

О ФИЛЬТРАЦИИ ВИБРОУДАРНЫХ ПРОЦЕССОВ: ОДНОМЕРНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ФИЛЬТРЫ

© 2012 Виталий Львович Крупенин

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук

krupeninster@gmail.com

Аннотация. Проведены аналитические исследования проблем, связанных с прохождением периодических сильно нелинейных (виброударных) процессов через машинные конструкции, моделируемые посредством дискретных механических систем с регулярными структурами — механическими фильтрами низших и высших частот. Выяснен физический смысл полученных решений, выведены расчетные формулы и описаны главные динамические эффекты.

Ключевые слова: регулярные структуры, виброполю, удары, частотно-временные методы, частотные полосы.

1. Решение проблем связанные с изучением особенностей прохождения вибрации, сопровождаемой соударениями элементов конструкций, через различные технические объекты представляются весьма важными и актуальными, в частности для создания научных основ проектирования машин. В линейной постановке они рассматривались, в частности, в [1]. Учет соударений элементов конструкций был проведен, в частности, в работах [2-6]. Далее рассмотрены задачи о прохождении периодических виброударного процесса через механические фильтры низших и высших частот.

Для анализа используются решения, получаемые при помощи методов частотно-временного анализа [3-8]. Для дальнейшего изложения необходимы следующие соотношения.

Ограничиваясь здесь и далее основными режимами несимметричных виброударных систем с частотами, совпадающими с частотами внешних сил, заметим, что для наиболее важных в приложениях и распространенных на практике режимов с одним ударом за период движения определяющим оказывается так называемое двухпараметрическое представление [7-9]

$$x_0(t) = f_0(t + \varphi) - J\chi_{00}(t), \quad (1)$$

где x_0 — координата (относительная или абсолютная), к которой приведена сила удара;



сила удара; момент удара совмещен с началом отсчета времени; f_0 - решение соответствующей линейной задачи - изменение координаты в отсутствие соударений; J -

импульс удара; φ — его фаза; χ_{00} — периодическая функция Грина системы в точке x_0 . Если $L_{00}(p)$ — оператор динамической податливости линейной системы в точке, то периодическая функция Грина дается рядом Фурье [2,3,5,8]

$$\chi_{00}(t) = \frac{1}{T} \sum_k L_{00}(ik\omega) \exp(ik\omega t), \quad T = 2\pi/\omega,$$

причем суммирование ведется по всем целым ($k \in Z$). Если соударения осуществляются массивными точечными телами, то коэффициенты Фурье $|L_{00}(ik\omega)| \sim |k^{-2}|$ и периодическая функция Грина — непрерывная функция, производная которой имеет скачки при $t = 2\pi k\omega^{-1}$ ($k \in Z$) [2].

Для координат других тел, входящих в данную систему, имеет место аналог представления (1) вида

$$x_j(t) = f_j(t + \varphi) - J \chi_{0j}(t), \quad j = 0, \dots, n-1,$$

где n — число тел, входящих в систему; периодические формулы Грина $\chi_{0j}(t)$ определяются проходными операторами динамической податливости [2,3,5,8] $L_{0j}(p)$, связывающими перемещения $x_j(t)$ с силой, приложенной в точке x_0 .

В представление (1) входят ударный импульс J и фаза φ , для нахождения которых используют условия удара

$$x(0) = \Delta; \quad J = m(1 + R) |\dot{x}(-0)|, \quad (3)$$

где Δ — величина зазора или натяга; $R \in]0, 1[$ — коэффициент восстановления.

Соотношения (3) приводят к системе двух трансцендентных уравнений, решения которой вместе с (1) полностью определяют искомый процесс, который должен удовлетворять геометрическому условию $x \leq \Delta$ и исследоваться на устойчивость. Пусть имеется синусоидальная вынуждающая сила (и, соответственно, синусоидальная функция $f_0(t)$). Тогда, как правило, оказывается, что система трансцендентных уравнений, следующая из (3), дает два возможных решения и в практически важнейших случаях асимптотически устойчивый режим отвечает большему значению импульса. Заметим, впрочем, что здесь имеются и исключения [2,3,5,8].

