

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТОНКОСТЕННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С КРУГОВЫМИ ВЫРЕЗАМИ БЕЗ РЕБЕР ЖЕСТКОСТИ ПРИ ЕЕ ОСЕВОМ СЖАТИИ

Меньшенин Александр Аркадьевич
Ульяновский государственный университет

Задача данного исследования состояла в определении критических осевых нагрузок, вызывающих потерю устойчивости цилиндрической тонкостенной оболочки, имеющей круговые вырезы.

Математическая модель устойчивости цилиндрической оболочки без вырезов.

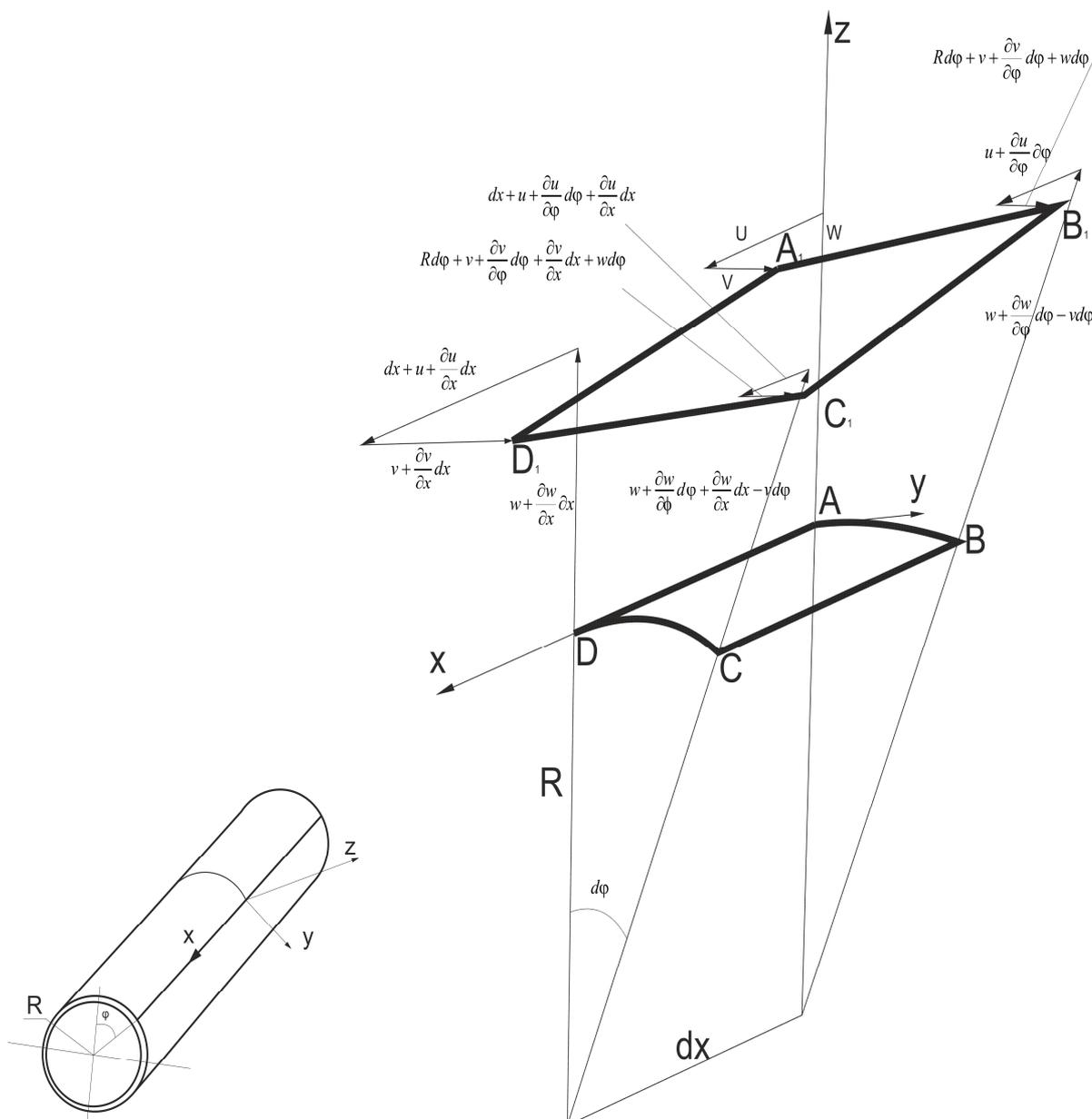


Рис. 1 а.

Рис. 1 б.

Пусть начало подвижной системы координат xuz лежит на срединной поверхности цилиндрической оболочки. Ось x направлена вдоль образующей, ось y — по касательной к окружности, а ось z — по внешней нормали к срединной поверхности (рис. 1, а). Перемещения точек срединной поверхности по направлениям осей x, y, z — u, v, w соответственно. Координаты точек A, B, C, D элемента срединной поверхности оболочки

и координаты точек A_1, B_1, C_1, D_1 этого элемента после деформации оболочки в системе координат xuz , связанной с точкой A (рис. 1, б), определяются следующей таблицей.

Точка	x	y	z
A	0	0	0
B	0	$Rd\varphi$	0
C	dx	$Rd\varphi$	0
D	dx	0	0
A₁	u	v	w
B₁	$u + \frac{\partial u}{\partial \varphi} d\varphi$	$Rd\varphi + v + \frac{\partial v}{\partial \varphi} d\varphi + wd\varphi$	$w + \frac{\partial w}{\partial \varphi} d\varphi - vd\varphi$
C₁	$dx + u + \frac{\partial u}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial u}{\partial x} dx$	$Rd\varphi + v + \frac{\partial v}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial v}{\partial x} dx + wd\varphi$	$w + \frac{\partial w}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial w}{\partial x} dx - vd\varphi$
D₁	$dx + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$	$v + \frac{\partial v}{\partial x} dx$	$w + \frac{\partial w}{\partial x} dx$

Деформации срединной поверхности связаны с перемещениями следующим образом:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \varepsilon_y = \frac{1}{R} \left(w + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right); \gamma = \frac{\partial u}{R \partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.1)$$

А углы поворота нормали к срединной поверхности θ_x и θ_y в плоскостях xz и zy

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial x}; \theta_y = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} - v \right).$$

Если пренебречь влиянием деформаций срединной поверхности на ее кривизны χ_x, χ_y , и кручение χ_{xy} , то получим:

$$\left. \begin{aligned} \chi_x &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \chi_y &= \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) = \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + w \right) \\ \chi_{xy} &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi \partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \approx \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi \partial x} \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

При $\left| \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right| \gg v$ и $\left| \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right| \gg w$ используются упрощенные формулы:

$$\theta_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \theta_y = \frac{\partial w}{R \partial \varphi} \quad (1.3)$$

$$\chi_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \chi_y = \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \varphi^2}; \chi_{xy} = \frac{\partial^2 w}{R \partial \varphi \partial x}.$$

При деформациях оболочки возникают нормальные усилия T_x, T_y , сдвигающее усилие S , изгибающие M_x, M_y и скручивающий M_{xy} моменты. Эти внутренние силовые факторы

связаны с компонентами деформаций срединной поверхности оболочки и изменением ее кривизн соотношениями упругости, основанными на гипотезе Кирхгоффа-Лява неискривляемости физического волокна нормали в процессе деформации [1]:

$$T_x = \frac{Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y), T_y = \frac{Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x), S = Gh\gamma = \frac{Eh(1-\mu)}{(1-\mu^2)2}\gamma,$$

$$M_x = D(\chi_x + \mu\chi_y); M_y = D(\chi_y + \mu\chi_x); M_{xy} = (1-\mu)D\chi_{xy} \quad (1.4)$$

где D – изгибная жесткость оболочки. Для получения линейризованных уравнений, описывающих потерю устойчивости цилиндрической оболочки, запишем линейные уравнения, описывающие поведение произвольно нагруженной оболочки при ее малых перемещениях.

