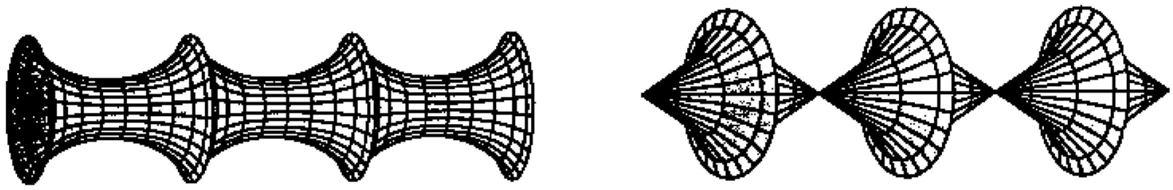


Рис.3. Псевдосферические поверхности вращения

Многие поверхности постоянной отрицательной кривизны названы именами математиков, которые их исследовали и описали:

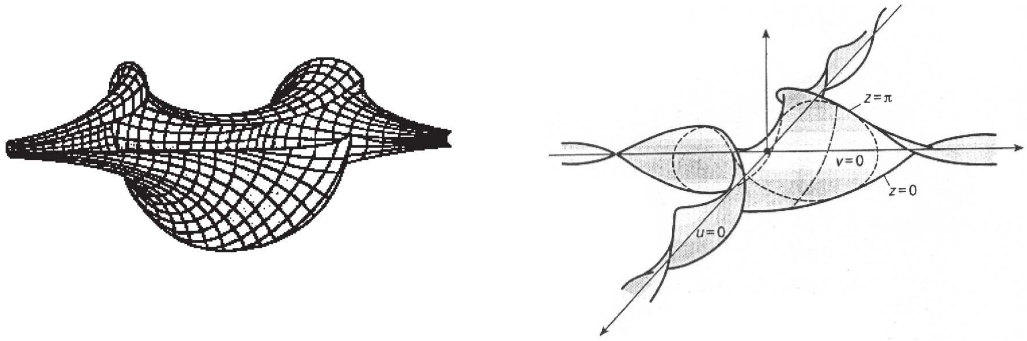


Рис.4. Поверхность Дини (слева) и поверхность Бианки - Амслера (справа)

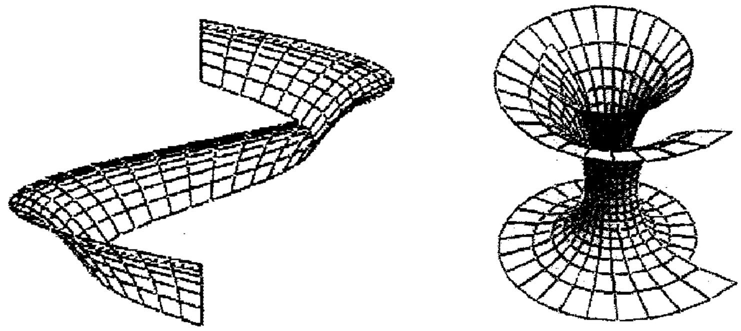


Рис.5. Геликоид Дини (слева) входит в класс поверхностей постоянной отрицательной гауссовой кривизны, псевдосфера является его частным случаем и поверхность Куена (справа) [4].

Существует также класс так называемых многосолитонных решений и соответствующее им бесконечное число псевдосферических поверхностей. На приведённых рисунках видно, что поверхности постоянной отрицательной кривизны либо имеют край, либо замкнуты. Для дальнейших рассуждений рассмотрим наиболее известный вариант фрагмента поверхности Лобачевского - псевдосферу Бельтрами с постоянной отрицательной кривизной [5]:

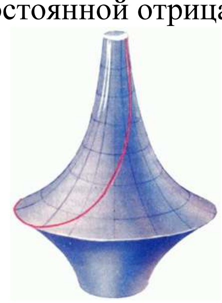


Рис.6. Псевдосфера Бельтрами

Замечу, что название «псевдосфера», не совсем точно отражает её форму. Поверхность больше похожа на внутреннюю часть тора, поэтому название «псевдотор» больше соответствовало бы её виду. У обычного двухмерного тора внутренняя поверхность имеет седлообразную форму с отрицательной кривизной, а внешняя - сфероподобную форму с положительной кривизной [9]. Можно сказать, что в некоторой степени тор снаружи - это подобие сферического пространства Римана, а внутри - гиперболического пространства Лобачевского.