2. Рассмотрим систему, представленную на рис. 1 — линейную цепочку с регулярной структурой, возбуждаемую гармонической внешней силой. Правый конец цепочки установлен с зазором Δ относительно неподвижной абсолютно жесткой стенки, так что левое крайнее тело может совершать колебания с соударениями. Интересуясь динамикой фильтрации, будем рассматривать цепочку без демпферов: малое вязкое трение не оказывает здесь существенного влияния; если же силы трения велики, то собственные динамические свойства системы проявляются слабо [2,3,5,8]. Заметим также, что предположение, будто вынуждающая сила действует только на крайнее левое тело, вообще говоря, несущественно и совершенно аналогично рассматриваются случаи других способов задания возбуждения.

Не ограничивая общности рассуждений, положим $m_j = 1$. Уравнения движения тел, входящих в цепочку, имеют вид

$$\ddot{x}_0 + c(x_0 - x_1) + \Phi_1(x_0, \dot{x}_0) = P_1 \cos \omega t, \quad \ddot{x}_j + c(2x_j - x_{j-1} - x_{j+1}) = 0, \\ j \neq 0, n-1, \quad \ddot{x}_{n-1} + c(2x_{n-1} - x_{n-2}) = 0, \quad x_n = 0,$$

где x_j ($j = 0, \dots, n-1$) — координаты точечных тел, образующих цепочку; отсчет ведется от равновесного состояния; $\Phi_1(x_0, \dot{x}_0)$ — символическое представление запись силы удара через

обобщенную функцию [2,3,5,8]. Если удар происходит при $t = \varphi + \kappa T$ ($T = 2\pi/\omega$), то [2,3] $\Phi_I(x_0, \dot{x}_0) = J \mathcal{F}(t - \varphi)$, где импульс и фаза удара определяются условиями (3); $\mathcal{F}(t)$ – T -периодическая последовательность δ -функций.

Для получения представления (1) необходимо найти локальную динамическую податливость $L_{00}(i\omega)$, определяемую законом движения точки x_0 при воздействии на нее синусоидальной силы, приложенной в ней же. Понадобятся также и выражения проходных динамических податливостей $L_{0j}(i\omega)$ -«откликов» x_j на синусоидальное воздействие, приложенное в точке x_0 . При помощи этих выражений и (1) будут найдены искомые законы движения x_j ($j > 0$).

Воспользовавшись результатами ранее приведенными в монографии [9], найдем

$$L_{0k}(i\omega) = \frac{1}{c} \frac{1}{\sigma^{1/2} - \sigma^{-1/2}} \frac{\sigma^{n-k} - \sigma^{-(n-k)}}{\sigma^{(n+1/2)} + \sigma^{-(n+1/2)}}, \quad k = \overline{0, n-1}, \quad (4)$$

Здесь из-за отсутствия диссипации действительная форма ряда Фурье [2,3,5,8] удобнее. При $k=0$ получаем двухпараметрическое представление (1):

$$\sigma = \sigma(\omega) = \left(1 - \frac{\omega^2}{2c}\right) + \left(\frac{\omega^4}{4c^2} - \frac{\omega^2}{c}\right)^{1/2}. \quad (5)$$

Вводя периодическую функцию Грина в виде ряда

$$\chi_{0k}(t) = \frac{P_1 n}{Tc} + \frac{2}{T} \sum_{q=1}^{\infty} L_{0k}(iq\omega) \cos q\omega t, \quad (6)$$

$$x_0(t) = |L_{00}(i\omega)| \cos(\omega t + \varphi) - J \chi_{00}(t). \quad (7)$$

При этом из (3) следует, что

$$|L_{00}(i\omega)| \cos \varphi = \Delta + J \chi_{00}(0),$$

$$|L_{00}(i\omega)| \sin \varphi = -J\omega^{-1} [\dot{\chi}_{00}(-0) + (1+R)^{-1}].$$

