

МОДЕЛИ ВИБРОУДАРНЫХ ПРОЦЕССОВ В 2D-СИСТЕМАХ С НАСЛЕДСТВЕННЫМИ СВОЙСТВАМИ

© КРУПЕНИН В.Л.

Рассмотрены и описаны стоячие сильно нелинейные волны в решетчатых двумерных системах с наследственными свойствами, образованных взаимно перпендикулярными струнами и системами точечных абсолютно твердых тел, предназначенных, например, для соединения струн, а также ограничителями. Приводятся операторные и интегральные уравнения движения и примеры построения некоторых типов периодических стоячих волн.

1. Рассмотрим прямоугольную решетку [1-4], составленную из двух взаимно перпендикулярных семейств упругих одинаковых линейных струн, заземленных на концах и имеющих соответственно длины L_1 и L_2 (рис. 1). Каждая струна нумеруется при помощи индексов $k = 0, 1, 2, \dots, N_1$ и $q = 0, 1, 2, \dots, N_2$. В узлах решетки помещены точечные абсолютно твердые тела с одинаковыми массами m .

Предполагается, что прямоугольные ячейки решетки одинаковы, но длины и ширины их сторон, вообще говоря, не равны между собой и сама решетка (дискретный аналог мембраны) - анизотропна. Струнные элементы предполагаются безынерционными. Крепления струн в узлах считаются абсолютно жесткими, а их натяжения - настолько большими, что возможными изменениями при линейных колебаниях можно пренебречь.

Будем также предполагать, что материал решетки негуковский, а обладает наследственными свойствами [5]. Для ряда материалов, например, бетонов, некоторых типов композитов, полимеров и других описание связи между напряжением (σ) деформацией (ε) даже в простейшем одномерном линейном случае дается не законом Гука $\sigma = E\varepsilon$, а некоторой интегральным соотношением выражающим принцип Больцмана - Вольтерра. В установившемся движении принимается

$$\sigma(t) = E_0[\varepsilon(t) - \int_{-\infty}^t \Gamma_0(t-s)\varepsilon(s)ds], \quad E_0 = \text{const}, \quad (1)$$

где $\Gamma_0(t)$ -ядро релаксации, характеризующее эволюцию напряжения при мгновенной (в некоторый момент времени) фиксации деформации. Будем предполагать, что ядро релаксации дается гладкой или имеющую слабую

сингулярность функцией (обычно структура ядра релаксации оценивается как $\Gamma_0 \sim \exp(\xi t)t^{-\lambda}$; $0 < \lambda < 0,5$ [7]).

Вместо соотношения (1) можно пользоваться операторным соотношением
$$\sigma(t) = E_0(I - \Gamma^*) \varepsilon(t) \equiv \mathcal{R} \varepsilon(t), \quad (2)$$

$\mathcal{R} \equiv E_0(I - \Gamma^*)$ – оператор релаксации; I – единичный оператор, а Γ^* – оператор Вольтерра, представление которого дано в формуле (1). Заметим, что для целей этой работы нет необходимости приводить формальные части постановки задачи, касающейся чисто математических аспектов проблемы. Во всех случаях мы будем апеллировать к физическому смыслу задачи.

Пусть каждая «горизонтальная сторона» ячеек имеет длину ΔL_1 ; «вертикальная» – ΔL_2 . Кроме того, пусть безынерционные «горизонтальные участки» имеют натяжение W , а «вертикальные участки» – соответственно V .

Динамика решетчатой конструкции описывается посредством N функций прогибов $u_{kq}(t)$, где индексы $k=1,2,.. N_1$; $q=1,2,.. N_2$. Каждая из функций $u_{kq}(t)$ изменяется вдоль некоторой оси, перпендикулярной плоскости статического равновесия решетки. Считаем, что первый по счету индекс (в данном случае k) – нумерует струны «слева направо» или наоборот – рис.1, а второй индекс (в данном случае q) – «снизу вверх» или наоборот, рис 1.

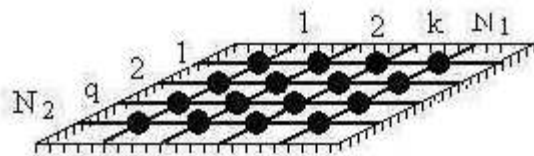


Рис.1.