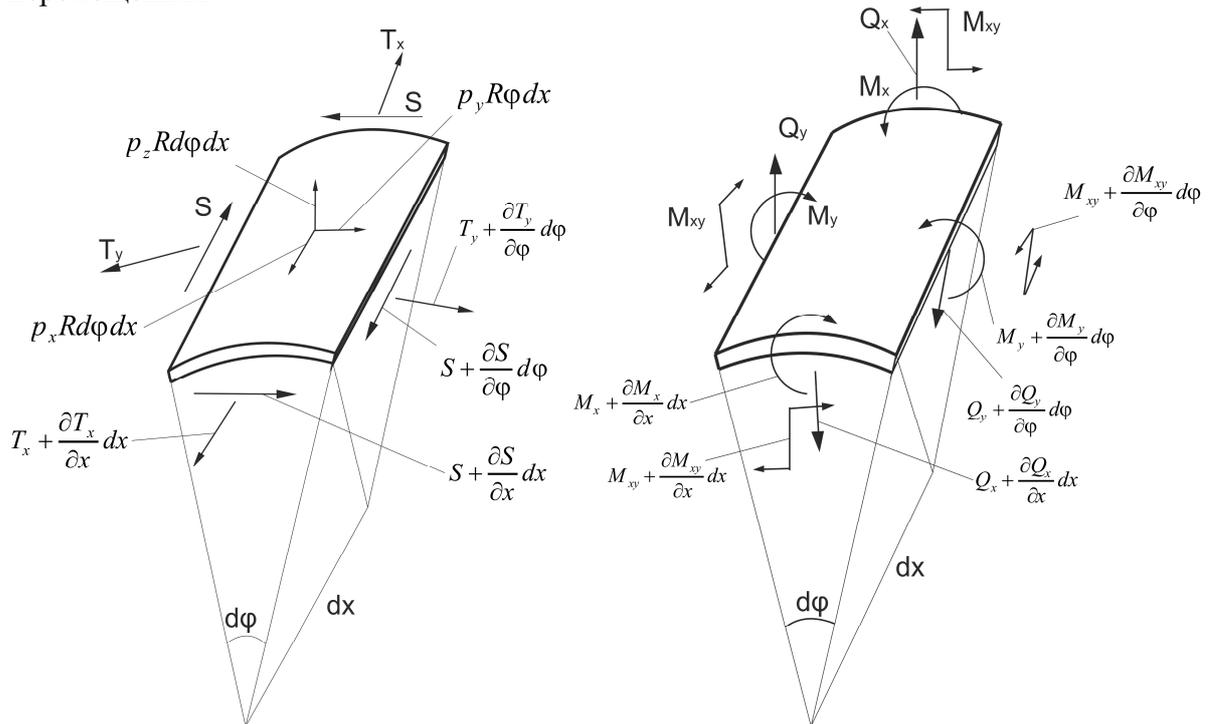


Рис. 2.

Рассматривая равновесие элемента оболочки в недеформированном состоянии (рис. 2), приходим к следующей системе уравнений [1]:

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial S}{R\partial\varphi} + p_x = 0, \frac{\partial T_y}{R\partial\varphi} + \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{Q_y}{R} + p_y = 0, \frac{T_y}{R} + \frac{\partial Q_y}{R\partial\varphi} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} = p_x,$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{R\partial\varphi} - Q_x = 0, \frac{\partial M_y}{R\partial\varphi} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0, \quad (1.5)$$

где p_x, p_y, p_z – интенсивности внешних распределенных нагрузок, действующих в направлениях соответствующих осей.

Исключив из последней системы уравнений внутренние поперечные силы Q_x и Q_y , приходим к системе уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial S}{R \partial \varphi} + p_x &= 0 \\ \frac{\partial T_y}{R \partial \varphi} + \frac{\partial S}{\partial \varphi} - \frac{1}{R} \left(\frac{\partial M_y}{R \partial \varphi} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right) + p_y &= 0 \\ \frac{T_y}{R} + \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{R \partial \varphi \partial x} + \frac{\partial^2 M_y}{R^2 \partial \varphi^2} &= p_z \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

Используя соотношения упругости, далее получим систему уравнений равновесия в перемещениях:

$$\left. \begin{aligned} \frac{Eh}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{R^2 \partial \varphi^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{R \partial \varphi \partial x} + \frac{\mu}{R} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + p_x &= 0 \\ \frac{Eh}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 v}{R^2 \partial \varphi^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{R \partial \varphi \partial x} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) - \\ - \frac{D}{R} \left[\frac{\partial^3 w}{R^3 \partial \varphi^3} + \frac{\partial^3 w}{R \partial \varphi \partial x^2} + \frac{\partial w}{R^3 \partial \varphi} \right] + p_y &= 0 \\ \frac{Eh}{(1-\mu^2)R} \left(\frac{w}{R} + \frac{\partial v}{R \partial \varphi} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + D \left[\nabla^2 \nabla^2 w + \frac{\partial^2 w}{R^4 \partial \varphi^2} + \frac{\mu}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] &= p_z \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

где

$$\nabla^2(*) = \frac{\partial^2(*)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(*)}{R^2 \partial \varphi^2}$$

Для замкнутой в окружном направлении цилиндрической оболочки на каждом из ее торцов должны быть заданы по четыре граничных условия [1]:

- 1) перемещение u либо осевое усилие T_x ;
- 2) перемещение v либо сдвигающее усилие S ;
- 3) угол наклона нормали θ_x либо изгибающий момент M_x ;
- 4) перемещение w либо приведенное поперечное усилие

$$Q_x^* = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{2}{R} \frac{\partial M_{xy}}{\partial \varphi} = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{R \partial \varphi}$$

В том случае, когда выражения изменения кривизн χ_x , χ_y , χ_{xy} берут в упрощенном виде $\chi_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$; $\chi_y = \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \varphi^2}$; $\chi_{xy} = \frac{\partial^2 w}{R \partial \varphi \partial x}$, уравнения равновесия должны быть также

упрощены. Из второго уравнения равновесия (1.5) следует отбросить слагаемое $\frac{Q_y}{R}$.

Тогда уравнение равновесия (1.6) при $p_x=0$ и $p_y=0$ принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial S}{R \partial \varphi} &= 0 \\ \frac{\partial T_y}{R \partial \varphi} + \frac{\partial S}{\partial x} &= 0 \\ \frac{T_y}{R} + \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{R \partial \varphi \partial x} + \frac{\partial^2 M_y}{R^2 \partial \varphi^2} &= p_x \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

Если ввести функцию усилий Φ , связанную с усилиями соотношениями

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = T_y; \quad \frac{\partial^2 \Phi}{R^2 \partial \varphi^2} = T_x; \quad \frac{\partial^2 \Phi}{R \partial \varphi \partial x} = -S \quad (1.9)$$

то два первых уравнения системы (1.8) будут удовлетворены тождественно. Исключая из системы (1.1) перемещения u и v , приходим к уравнению совместности деформаций

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{R^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma}{R \partial \varphi \partial x} = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

Используя далее соотношения упругости (1.5) и соотношение (1.9), получим следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + D \nabla^2 \nabla^2 w &= p_x \\ -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{Eh} \nabla^2 \nabla^2 \Phi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

Уравнения, описывающие потерю устойчивости цилиндрической оболочки, получим при следующих допущениях [1].