Пользуясь решением, данным в [2,3], и учитывая, что в соответствии со сказанным ранее выбирается большее значение импульса, получаем

$$J = \frac{-\Delta \chi_{00}(0) + \{L_{00}(i\omega)^2 \chi_{00}^2(0) - 1/4(1-R)^2(1+R)^{-2}(\Delta^2 - |L_{00}(i\omega)|^2 \omega^{-2})\}^{1/2}}{\chi_{00}^2(0) + 1/4(1-R)^2(1+R)^{-2} \omega^{-2}}, \quad (8)$$

$$\sin \varphi = -1/2 J \omega^{-1} |L_{00}(i\omega)|^{-1} (1-R)(1+R)^{-1},$$

$$\cos \varphi = [\Delta + J \chi_{00}(0)] / |L_{00}(i\omega)|.$$

Эти соотношения определяют точное решение задачи в предположениях одного удара за период движения. Графики зависимостей $J(\omega)$ в различных вариантах приведены, в частности, в [2,3]. Эти зависимости определяют частотные свойства системы. Показано, что в окрестностях собственных частот линейной системы

$$\Omega_j = 2\sqrt{c} \sin \frac{1}{2}(2l+1)\pi / (2n+1)$$

значения $J(\omega)$ близки к нулю и виброударный процесс носит малоинтенсивный характер. В окрестности корней Ω_j^* трансцендентного уравнения $\chi_{00}(0; \omega) = 0$ значения $J(\omega)$ резко

возрастают; система находится в нелинейном резонансном состоянии и виброударный процесс оказывается наиболее интенсивным.

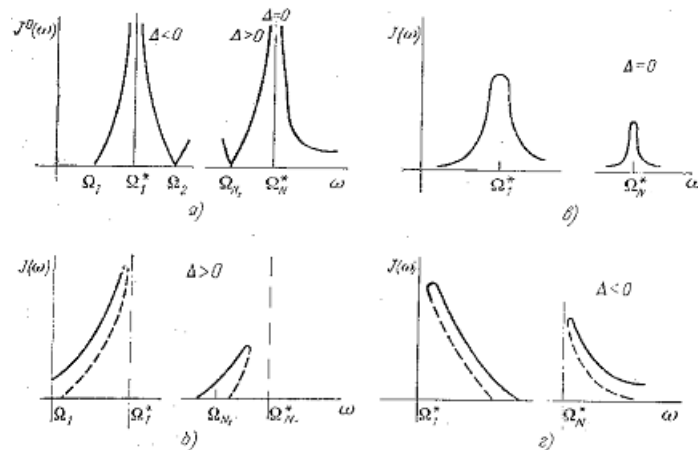


Рис.2

Определив импульс и фазу, в соответствии с (2) находим для всех тел, входящих в цепочку:

$$x_k(t) = |L_{0k}(i\omega)| \cos(\omega t + \varphi_k + \varphi) - J\chi_{0k}(t), \quad (9)$$

где $\varphi_k = \arg L_{0k}(i\omega) - \arg L_{00}(i\omega)$.

3. При этом выражение для ПФГ χ_{0k} дается рядом Фурье (6). Принимая во внимание общие свойства механических фильтров, описанные в [9], и выведенные формулы (7) и (9), можно проанализировать процесс фильтрации со спектральной точки зрения.

Пусть $0 < \omega < 2\sqrt{c}$ ($\Omega_* = 2\sqrt{c}$ - так называемая частота среза фильтра низших частот [5]) и, кроме того, пусть не существует номера гармоники q такого, что $q\omega = 2\sqrt{c}$. Из (5) видно, что тогда найдется такой номер гармоники q^* , что для всех номеров $q < q^*$ величина $\sigma(q\omega)$ (5) будет комплексной и $|\sigma(q\omega)| = 1$, а при $q > q^*$ — действительной отрицательной и $|\sigma(q\omega)| > 1$.