Параллельно плоскости статического равновесия решетки на расстояниях $\Delta_{1kq} > 0$ и $\Delta_{2kq} < 0$ от каждого из узлов установлены ограничители хода, с которыми точечные тела, находящиеся в узлах решетки могут совершать абсолютно упругие соударения; удары предполагаются прямыми и центральными. Ограничители также могут находиться и только с одной из сторон: для каких-то k и q , либо $\Delta_{1kq} \rightarrow \infty$, либо для каких-то n и m $\Delta_{2nm} \rightarrow -\infty$. В частности, некоторые узлы могут быть вообще не оснащены ограничителями. Наконец, параллельно плоскости статического равновесия решетки на фиксированных расстояниях $\Delta_1 > 0$ и $\Delta_2 < 0$ могут быть установлены две плоские стенки, с которыми точечные тела, могут

также соударяться. Заметим также, что такие стенки могут располагаться только по одну сторону от решетки.

На рис. 2 показан случай одностороннего ограничителя, представляющего собой прямую стенку.

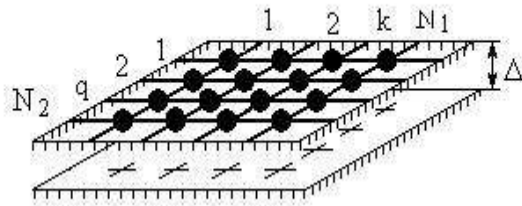


Рис.2

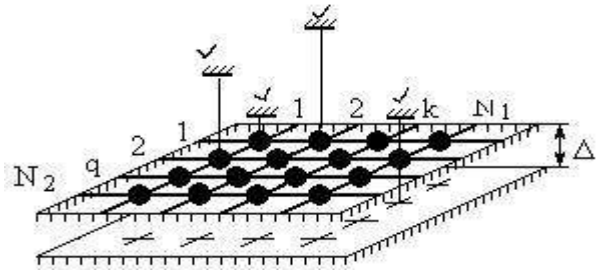


Рис.3

На рис.3 с противоположенной стороны показано несколько малых прямых ограничителей – помечены штриховкой и «галочками». Для простоты не обозначены соответствующие ограничителям индексы.

Таким образом, если при $t=t_0$ и (или) при $t=t^0$ для каких либо k и q происходит соударение с верхним или нижним ограничителями, то [2-4]:

$$u_{tkq}(t^0-0) = -R_{kq}u_{tkq}(t)(t^0+0), \quad u_{kq}(t^0) = \Delta_{1kq} > 0; \quad u_{tkq}(t_0-0) = -R_{kq}u_{tkq}(t)(t_0+0), \quad u_{kq}(t) = \Delta_{2kq} < 0;$$

$$\Delta_{1kq} \leq u_{kq}(t) \leq -\Delta_{2kq}; \quad 0 < R_{kq} \leq 1. \quad (3)$$

Здесь и далее нижняя индексация по независимой переменной t означает дифференцирование. Последнее двойное неравенство в (1) запрещает узлам решетки оказываться «за преградами» и накладывает на систему неустойчивые связи, ограничивая конфигурационное пространство системы; R_{kq} – коэффициенты восстановления [5,6] в каждой из N ударных пар.

Пусть вынуждающие силы, а также любые другие неконсервативные силы, действующие в решетке на каждое из массивных точечных тел – малы. Заметим, что при принятии каких-либо линейных моделей демпфирования (например модели Кельвина - Фойгхта) это предположение не существенно: получаемы ниже представления решений через периодические функции Грина (ПФГ) линейных систем сохраняют свою форму. Однако сама их структура весьма усложняется [3.4].

Имея в виду оперировать, в основном аналитическими представлениями, и, обозначив неконсервативные силы $\mu_{gkq}(t, u_{kq}, u_{qk}, \dots)$, где многоточие

обозначает неучитываемые переменные, μ - малый параметр, модель системы построим следующим образом [2, 3, 4, 7]. Так как каждая частица связана одновременно с двумя струнами, то для всех значений индексов имеем N то для всех значений индексов имеем с учетом (1) N интегро-операторных уравнений:

$$m u_{tkq} + c_1 \mathcal{H}_1(2u_{kq} - u_{(k-1,q)} - u_{(k+1,q)}) + c_2 \mathcal{H}_2(2u_{kq} - u_{(k,q-1)} - u_{(k,q+1)}) = \varepsilon g_{kq}(t, u_{kq}, u_{tkq}) + \Phi_{kq}(\varepsilon, u_{kq}, u_{tkq}), \quad (4)$$