1. Оболочка имеет идеально правильную цилиндрическую форму, ее начальное напряженное состояние - безмоментное.
2. Изменением всех геометрических размеров оболочки в докритическом состоянии пренебрегаем.
3. При потере устойчивости связь между перемещениями и внутренними силовыми факторами в оболочке описывается соотношениями упругости (1.4).
4. Оболочка нагружена только приложенными к торцам мертвыми контурными усилиями и внешним гидростатическим давлением интенсивности $p = p(x, \varphi)$.

В соответствии с первым допущением в начальном докритическом состоянии в оболочке существуют только внутренние усилия T_x^0, T_y, S^0 , удовлетворяющие уравнениям равновесия безмоментной теории оболочек [1]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_x^0}{\partial x} + \frac{\partial S^0}{R \partial \varphi} &= 0 \\ \frac{\partial T_y^0}{R \partial \varphi} + \frac{\partial S^0}{\partial x} &= 0 \\ \frac{T_\varphi^0}{R} &= -p \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

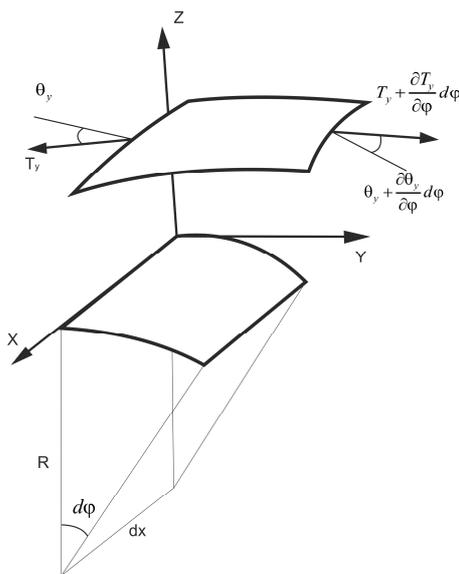


Рис. 3

Эти уравнения равновесия вытекают из уравнений (1.5) если в последних положить $Q_x = Q_y = 0$, $p_x = p_y = 0$ и $p_x = -p$.

Рассмотрим условие равновесия оболочки в отклоненном состоянии (рис. 3). Спроектируем все действующие на элемент усилия (на рис. 3 показано только усилие T_ϕ) на направление нормали z и определим фиктивную нормальную нагрузку [1].

$$p_z^\phi = \frac{\partial}{R \partial \phi} (T_y^0 \vartheta_y) + \frac{\partial}{\partial x} (T_x^0 \vartheta_x) + \frac{\partial}{\partial x} (S^0 \vartheta_y) + \frac{\partial}{\partial y} (S^0 \vartheta_x) \quad (1.12)$$

Учитывая (1.11) получим

$$p_z^\phi = -pR\chi_y + T_x^0 \chi_x + 2S^0 \chi_{xy} \quad (1.13)$$

Если воспользуемся упрощенными выражениями кривизн и соответствующей им системой уравнений (1.10), то получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + D \nabla^2 \nabla^2 w &= -pR \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \phi^2} + T_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2S^0 \frac{\partial^2 w}{R \partial \phi \partial x} \\ -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{Eh} \nabla^2 \nabla^2 \Phi &= 0 \end{aligned} \quad (1.14)$$

В задачах устойчивости однородная система уравнений должна быть подчинена однородным граничным условиям. Так, если на торце замкнутой цилиндрической оболочки задано $w = 0$, то остальные три однородных граничных условия на этом торце будут [1]:

- 1) $u = 0$ либо $T_x = 0$;
- 2) $v = 0$ либо $S = 0$;
- 3) $\theta_x = 0$ либо $M_x = 0$.

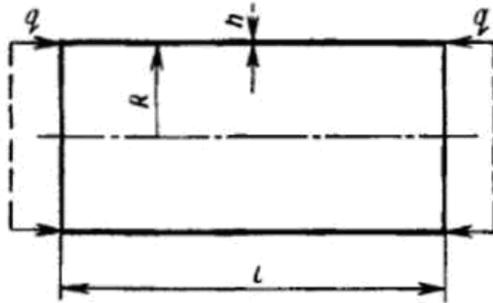


Рис 4. а.

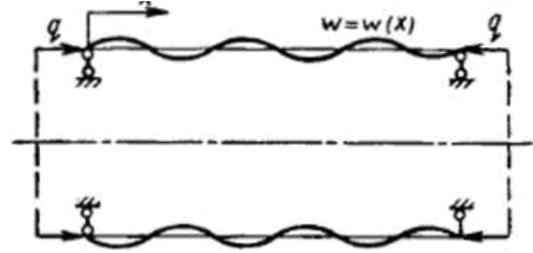


Рис. 4 б.

Цилиндрическая оболочка.

Для получения однородного линейризованного уравнения, при, описывающего осесимметричную форму потери устойчивости оболочки, воспользуемся широко известным уравнением изгиба цилиндрической оболочки при осесимметричной нагрузке [1]. Это (2.1) нетрудно получить из (1.10) при $\mu=0$ и гипотезы о том, как будет меняться геометрия оболочки (Рис. 4 б).

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{Eh}{R^2} w = p, \quad (2.1)$$

Здесь, как уже отмечалось, $w = w(x)$ — поперечный прогиб оболочки; $p_z = p_z(x)$ — интенсивность радиальной осесимметричной нагрузки.

Учитывая, что при осесимметричной форме потери устойчивости изменение кривизны

срединной поверхности имеет вид $\chi_x = \frac{d^2 w}{dx^2}$, находим фиктивную радиальную нагрузку

(1.13):

$$p_z^\phi = T_x^0 \frac{d^2 w}{dx^2}.$$

Считая, что в начальном состоянии $T_x^0 = -q$, $T_y^0 = 0$, $S^0 = 0$, и заменяя в уравнении (2.1) p_z на p_z^Φ , приходим к однородному линеаризованному уравнению [1]

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{Eh}{R^2} w + q \frac{d^2 w}{dx^2} = 0$$

При $x = 0$ и $x = l$ задаются граничные условия:

$$w = 0, \quad \frac{d^2 w}{dx^2} = 0. \quad (2.2)$$

Решение краевой задачи (2.1),(2.2) имеет вид

$$w_m(x) = A_m \sin(m\pi x)/l,$$

где m — число полуволн, по которым изгибается образующая цилиндрической оболочки. Соответствующие собственные значения интенсивности нагрузки равны

$$q_m = D \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \frac{Eh}{R^2} \frac{1}{\left(\frac{m\pi}{l} \right)^2}; m = 1, 2, 3, \dots$$