В этих случаях положим соответственно $\sigma(q\omega) = \exp i\alpha_q$, $|\sigma(q\omega)| = \exp \beta_q$ и перепишем соотношение (9) с учетом (4)—(6) так:

$$\begin{aligned} x_k(t) = & \frac{P_1}{2c} \left| \frac{\sin[(n-k)\alpha_1]}{\sin \frac{\alpha_1}{2} \cos \frac{(2n+1)\alpha_1}{2}} \right| \cos(\omega t + \varphi_k + \varphi) - \frac{J(n-k)}{Tc} - \frac{J}{Tc} \sum_{q^*} \times \\ & \times \frac{\sin[(n-k)\alpha_q]}{\sin \frac{1}{2}\alpha_q \sin \frac{1}{2}(2n+1)\alpha_q} \cos q\omega t - \frac{J}{Tc} \sum_{q^*} \times \\ & \times \frac{(-1)^{k+1} \operatorname{sh}[(n-k)\beta_q]}{\operatorname{ch} \frac{1}{2}\beta_q \operatorname{sh} \frac{1}{2}(2n+1)\beta_q} \cos q\omega t. \end{aligned} \quad (10)$$

При больших k и достаточно длинной цепочке ($n \gg 1$) четвертый член в правой части формулы будет малым. Поэтому до конца цепочки могут прийти лишь низшие частоты и постоянная составляющая. Амплитуды высокочастотных гармоник экспоненциально затухают.

Аналогично рассматриваются другие возможные случаи. Если, например, $\omega > 2\sqrt{c}$, то в (10) может доминировать лишь второй член и виброударный процесс воспринимается в конце цепочки как некоторая статическая нагрузка.

Наконец, если оказывается возможным равенство $q\omega = 2\sqrt{c}$, то качественно анализ не изменится, однако составляющая частоты $q\omega$ будет затухать по линейному закону [5].

Прохождение виброударного процесса через фильтр низших частот удобно описать при помощи диаграммы рис.3. Здесь отмечены частотные области существования виброударных режимов с зазором $\Delta > 0$ или натягом $\Delta < 0$. В случае нулевого зазора ($\Delta \approx 0$) заметные колебания оказываются возможными именно в этих зонах. Необходимо отметить, что при проходе частоты через эти зоны виброударные режимы могут «срываться» или возникать вследствие «жесткого запуска» - придания системе дополнительного одиночного импульсного воздействия (толчка) [2,3]. На рис. 3 на оси ординат показана величина $A_{k \rightarrow n-1}$ — амплитуда (полуразмах) колебания некоторого k -го тела, близкого к последнему ($(n-1)$ -му).

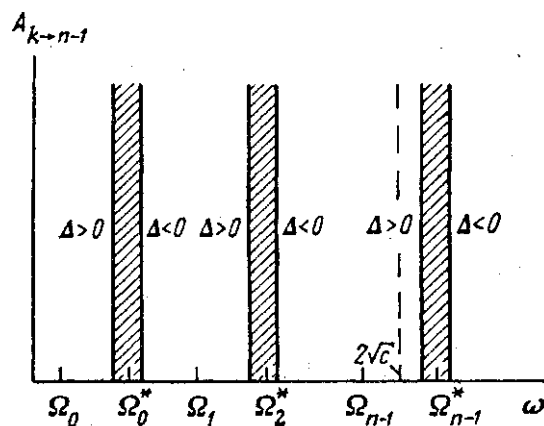


Рис. 3

Если частота $\omega > 2\sqrt{c}$, то спектр передаваемого процесса предельно обедняется: до конца цепочки сможет доходить только постоянная составляющая, а сами составляющие цепочку тела будут практически покоиться. В рассматриваемом сейчас случае несимметричной ударной пары (рис. 1) при этом будет возникать увод тел из положения равновесия. Зная параметры системы и возбуждения и наблюдая лишь за положением удаленного k -го тела (x_k), при помощи формулы (10) можно легко оценить импульс удара в ударной паре

$$J \approx |x_k T c / (n - k)|$$

и тем самым, не производя никаких измерений в зоне ударов, получить информацию об интенсивности процесса.

Отметим, что с ростом числа k увеличивается и гладкость колебаний [2,3].

Следует заметить также, что в присутствии высокочастотных составляющих, вызывающих собственные колебания пружин, показанных на рис.1, часть этих составляющих может дойти до конца цепочки и описанная картина видоизменится, как, впрочем, должна видоизмениться и модель.