где функции $\Phi_{kq}(\varepsilon, u_{kq}, u_{tkq})$ - суть сингулярные обобщенные функции, описывающие ударное взаимодействие в каждой из ударных пар [4, 6, 8, 10]. При этом предполагается, что удары близки к упругим: $1 - R_{kq} = \varepsilon \rho_{kq}$; $\rho_{kq} > 0$. Здесь также соответственно обозначено: $c_1 = W/\Delta L_{1,2}$; $c_2 = V/\Delta L_{1,2}$ - коэффициенты упругости. Граничные условия заземления можно записать как $([1, 2,]) u_{kq} = 0$, при $k=0; N_1$; $q=0; N_2$. Поэтому $N = (N_1 - 1)(N_2 - 1)$. При необходимости сюда могут быть добавлены начальные условия. Однако далее рассматриваются установившиеся режимы движения и поэтому вид начальных условий - несущественен.

2. Ограничим рассмотрение случаям, когда решетка взаимодействует только с нижним ограничителем, т.е. предпоследнее двойное неравенство в общих выражениях (1) принимает для всех k и q , например, вид

$$u_{kq}(t) \geq \Delta; \Delta \leq 0. \quad (5)$$

Предположим, что сила $g_{kq}(t, u_{kq}, u_{tkq}, \dots)$ T -периодична по времени. Здесь и далее будем обозначать $\omega = 2\pi T^{-1}$. Для описания установившихся виброударных T -периодических процессов воспользуемся методами частотно-временного анализа [4, 5, 8, 9]. Перейдем к интегральной форме операторных уравнений движения, следующих из уравнения (4).

Таким образом, если при $t=t^0$ и (или) при $t=t_0$ для каких либо k и q происходит соударение с верхним или нижним ограничителями, то [4,5]:

$$u_{tkq}(t_0-0) = -R_{kq} u_{tkq}(t)(t_0+0), \quad u_{kq}(t^0) = \Delta_{1kq} > 0; \quad u_{tkq}(t_0-0) = -R_{kq} u_{tkq}(t)(t_0+0), \quad u_{kq}(t) = \Delta_{2kq} < 0;$$

$$u_{kq}(t) = \sum_0^T \sum_0^T \int_0^T \chi_{kq,nj}(t-s) [\varepsilon g_{kq}(s, u_{kq}, u_{tkq}, \dots) + \Phi_{nj}(\varepsilon \rho_{kq}; u_{nj}, u_{tnj})] ds, \quad (6)$$

где суммирование производится соответственно по n и по j ($n = 1, 2, \dots, N_1 - 1$ и также $j = 1, 2, \dots, N_2 - 1$); $\chi_{kq,nj}(t-s)$ T -периодические функции Грина (ПФГ)

решетчатой конструкции, являющиеся T - периодическими реакциями (перемещениями) узлов решетки, пронумерованных парами (k, q) на силовые воздействия, даваемые периодическими последовательностями δ - функций Дирака - $\delta^T(t)$, приложенными, соответственно, в узлах (n, j) [2]. Представления для ПФГ решетчатой системы также даны в [2].

По определению $\chi_{kq,nj}(t-s)$ - T - периодические функции Грина (ПФГ) [5,6,9] – проходные ($k \neq n$; $q \neq j$) или локальные ($k = n$; $q = j$). При этом:

$$\chi_{kq,nj}(t) = T^{-1} \sum_{\sigma=-\infty}^{\infty} L_{kq,nj}(i\sigma\omega) \exp(i\sigma\omega t), \quad T=2\pi\omega^{-1}. \quad (7)$$

Физический смысл ПФГ $\chi_{kq,nj}(t)$ – реакция узла (k, q) на силовое воздействие, приложенное в узле (n, j) и описываемое T – периодической последовательностью δ -функций Дирака – $\delta^T(t)$ [2 - 4].