Если число полуволн m считать достаточно большим, а величину $\left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 = \eta$ непрерывно изменяющейся [1], то из условия минимума

$$\frac{dq_m}{d\eta} = D - \frac{Eh}{R^2} \frac{1}{\eta^2} = 0$$

находим

$$m_{кр} = \frac{1}{\pi R} \sqrt[4]{\frac{EhR^2}{D}} = \frac{1}{\pi R} \sqrt{\frac{R}{h}} \sqrt[4]{12(1-\mu^2)}$$

$$q_{кр} = 2 \sqrt{\frac{DEh}{R^2}} = \frac{Eh^2}{R} \frac{1}{\sqrt{3(1-\mu^2)}}$$

При этом верхнее критическое осевое сжимающее напряжение (при $\mu = 0,3$) определяется формулой [1]

$$\sigma_{кр} = \frac{q_{кр}}{h} = \frac{E}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} \frac{h}{R} \approx 0,6 E \frac{h}{R}$$

Неосесимметричные формы потери устойчивости цилиндрической оболочки, сжатой в осевом направлении, в классической постановке можно исследовать с помощью системы уравнений (1.14), которая при $T_x^0 = -q$; $T_y^0 = 0$, $S^0 = 0$ принимает вид

$$D \nabla^2 \nabla^2 w + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + q \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{1}{Eh} \nabla^2 \nabla^2 \Phi - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

Если для обоих торцов оболочки задаются граничные условия (то есть при $x = 0$ и $x = l$):

$$w = 0, M_x = 0, v = 0; T_x = 0; \quad (2.4)$$

то решение краевой задачи (2.3), (2.4) имеет вид

$$\begin{aligned}
 w &= A \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \sin(n\varphi) \\
 \Phi &= B \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \sin(n\varphi)
 \end{aligned}
 \tag{2.5}$$

поскольку в этом случае граничные условия удовлетворяются автоматически. Подставив эти функции в систему уравнений (2.3) и сократив общий для всех слагаемых множитель $\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \sin(n\varphi)$, получим однородную систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
 &\left\{ D \left[\left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \left(\frac{n}{R} \right)^2 \right]^2 - q \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \right\} A - \frac{1}{R} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 B = 0 \\
 &\frac{1}{R} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 A + \frac{1}{Eh} \left[\left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \left(\frac{n}{R} \right)^2 \right]^2 B = 0
 \end{aligned}$$

Равенство нулю определителя этой системы приводит к собственным значениям нагрузки

$$q_{nm} = D\eta + \frac{Eh}{R^2} \frac{1}{\eta},$$

где

$$\eta = \left(\frac{1}{m\pi} \right)^2 \left[\left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \left(\frac{n}{R} \right)^2 \right]^2.$$

При большом числе полуволн n или m комплекс η можно рассматривать как непрерывно изменяющийся параметр [1]. Определяя условие минимума q_{nm} по этому параметру, снова приходим к формуле $q_{кр} = 2\sqrt{\frac{DEh}{R^2}} = \frac{Eh^2}{R} \frac{1}{\sqrt{3(1-\mu^2)}}$, причем

критическое значение комплекса η равно

$$\eta_{кр} = \sqrt{\frac{Eh}{DR^2}} = \frac{2\sqrt{3(1-\mu^2)}}{hR}.$$

Заметим, что при $n_{кр} = 0$ происходит осесимметричная потеря устойчивости. Итак, оболочка становится неустойчивой, когда осевое сжимающее напряжение превысит значение

$$\sigma_{кр} = \frac{E}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} \frac{h}{R}.$$

Суммарная критическая сжимающая сила [1]

$$P_{кр} = 2\pi R \sigma_{кр} h = \frac{2\pi E h^2}{\sqrt{3(1-\mu^2)}}$$

Сложность построения математической модели оболочки с вырезами и ее аналитического изучения делает целесообразным конечно-элементный анализ, выполняемый, например, с помощью пакета программ ANSYS.

Численный анализ устойчивости цилиндрической оболочки.

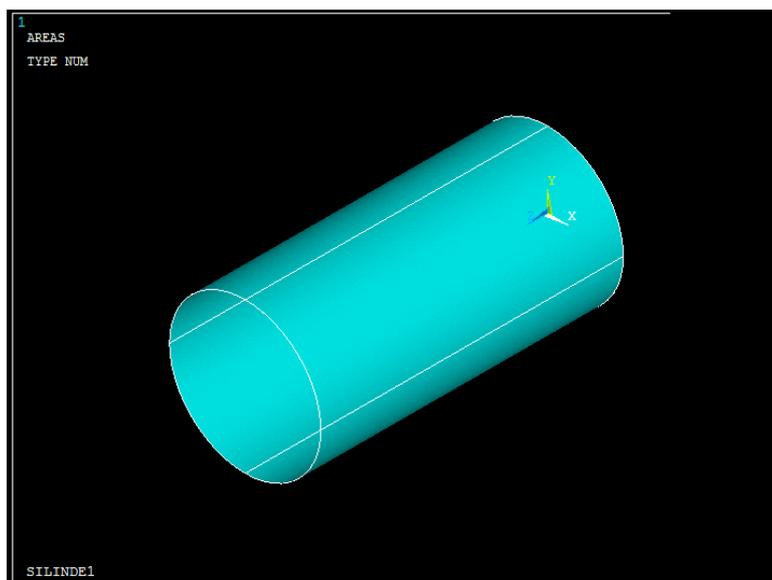


Рис. 5
Цилиндрическая оболочка в ANSYS

Параметры цилиндрической оболочки:
длина $H1 = 4$ м; толщина оболочки $H2 = 0.05$ м; радиус $R1 = 0.5$ м; коэффициент Пуассона $\mu = 0.3$; модуль Юнга $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па; плотность $\rho = 7850$ кг/м³.

Цилиндр построен так (рис.5), что его сечение плоскостью Oxy представляет собой окружность радиусом $R1$, а, образующая цилиндра направлена вдоль оси z .