Заметим, наконец, что с точностью до обозначений аналогично анализируется фильтрация субгармонических виброударных процессов. Здесь из-за их низкочастотности спектр передаваемой вибрации может существенно обогатиться, однако, условия существования субгармонических виброударных процессов - достаточно жесткие. Поэтому, как правило, вопрос об их прохождении через фильтрующие системы здесь не разбирается.

4. Рассмотрим задачу о прохождении виброударных процессов через механические фильтры высших частот [9].

Рассмотрим систему, показанную на рис.4, состоящую из шарнирно соединенных безынерционных стержней с включенными посередине массивными точечными телами.

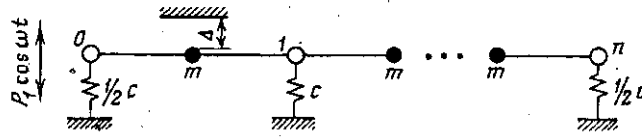


Рис.4.

Жесткости крайних пружин вдвое меньше остальных. Последнее предположение, естественно, несущественно, однако традиционно [9]: помимо некоторых вычислительных преимуществ здесь приобретается возможность описать практически важную, например, для задач вибротранспортирования «поступательную» форму движения с частотой $\Omega_p = \sqrt{cm}$.

Далее принимается также: также $m_k = 1$; удар моделируется по Ньютону; вынуждающая гармоническая сила приложена к нулевому шарниру.

Принимая [9] за обобщенные координаты перемещения шарниров x_k ($k = 0, \dots, n$),

$$\chi_{00}(t) = \frac{2}{Tc} + \sum_{q=1}^{\infty} L_{00}(iq\omega) \cos q\omega t, \quad \chi_{0k}(t) = \sum_{q=1}^{\infty} L_{0k}(iq\omega) \cos q\omega t,$$

приводим систему уравнений движения к виду

$$\chi_{00}(t) = \frac{2}{Tc} + \sum_{q=1}^{\infty} L_{00}(iq\omega) \cos q\omega t, \quad \chi_{0k}(t) = \sum_{q=1}^{\infty} L_{0k}(iq\omega) \cos q\omega t,$$

$$1/4x_{0n} + 1/4x_{0n} + 1/2cx_0 + \Phi_1(x_0, x_{0n}) = P_1 \cos \omega t,$$

$$x_{(k-1)n} + 2x_{kn} + x_{(k+1)n} + 4cx_k = 0, \quad k \neq 0, n,$$

$$x_{nn} + x_{(n-1)n} + 2cx_n = 0.$$

Для отыскания периодических режимов движения сохраняют силу соотношения (1)-(3) и (7)-(9). Разница состоит только в представлении соответствующих динамических податливостей. Пользуясь решением, данным в [9], находим ($k = 0, \dots, n$.)

$$L_{0k}(i\omega) = \frac{8}{\omega} \frac{1}{\sigma - \sigma^{-1}} \frac{\sigma^{n-1} + \sigma^{-(n-k)}}{\sigma^n - \sigma^{-n}}, \quad (11)$$

$$\text{где } \sigma(\omega) = - \left(1 - \frac{2c}{\omega^2} \right) + \left(\frac{4c^2}{\omega^4} - \frac{4c}{\omega^2} \right)^{1/2}.$$

Теперь представления (7) — (9) составляются при посредстве (11); в остальном принципиальных различий нет. Однако при этом

$$\chi_{00}(t) = \frac{2}{Tc} + \sum_{q=1}^{\infty} L_{00}(iq\omega) \cos q\omega t, \quad \chi_{0k}(t) = \sum_{q=1}^{\infty} L_{0k}(iq\omega) \cos q\omega t,$$

что показывает отсутствие постоянной составляющей в движении всех шарниров, кроме левого.

В силу сказанного нет смысла выписывать определяющие соотношения, вид которых полностью определяется (7) — (6), (11), (12). Ограничимся качественным комментарием.