С сохранением общности рассуждений можно утверждать, что на поверхности псевдосферы (в любом её мыслимом варианте) невозможно описать без самопересечения окружность диаметром, большим видимого «диаметра» псевдосферы. Как видно на рисунке, псевдосфера Бельтрами является замкнутой, как бы конической в две стороны. Поэтому на ней невозможно очертить окружность достаточно большого диаметра. Следовательно, этот вариант плоскости и сама «воображаемая геометрия» Лобачевского вступают в противоречие с третьим постулатом Евклида. Не претендуя на строгость доказательств, в подтверждение сказанному и для использования в последующих выкладках приведу две теоремы - о замкнутой геодезической и о круге. Определения:

Локально замкнутой областью поверхности назовём такую область поверхности, которая при неограниченном продлении (протяжении) по поверхности в некотором направлении пересечёт эту поверхность.

Кругом (окружностью) на поверхности будем считать геометрическое место точек концов геодезических равной длины и проведённых во всех направлениях от точки, которая называется центром круга.

Теорема о замкнутой геодезической

На любой локально замкнутой поверхности существует, по меньшей мере, одна замкнутая геодезическая.

Доказательство. Выберем на локально замкнутом участке две точки и проведём между ними геодезическую. Такая геодезическая, несомненно, есть, поскольку поверхность не имеет разрывов. Затем соединим эти точки через другую часть поверхности (в обход) произвольной линией. Начнём движение одной из точек по этой линии, каждый раз удлиняя геодезическую, соединяющую её с оставшейся точкой. В конечном счёте, обойдя поверхность по выбранной линии полностью, мы придём к оставшейся точке с другой стороны, замкнув геодезическую. Что и требовалось доказать.

Теорема о круге

На замкнутой поверхности существует, по меньшей мере, одна точка, из которой невозможно очертить на поверхности круг любого наперёд заданного диаметра.

Доказательство. Выберем на замкнутой поверхности точку на замкнутой геодезической (согласно теореме о замкнутости). В соответствие с теоремой о круге, проведём из неё во все стороны геодезические линии длиной, превышающей длину выбранной замкнутой геодезической. Согласно теореме о замкнутой геодезической, по меньшей мере, одну из этих геодезических провести не удастся, поскольку она пересечёт сама себя. Следовательно, по меньшей мере, одна точка круга не может быть построена. Что и требовалось доказать.

Из теоремы о круге следует, что в гиперболической геометрии Лобачевского, как и сферической геометрии Римана, третий постулат Евклида не соблюдается. В абсолютной же геометрии Гильберта мы вообще не имеем права задавать вопрос: «является ли пятый постулат следствием третьего постулата Евклида». В абсолютной геометрии, основанной на аксиомах Гильберта, этого постулата нет.

Доказательство Лобачевского о нарушении V постулата Евклида означает, по сути, что «прямых» может быть более одной только в случае кривого анизотропного (деформированного) пространства, пространства отрицательной кривизны, в котором настоящей евклидовой прямой линии быть просто не может. Можно сказать так: на неевклидовой плоскости неевклидовы прямые не обязаны соблюдать постулаты Евклида. Следовательно, для евклидовой плоскости и евклидовой прямой линии предположение V постулата Лобачевского о двух прямых - ложное, на плоскости Лобачевского таких прямых нет, нет вообще никаких прямых, есть только кривые. Если две прямые постулата превращаются в геодезические и ведут неизбежно к кривому, неевклидову пространству, значит, в евклидовом пространстве две такие прямые существовать не могут - они ложны. Вывод: в евклидовом пространстве через точку можно провести не более одной прямой. Если же рассматриваемых прямых две, то мы выходим из рамок геометрии Евклида, приходим к абсурду. Поэтому говорить о нарушении геометрией Лобачевского постулата геометрии Евклида, по меньшей мере, странно.

Существует более двух прямых

Следует признать, что рассмотренные доводы являются необходимыми, но пока не достаточными доводами в пользу зависимости V постулата Евклида от трёх предыдущих (четвертый постулат также был доказан на их основе). Третий вариант отрицания должен начинаться с 3-х прямых, иначе он включил бы в себя геометрию Лобачевского. Мне не известна явно описанная геометрия такого рода, поэтому можно лишь предположить, что и в ней постулат 3 Евклида нарушается.