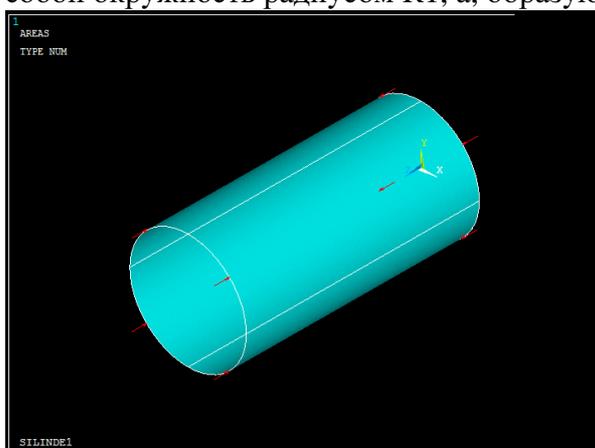


Рис. 6 а.
Внешняя нагрузка

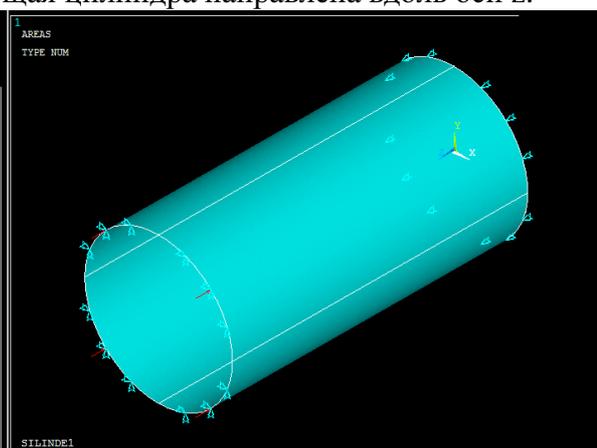


Рис. 6 б.
Кинематические условия

Далее при решении задачи с помощью ANSYS следует задать граничные условия (рис. 6 б) и внешние усилия (рис.6 а). Следует отметить, что при моделировании в ANSYS объекты должны быть закреплены, чтобы не допускалось свободное перемещение оболочки по какой-либо из шести степеней свободы как абсолютно твердого тела. Граничные условия задаются с учетом симметрии, согласно которой точки, находящиеся в сечении цилиндра, находящемся на расстоянии половины длины цилиндра от любого из торцов, не могут перемещаться вдоль оси z (на рисунке 6 б эти точки расположены на торце, находящемся в верхнем правом углу). Точкам, расположенным на торце оболочки, запрещается перемещение в плоскости Oxy (на рисунке 6 б эти точки расположены на торце, находящемся в нижнем левом углу). Точкам, расположенным на окружности, лежащей в плоскости симметрии, запрещается перемещение вдоль оси z .

Далее, для решения задачи, строилась сетка с конечными элементами Shell93. Полученные результаты содержатся в таблице и отражены на рисунках.

длина элемента сетки	$\Delta 1=0.05$	$\Delta 2=0.1$
критическое усилие $\sigma 1$ (Н)	1.73963E8	1.73962E8
критическое усилие $\sigma 2$ (Н)	1.73963E8	1.73962E8
критическое усилие $\sigma 2$ (Н)	2.77329E8	2.77400E8

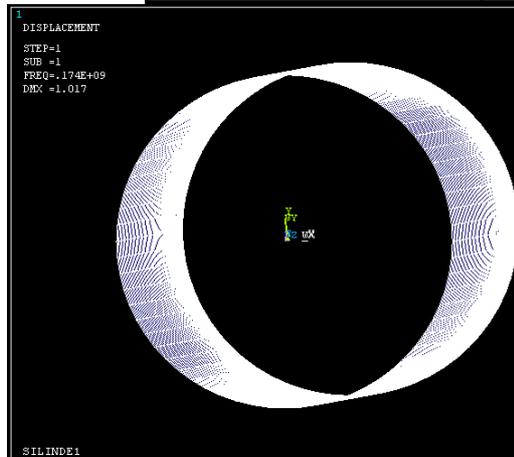


Рис. 7 а. ($\Delta 1$)

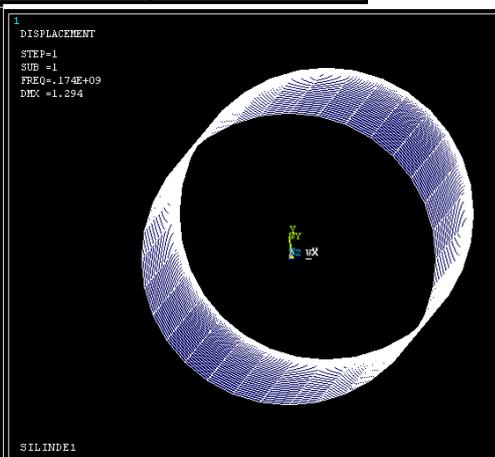


Рис. 8 а. ($\Delta 2$)

Первая форма потери устойчивости, вид сверху.
(Для наглядности, все виды сверху немного увеличены).

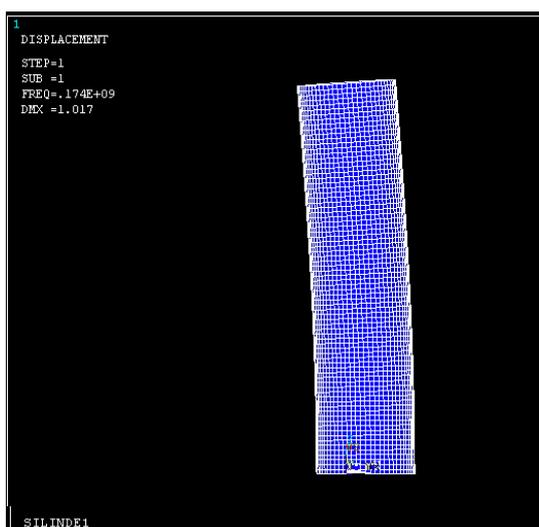


Рис. 7 б. ($\Delta 1$)

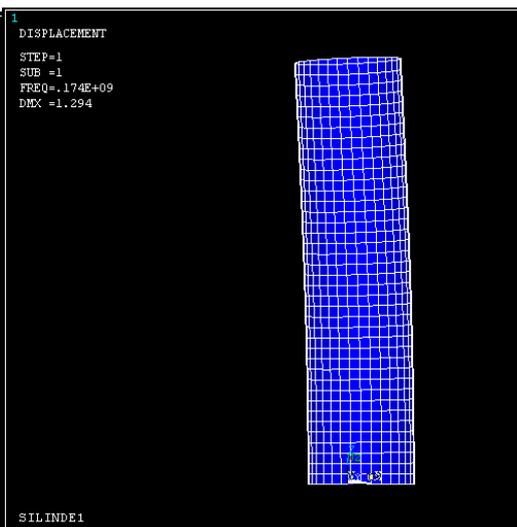


Рис. 8 б. ($\Delta 2$)

Первая форма потери устойчивости, вид сбоку.