Собственные частоты линейной части системы лежат выше значения $\Omega_0 = 2\sqrt{c}$ и даются при помощи формул, полученных в [9]:

$$\Omega_k = 2\sqrt{c} (1 + \cos k\pi)^{-0.5}, \quad k=0, \dots, n.$$

Отсюда видно, что при $k \rightarrow n$: $\Omega_k \rightarrow \infty$, что свидетельствует о том, что линейная часть системы — фильтр высших частот с полосой пропускания $\sqrt{c} \leq \omega < \infty$. Поэтому диаграмма прохождения виброударного процесса (рассматриваются основные режимы частоты ω имеет вид, показанный на рис. 5.

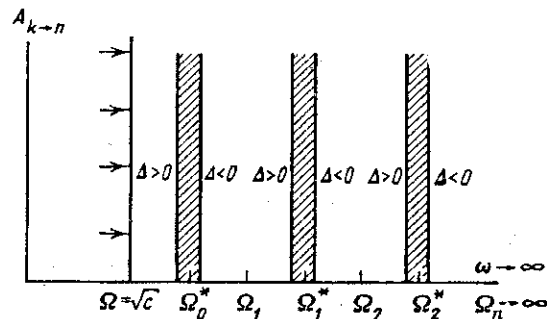


Рис. 5

Все гармонические составляющие дойдут до конца цепочки, но так как основные (периода $T = 2\pi/\omega$) резонансные виброударные режимы устанавливаются только справа от первой собственной частоты среза фильтра ($\omega > \Omega_0$), то постоянная составляющая всегда будет задерживаться и в такой системе увод типа описанного в предыдущем пункте невозможен.

Аналогично строятся диаграммы прохождения субгармонических процессов. Здесь до конца цепочки не дойдут гармоники $\omega l^{-1} < \sqrt{c}$ (l — кратность процесса). При учете инерционных свойств тел, образующих, последний фильтр оказывается полосовым, однако в этой и других, отличных от разобранных здесь ситуациях, алгоритм анализа существенно не меняется: двухпараметрическое представление с известными изменениями в структуре ПФГ, естественно, сохраняет свой вид [2, 3, 5, 8]. Другие задачи, поставленные в [10] анализируются аналогично, см. также далее.

Учет вязкого трения влияет на границы существования резонансных режимов и другие параметры движения [2, 3, 5, 8].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект №10-08-00500-а).

Список литературы

1. Бобровницкий Ю.И., Генкин М.Д., Маслов В.П., Римский-Корсаков А.В., Распространение волн в конструкциях из тонких стержней и пластин // М.: Наука, 1974.-102 с.
2. Бабицкий В.И., Крупенин В.Л. Колебания в сильно нелинейных системах.-М., Наука,1985. – 384 с.
3. Babitsky V.I., Krupenin V.L Vibration of Strongly Nonlinear Discontinuous Systems.- Berlin. Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 2001. –404 p.p.
4. Крупенин В.Л. К теории сильно нелинейных вибропроводов // Машиноведение.-1987. - №1.-С.25-32.
5. Широкополосные виброударные генераторы механических колебаний.// Веприк А.М., Вознюк А.Д., Крупенин В.Л., Чирков И. М.- Л: Машиностроение, 1987.-72 с.
6. Крупенин В.Л. Модель сильно нелинейной вибропроводящей среды с распределенным ударным элементом// ДАН, 1995, Т. 343, №6, с. 759-763.

7. Крупенин В.Л. Периодические движения в семействе упругих систем со взаимодействующими через удары граничными элементами // Проблемы машиностроения и надежности машин,- 2001.- №3. - С.20-28.
8. Крупенин В. Л. О представлении периодических виброударных процессов через параметры движения "импульс-фаза" // Проблемы машиностроения и надежности машин. - 2010. - № 1. - С. 34-42.
9. Нагаев Р.Ф., Ходжаев К.Ш. Колебания механических систем с периодической структурой. - Ташкент: ФАН, 1973. – 272 с.
10. В.Л. Крупенин К проблеме фильтрации и вибропередачи виброударных процессов (часть1) // Интернет-журнал «Вестник научно-технического развития» (<http://vntr.ru/ftpgetfile.php?id=605>).- № 6 (58).- 2012 г.- С. 21-26