Операторы динамической податливости $L_{kq,nj}(i\sigma\omega)$ для систем с релаксацией вычислялись, в частности, в [5]:

$$L_{kq,nj}(p) = \zeta \sum_{\alpha=1}^{N_1-1} \sum_{\beta=1}^{N_2-1} \sin(k\alpha\pi N_1^{-1}) \sin(q\beta\pi N_2^{-1}) \sin(\alpha n\pi N_1^{-1}) \sin(\beta j\pi N_2^{-1}) / \Omega_{\alpha\beta}^2 (1 - \langle \Gamma_0(p) \rangle + p^2) \quad (6)$$

Здесь символ $\langle \Gamma_0(p) \rangle$ обозначает изображение по Лапласу ядра релаксации. В большинстве случаев $\langle \Gamma_0(p) \rangle$ - трансцендентная функция p , поэтому оператор динамической податливости $L_{kq,nj}(p)$ выглядит достаточно сложным. Однако структурно – он не сложнее рассмотренных ранее в работе [2]. Введенный нормировочный коэффициент $\zeta = 2[(N_1-1)(N_2-1)]^2$.

Используя результаты, данные в монографии [1] для решетки рассматриваемого типа:

$$\Omega_{kq}^2 = \frac{2T_1}{m\Delta L_1} [1 - \cos(k\pi N_1^{-1})] + \frac{2T_2}{m\Delta L_2} [1 - \cos(q\pi N_2^{-1})], \quad (8)$$

$$\Theta_{kq} = C \sin(kn\pi N_1^{-1}) \sin(qj\pi N_2^{-1}), \quad C = \text{const}, \quad (9)$$

Внося дальнейшие упрощающие предположения, предположим, что все внешние силы зависят только от времени t . Таким образом вместо (4) получим

$$u_{kq}(t) = \sum_0^T \sum_0^T \chi_{kq,nj}(t-s) [\varepsilon g_{kq}(s) + \Phi_{nj}(\varepsilon, u_{nj}, u_{tnj})] ds. \quad (10)$$

Входящая сюда ПФГ $\chi_{kq,nj}(t)$ дается громоздкой, но легко интерпретируемой формулой

$$\chi_{kq,nj}(t) = T^{-1} \zeta \sum_{\sigma=-\infty}^{\infty} \exp(i\sigma\omega) \times \quad (11)$$

$$\times \sum_{\alpha=1}^{N_1-1} \sum_{\beta=1}^{N_2-1} \sin(k\alpha\pi N_1^{-1}) \sin(q\beta\pi N_2^{-1}) \sin(\alpha\pi N_1^{-1}) \sin(\beta\pi N_2^{-1}) / \{ \Omega_{\alpha\beta}^2 [1 - \langle \Gamma_0(i\sigma\omega) \rangle - \omega^2] \}$$

Определяемый ядрами релаксации член $\langle \Gamma_0(i\sigma\omega) \rangle = \langle \Gamma_{0c}(\sigma\omega) \rangle + i \langle \Gamma_{0s}(\sigma\omega) \rangle$, где

$$\Gamma_{0cc}(\sigma\omega) = \int_0^{\infty} \Gamma_0(t) \cos \sigma\omega t dt; \quad \Gamma_{0cs}(\sigma\omega) = \int_0^{\infty} \Gamma_0(t) \sin \sigma\omega t dt$$

косинус и синус преобразования Фурье от ядра релаксация, построенные на семействах частот $\{\sigma\omega\}$. Известно [5], что косинус – преобразование ядра релаксации характеризует упругие свойства рассматриваемых систем, а синус-преобразования – соответственно демпфирующие, проявляющиеся за счет внутренних несовершенств материала («внутреннее трение»).

Пусть вынуждающие силы носят синусоидальный характер: $g_{kq}(t) \equiv P_{kq} \cos \omega t + Q_{kq} \sin \omega t$, $P_{kq}, Q_{kq} > 0$. Тогда решение линейной задачи (в предположении отсутствия ударов, [4]) $u_{kq}(t) \equiv f_{kq}(t)$

$$f_{kq}(t) = \varepsilon \sum \sum_0^T \chi_{kq,nj}(t-s) g_{kq}(s) ds = \varepsilon \sum \sum |L_{kq,nj}(i\omega)| (P_{nj} \cos \omega t + Q_{nj} \sin \omega t) \quad (12)$$

Отсюда выводим $f_{kq}(t) = \varepsilon F_{kq} \cos(\omega t + \psi_{kq})$, где амплитуда F_{kq} и фаза ψ_{kq} вычисляются элементарно.