В общем пространствами, принципиально отличающимися друг от друга, следует считать: плоское бесконечное пространство Евклида, сферическое замкнутое пространство Римана постоянной положительной кривизны, пространство Лобачевского постоянной отрицательной кривизны и неевклидовы бесконечные пространства переменной кривизны - гиперболическое, параболические, косинусные и тому подобные, на которых поведение третьего и пятого постулатов остаётся недоказанным. Такие бесконечные и бескрайние (либо с так называемым внешне - геометрическим краем) поверхности обязательно имеют области различной кривизны (положительной, отрицательной и их комбинации). Например, закрученный в спираль тор Архимеда или тороподобная поверхность «Двойная улитка» [9]

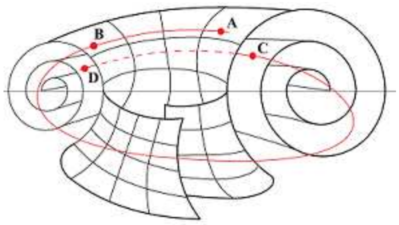


Рис.7. Тороподобная поверхность «Двойная улитка». Движение по поверхности от точки A через B и D к C происходит по спиральной геодезической

Внешняя часть этой поверхности стремится в бесконечность, а внутренние, свёрнутые спирально, имеют внешне - геометрические края.

Отдельно можно отметить так называемую «Абсолютную геометрию на основе аксиом Гильберта» (третий постулат Евклида исключён) и криволинейную геометрию Евклида на цилиндрических и конических поверхностях (третий постулат не соблюдается). Рассмотрим наиболее наглядный вариант неевклидова бесконечного пространства переменной кривизны – гиперболический параболоид:

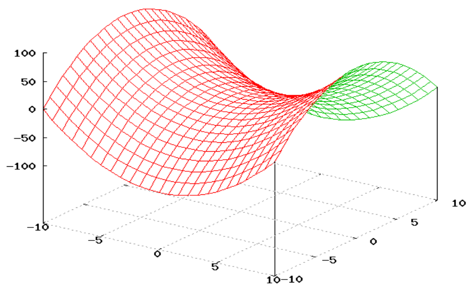


Рис.8. Гиперболический параболоид (косая плоскость)

Он имеет второе название – косая плоскость. Поверхность является незамкнутой и бесконечной. Образоваться она может двумя способами: движением параболы по гиперболе (отсюда название «гиперболический параболоид») и движением прямой линии по двум скрещенным прямым (отсюда название – «косая плоскость»). В каждой точке поверхности она имеет сечения гиперболы и параболы и отрицательную переменную кривизну. На бесконечном удалении от центра поверхность приближается к евклидовой, с нулевой кривизной. Очевидно, что на этой поверхности и на поверхности «Двойной улитки» третий постулат Евклида выполняется в любой точке. При этом переменная отрицательная кривизна, видимо, позволяет лишь локально рассматривать эти поверхности как поверхности Лобачевского. Например, сумма углов треугольника в их локальных областях должна быть меньше 2-х прямых.

Теорема о V постулате Евклида

В предисловии к статье Гильберта «Основания геометрии» Рашевский отметил: в наше время доказать V постулат пытаются только малообразованные дилетанты [2]. Не снимая с себя ответственности за предложенные доводы, всё-таки отмечу, что они не являются строгим доказательством как таковым, а лишь отражают наблюдения и сформировавшееся убеждение в том, что пространство Евклида и геометрия Евклида при всех её слабостях - первичны, являются основой любой иной геометрии, их фундаментом. При этом фундаментом самой геометрии Евклида является точка - «то, что не имеет частей». Как ни странно это звучит, но объект, имеющий нулевые размеры, является строительной частью всей математической реальности точно так же, как и физическая точка нулевых размеров является самой маленькой строительной частью всей физической реальности.

Итак, теорема о V постулате Евклида может иметь, например, такой вид:

Постулат V Евклида в эквивалентной формулировке «В плоскости через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести одну и только одну прямую, параллельную данной» является следствием постулатов I-IV Евклида (но не аксиом Гильберта).

Доказательство. Рассмотрим сначала первое из трёх возможных обратных допущений: по меньшей мере, одна параллельная прямая, проходящая через точку вне данной прямой, пересекает её. На основании постулатов I и II продолжим неограниченно эти параллельные прямые. Пусть они пересекутся в некоторой точке. Это обстоятельство - пересечение двух параллельных прямых соответствует непротиворечивой геометрии Римана на сферической или эллиптической поверхности. Однако, на этой плоскости Римана существует неограниченное число точек, из которых мы не можем очертить окружность согласно постулату III, то есть, эта геометрия сама нарушает, отвергает один из исходных постулатов и мы не можем его использовать. Но постулаты являются описанием, свойствами, характеристиками среды, пространства, поверхности, где, собственно и разворачивается рассматриваемая геометрия. Эта среда называется плоскостью Евклида, именно для неё три первых постулата являются определяющими, основополагающими, обязательными для всех последующих рассуждений. Поверхность, на которой не выполняются эти Основные законы, не подпадает под юрисдикцию геометрии Евклида. Тот факт, что где-то выполняется изменённый V постулат, для этой геометрии - не довод. Напротив. То, что постулат в формулировке Римана ведёт к другой геометрии - это довод в пользу истинности V постулата в формулировке Евклида. Если мы исказим постулат Евклида - то сразу же выйдем за рамки его геометрии. Первое обратное допущение опровергнуто.