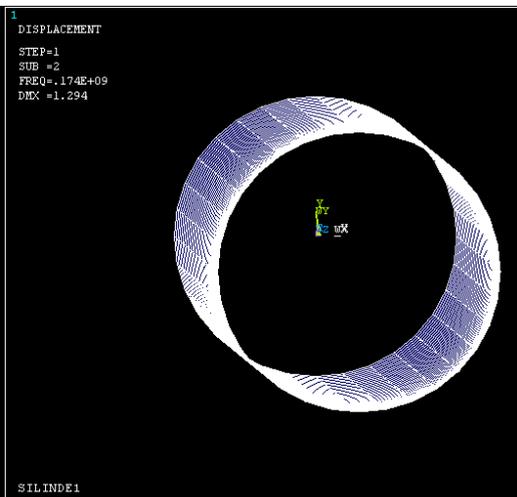
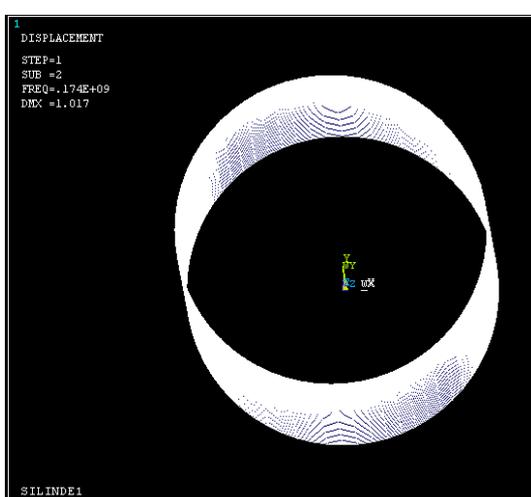
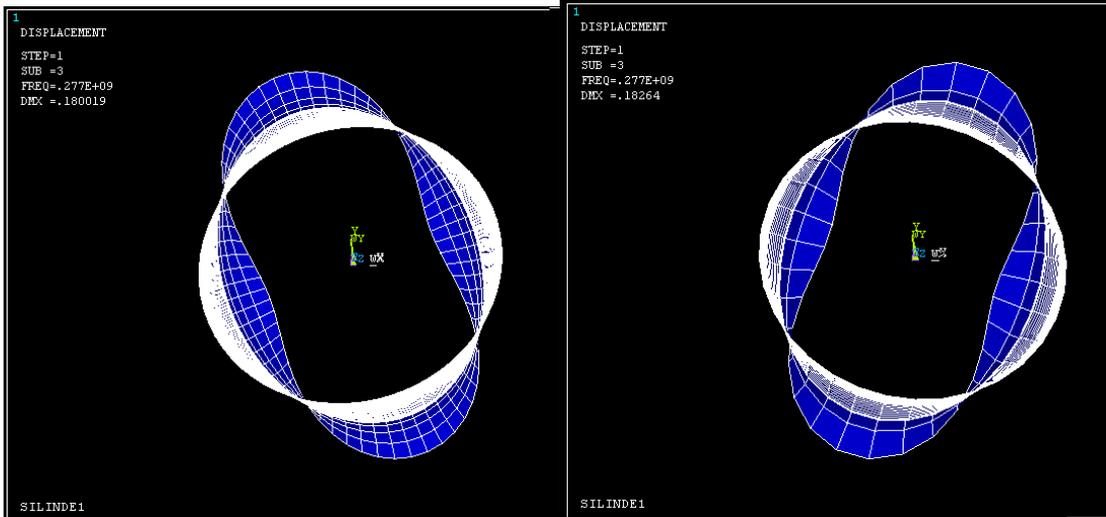
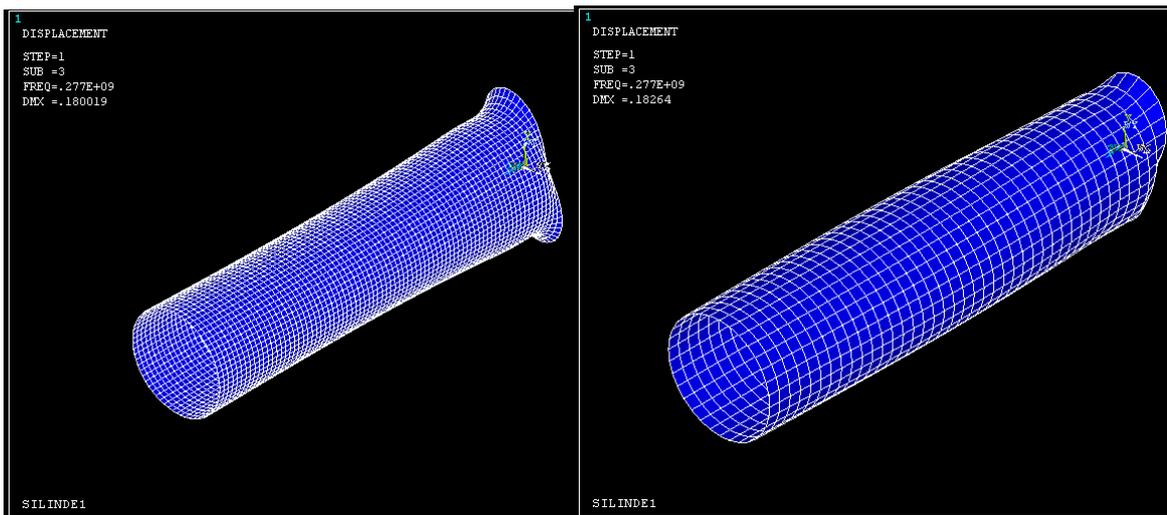


Рис. 7 в. ($\Delta 1$)Рис. 8 в. ($\Delta 2$)

Вторая форма потери устойчивости, вид сверху.

Рис. 7 г. ($\Delta 1$)Рис. 8 г. ($\Delta 2$)

Третья форма потери устойчивости, вид сверху.

Рис. 7 д. ($\Delta 1$)Рис. 8 д. ($\Delta 2$)

Третья форма потери устойчивости, изометрический вид.

Формы потери устойчивости не являются ни осесимметричными, ни шахматными. Критические усилия, полученные теоретическим путем, примерно в 10 раз больше значений, полученных с помощью моделирования в ANSYS, а следовательно полученные с использованием численного анализа результаты существенно ближе к известным экспериментальным данным, чем теоретические результаты (известно расхождение в 4-10 раз теоретических и экспериментальных результатов [4]). Это позволяет сделать заключение о высокой степени достоверности результатов. Объясняется это тем, что теоретическая модель не учитывает, например, длину оболочки. При сгущении сетки в 2 раза, критические усилия, моделей, полученные с помощью ANSYS, практически не изменяются. Также практически не изменяются формы потери устойчивости цилиндрической оболочки.

Анализ устойчивости цилиндрической оболочки, имеющей круговые вырезы.

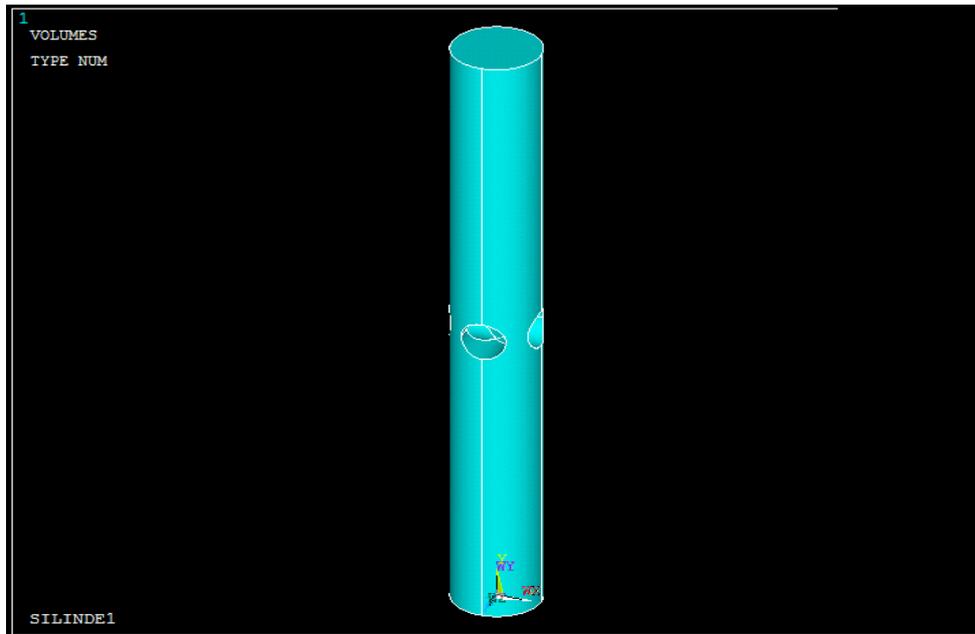


Рис. 9

Цилиндрическая оболочка с круговыми вырезами

Параметры цилиндрической оболочки:

Длина $H1 = 4$ м; толщина оболочки $H2 = 0.05$ м; радиус $R1 = 0.5$ м; коэффициент Пуассона $\mu = 0.3$; модуль Юнга $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па; плотность $\rho = 7850$ кг/м³; количество круговых вырезов: 4; радиус вырезов $R2 = 0.25$ м.