Представления для функций типа $\Phi_{nj}(\varepsilon \rho_{nj}; u_{nj}, u_{tnj})$ неоднократно выписывались [3,4]. В данном случае, интересуясь периодическими режимами, при реализации которых каждый узел соударяется с преградой не более одного раза за априори неизвестный период движения T , можно записать [3,4]:

$$\Phi_{nj}(u_{nj}, u_{tnj}) = J_{nj} \delta(t - \varphi_{nj}). \quad (13)$$

Здесь $J_{nj} = (1 + R_{nj}) m |u_{tnj}(\varphi_{nj} - 0)| > 0$ – импульс удара; $\varphi_{nj} \in]0, T]$ – фаза удара. Учитывая свойства δ -функции и синусоидальный характер вынуждающих сил находим:

$$u_{kq}(t) = \varepsilon F_{kq} \cos(\omega t + \psi_{kq}) + \sum \sum J_{nj} \chi_{kq,nj}(t - \varphi_{nj}), \quad (14)$$

Полученное представление становится полностью определенным после нахождения $2N$ параметров импульсов и фаз ударов, для чего необходимо воспользоваться условиями совместности, следующими из условий удара;

$$u_{kq}(\varphi_{kq})=\Delta \rightarrow [\Delta-\varepsilon F_{kq}\cos\psi_{kq}=\sum\sum J_{nj}\chi_{kq,nj}(\varphi_{kq}-\varphi_{nj})];k,n=1,2,\dots,(N_1-1);q,j=1,2,\dots,(N_2-1).$$

$$J_{nj}=(1+R_{nj})m|u_{tnj}(\varphi_{nj}-0)|\rightarrow[J_{kq}=(1+R_{nj})m|\varepsilon F_{kq}\sin(\psi_{kq})+\sum\sum J_{nj}\chi_{tkq,nj}(\varphi_{kq}-\varphi_{nj}-0)]. \quad (15)$$

Выражения, стоящие в квадратных скобках представляют собой N алгебраических уравнения $[N=(N_1-1)(N_2-1)]$. Их решения полностью определяют искомый процесс. Сюда необходимо добавить, следующие из (3) ограничения. Так при всех допустимых значениях индексов при данной конфигурации препятствия $J_{kq} \geq 0$ и $u_{kq}(t) \geq \Delta$.

Представление решения в виде типа (14) будем называть N_{2D} -параметрическим представлением. Чтобы не путать представление с соответствующими представлениями для систем с N ударными парами, в системах с одномерными конструктивными элементами, здесь добавлен индекс $2D$, указывающий на двухмерность конструкции. Примеры его использования приводятся ниже.

3. Выведенное представление допускает многочисленные обобщения и модификации.

Во-первых, при учете демпфирования в рамках каких-либо других теорий, оно может быть учтено в представлении соответствующих ПФГ [3]. Структура приведенных соотношений (14), (15) не изменится, но при разворачивании необходимых операторов, выражения, с которыми придется столкнуться, сильно усложняются.

Во-вторых, весьма существенное влияние на формирование различных типов устанавливающихся T -периодических стоячих волн (если их существование вообще возможно) оказывает распределение ограничителей хода узлов решетки. Если абсолютные величины свободных ходов узлов решетки сильно отличаются друг от друга и, наряду с односторонними препятствиями имеются также и двухсторонние, то виброударные процессы сильно усложняются, т.к. усложняются и алгоритмы решения систем типа (14), и представления типа (15).

Однако, если в системе установлен симметричный двухсторонний ограничитель, представляющий собой систему двух стенок, которые равноудалены от плоскости статического равновесия решетки, так что пятое выражение, входящие в (1) принимает вид: $\Delta_1 \leq u_{kq}(t) \leq \Delta_2$, то возникает

возможность существенно упростить анализ симметричных периодических виброударных процессов, когда $u_{kq}(t+T)=u_{kq}(t)$, $u_{kq}(t+T/2)=-u_{kq}(t)$. Все определяющие соотношения строятся на полупериоде [2-5]; см. [8].