Рассмотрим теперь второе обратное допущение: через точку вне прямой можно провести две параллельные прямые, не пересекающие её. На основании постулатов I и II продолжим неограниченно эти три параллельные прямые. Две параллельные нигде не пересекут исходную прямую. Это обстоятельство соответствует непротиворечивой геометрии Лобачевского. Однако, на поверхности псевдосферы существует неограниченное число точек, из которых невозможно очертить окружность согласно постулату III, то есть, эта геометрия, как и в выше рассмотренном случае, сама нарушает, отвергает один из исходных постулатов. Повторяя выше приведённые доводы, мы приходим к выводу, что если мы исказим постулат Евклида - то сразу же выйдем за рамки его геометрии. Второе обратное допущение опровергнуто.

Рассмотрим, наконец, третье обратное допущение: через точку вне прямой можно провести, по меньшей мере, три параллельные прямые, не пересекающие её. Мы должны признать, что это условие может осуществиться только в пространстве переменной кривизны, поскольку рассмотренным выше двум прямым соответствует пространство постоянной отрицательной кривизны Лобачевского. Очевидно, и это легко показать, существует возможность так локально искривить «плоскость», что в этой локальной области через точку вне прямой можно будет провести не менее трёх геодезических, параллельных ей. Но V постулат Евклида и аксиомы Гильберта сформулированы для пространств постоянной кривизны. Следовательно, это допущение противоречит исходным требованиям и поэтому отвергается.

Таким образом, поскольку все обратные допущения отвергнуты, V постулат в формулировке «В плоскости через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести одну и только одну прямую, параллельную данной», является следствием постулатов I-IV Евклида, поскольку только их признание делает истинным V постулат, что и требовалось доказать.

Литература

1. Евклид, «Начала», книги I-VI, перевод с греческого и комментарии Д.Д.Мордухай-Болтовского при редакционном участии М.Я.Выгодского и И.Н.Веселовского, //Серия «Классики естествознания». Математика, Механика, Физика, Астрономия. ОГИЗ Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва-Ленинград, 1948 год.
2. Гильберт Д., «Основания геометрии», пер. с 7-го немецкого издания И.С. Градштейна, под ред. и с вступительной статьёй П.К.Рашевского, Москва - Ленинград, ОГИЗ, Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1948 г.
3. Ефимов Н.В. Высшая геометрия (5-е изд.). М.: Наука, 1971
4. Кривошапко С.Н., Иванов В.Н., Халаби С.М., Аналитические поверхности: материалы по геометрии 500 поверхностей и информация к расчету на прочность тонких оболочек, Наука, 2006 г., 539 с.
5. Лобачевского Геометрия, Научная библиотека избранных естественно-научных изданий, научная-библиотека.рф, URL: http://www.sernam.ru/book_e_math.php?id=66 (Дата доступа 07.12.2012)
6. Новиков И.Д., «Эволюция Вселенной», - Москва: «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1979
7. Отрицательной кривизны поверхность, Математическая энциклопедия, URL: http://dic.academic.ru/dic.nsf/enc_mathematics/3820/ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ
8. Попов А.Г., Псевдосферические поверхности и некоторые задачи математической физики, МГУ им. М. В. Ломоносова, Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 1, с. 227—239. © 2005, Центр новых информационных технологий МГУ, Издательский дом «Открытые системы»
9. Путенихин П.В., Тороподобные поверхности, URL: http://econf.rae.ru/article/7159 (Дата доступа 09.12.2012) http://samlib.ru/p/putenihin_p_w/tor.shtml (Дата доступа 09.12.2012).
10. Риман Б., «О гипотезах, лежащих в основании геометрии» (С комментарием Г. Вейля.) Пер. с немецкого В. Л. Гончарова //Классики естествознания - Математика, Механика, Физика, Астрономия. Об основаниях геометрии. Сборник классических работ по геометрии Лобачевского и развитию её идей. Редакция и вступ. статья А.П.Нордена. Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва, 1956 год, с.309.
11. Путенихин П.В., Тайна третьего постулата, URL: http://samlib.ru/p/putenihin_p_w/postulat.shtml (Дата доступа 10.12.2012).