В целом цилиндрическая оболочка та же, что и в предыдущей задаче, но только с круговыми вырезами. Граничные условия берутся те же.

длина элемента сетки	$\Delta 1=0.05$	$\Delta 1=0.1$
критическое усилие $\sigma 1$ (Н)	7.72432E7	7.75305E7
критическое усилие $\sigma 2$ (Н)	1.02387E8	1.02724E8
критическое усилие $\sigma 2$ (Н)	1.02397E8	1.02796E8

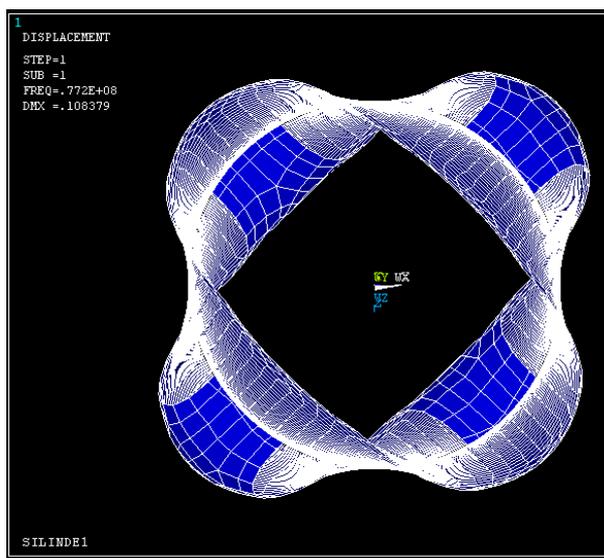


Рис. 10 а. ($\Delta 1$)

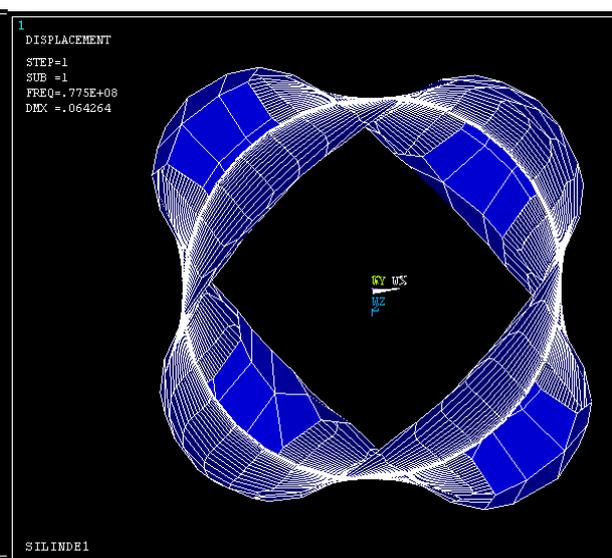


Рис. 11 а. ($\Delta 2$)

Первая форма потери устойчивости, вид сверху.
(Для наглядности, все виды сверху немного увеличены).

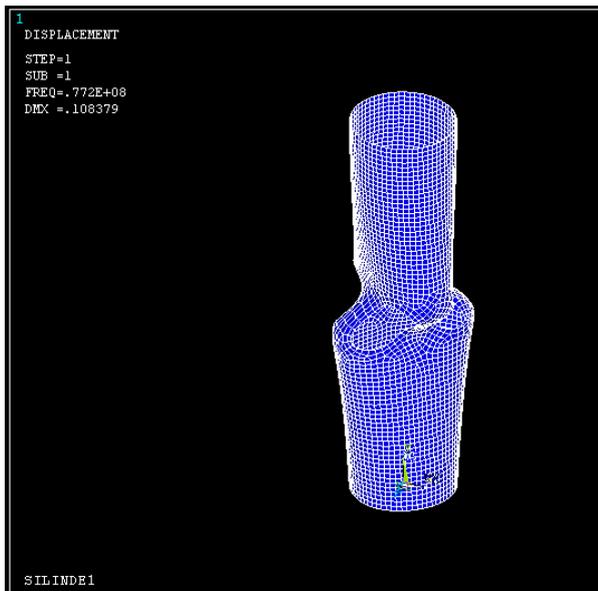


Рис. 10 б. ($\Delta 1$)

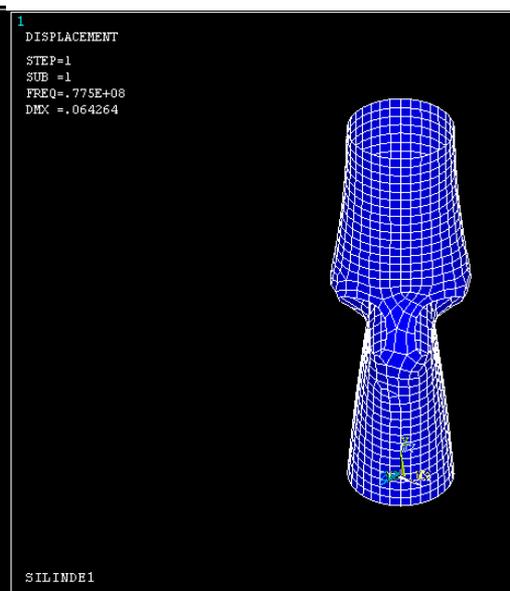


Рис. 11 б. ($\Delta 2$)

Первая форма потери устойчивости.

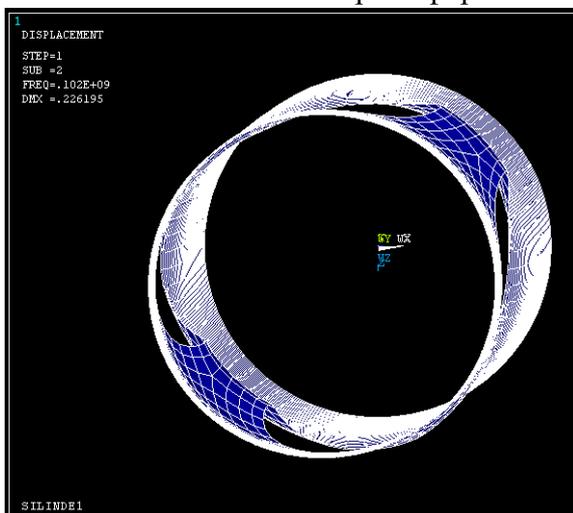


Рис. 10 в. ($\Delta 1$)

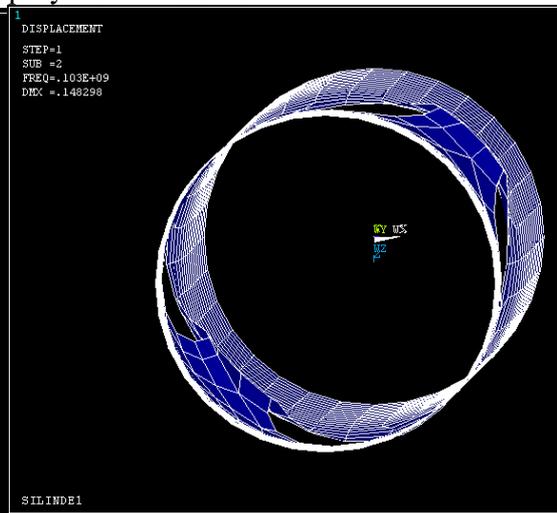


Рис. 11 в. ($\Delta 2$)

Вторая форма потери устойчивости.

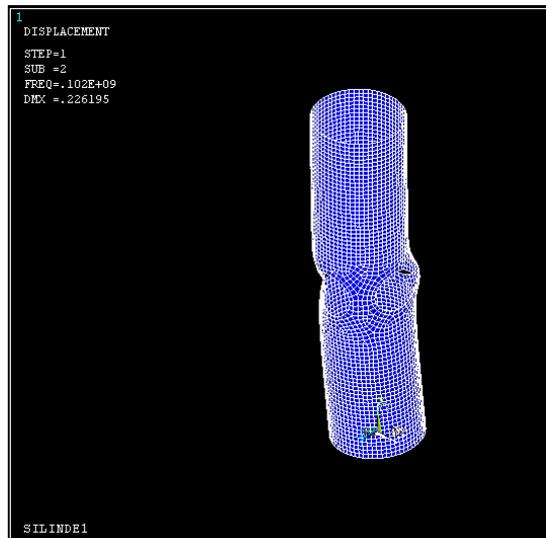


Рис. 10 г. ($\Delta 1$)

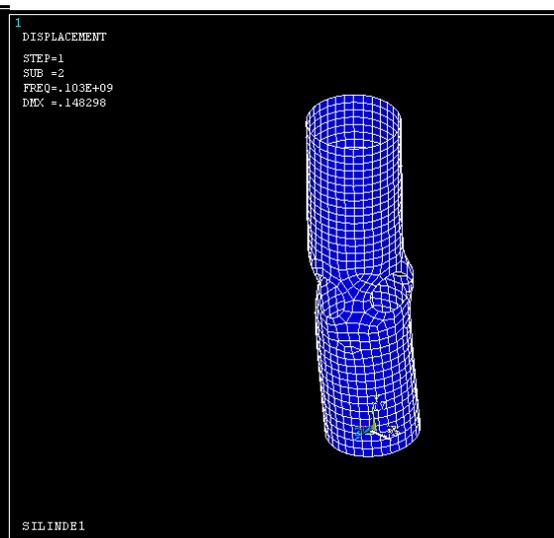


Рис. 11 г. ($\Delta 2$)

Вторая форма потери устойчивости.

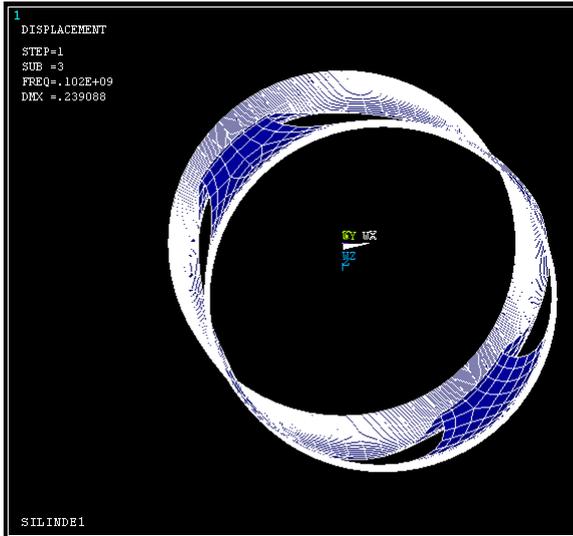


Рис. 10 д. ($\Delta 1$)

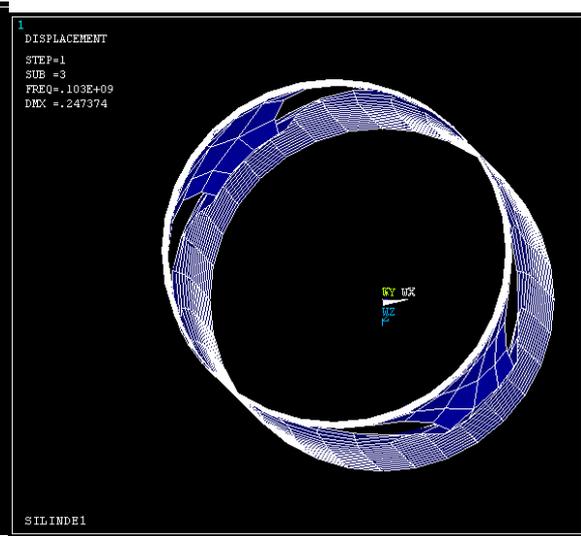


Рис. 11 д. ($\Delta 2$)

Третья форма потери устойчивости.

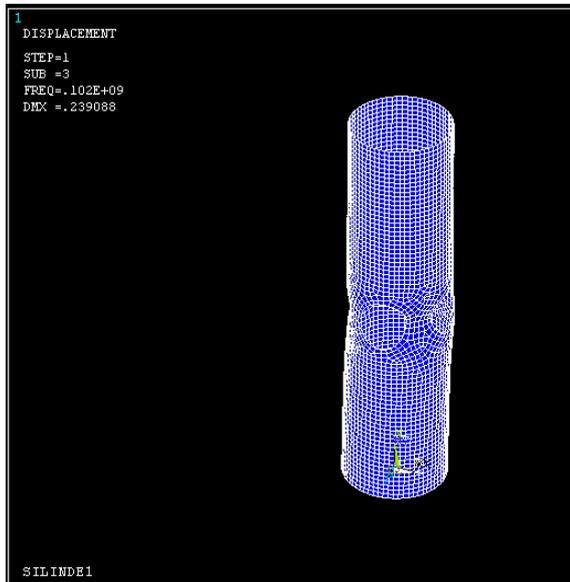


Рис. 10 е. ($\Delta 1$)

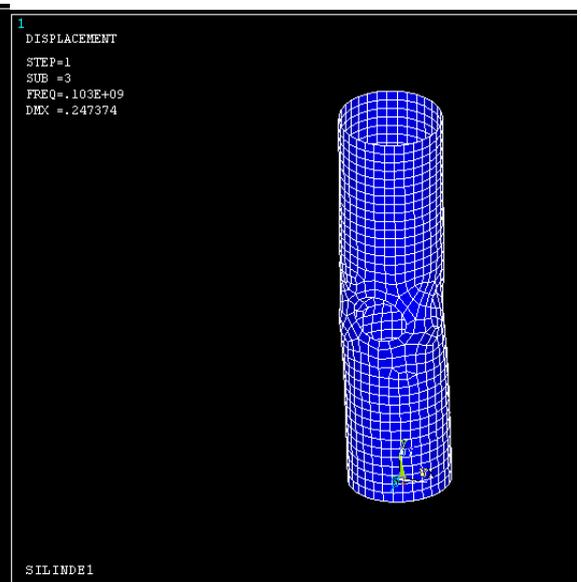


Рис. 10 е. ($\Delta 2$)

Третья форма потери устойчивости.

Анализ таблиц и рисунков позволяет сделать вывод о том, полученные приближенные решения близки к искомому точному решению, так как при сгущении сетки значения критических усилий и формы потери устойчивости практически не изменились.

Список литературы

1. Алфатов Н. А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. М., Машиностроение, 1978. 312 с.
2. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М., Наука, 1967. 984 с.
3. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. М., Наука, 1974. 448 с.
4. Пиккуль В.В. К теории устойчивости оболочек // Вестник ДВО РАН, 2006, N4, с.81-86