4. Рассмотрим упрощенный модельный случай: $R_{kq}=1$ для всех k и q . Пусть, кроме того, синус - преобразования ядер релаксации настолько малы, что в рассматриваемом приближении ими можно пренебречь. Тогда система может рассматриваться при отсутствии возбуждения система может рассматриваться, как консервативная. Таким образом получим

$$u_{kq}(t)=\varepsilon \sum_{n_j} \int_0^T \chi_{kq,n_j}(t-s) \Phi_{n_j}(u_{n_j}, u_{tn_j}) ds, \quad (16)$$

$$u_{kq}(t)=\sum_{n_j} \chi_{kq,n_j}(t-\varphi_{n_j}). \quad (17)$$

Полученное $2N_{2D}$ – параметрическое представление полностью определяется решениями уравнений совместности, следующими из условий удара и принимающими в данном случае вид:

$$u_{kq}(\varphi_{kq})=\Delta \rightarrow [\Delta=\sum_{n_j} \chi_{kq,n_j}(\varphi_{kq}-\varphi_{n_j})]; \quad k,n=1,2,\dots,(N_1-1); \quad q,j=1,2,\dots,(N_2-1);$$

$$J_{n_j}=2m|u_{tn_j}(\varphi_{n_j}-0)| \rightarrow [J_{kq}=2m|\sum_{n_j} \chi_{tkq,n_j}(\varphi_{kq}-\varphi_{n_j}-0)|]; \quad J_{kq} \geq 0, \quad u_{kq}(t) \geq \Delta. \quad (18)$$

В качестве примера рассмотрим квадратную решетку конфигурации «2 на 2». Система уравнений движения (2), описывающая линейную часть системы при $\varepsilon=0$ и с учетом условий защемления струн и ядер релаксации в данном случае имеет вид:

$$\begin{aligned} m u_{tt11} + c_1 \{2(u_{11}-u_{12}) - \int_{-\infty}^t \Gamma_0(t-s)[u_{11}(s)-u_{12}(s)] ds\} + c_2 \{(2u_{11}-u_{21}) - \int_{-\infty}^t \Gamma_0(t-s)[2u_{11}(s)-u_{21}(s)] ds\} &= 0; \\ m u_{tt12} + c_1 \{2u_{12}-u_{11}\} - \int_{-\infty}^t \Gamma_0(t-s)[2u_{12}(s)-u_{11}(s)] ds + c_2 \{(2u_{12}-u_{11}) - \int_{-\infty}^t \Gamma_0(t-s)[2u_{12}(s)-u_{22}(s)] ds\} &= 0; \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} m u_{tt12} + c_1 \{2u_{21}-u_{11}\} - \int_{-\infty}^t \Gamma_0(t-s)[2u_{21}(s)-u_{11}(s)] ds + c_2 \{2u_{21}-u_{22}\} - \int_{-\infty}^t \Gamma_0(t-s)[(2u_{21}(s)-u_{22}(s))] ds &= 0; \\ m u_{tt12} + c_1 \{2u_{22}-u_{12}\} - \int_{-\infty}^t \Gamma_0(t-s)[2u_{22}(s)-u_{12}(s)] ds + c_2 \{2u_{22}-u_{12}\} - \int_{-\infty}^t \Gamma_0(t-s)[(2u_{22}(s)-u_{21}(s))] ds &= 0; \end{aligned}$$

Даже, несмотря на возможную анизотропию решетки, система (19) обладает многими свойствами симметрии. В работах по теории виброударных систем с распределенными ударными элементами и большим числом ударных пар особую роль играют так называемые хлопки [5, 6, 8] – режимы движения, характеризующиеся, в частности, одновременным соударениями несколькими, возможно, удаленными друг от друга своими частями. Мы рассмотрим периодические хлопки в решетке и, совместив удар с началом отсчета времени, запишем систему (18), используя ПФГ, в виде:

$$\Delta = J_{11} \chi_{11,11}(0) + J_{12} \chi_{11,12}(0) + J_{21} \chi_{11,21}(0) + J_{22} \chi_{11,22}(0);$$

$$\Delta = J_{12} \chi_{12,12}(0) + J_{11} \chi_{12,11}(0) + J_{21} \chi_{12,21}(0) + J_{22} \chi_{12,22}(0);$$

(20)

$$\Delta = J_{21} \chi_{21,11}(0) + J_{12} \chi_{21,12}(0) + J_{21} \chi_{21,21}(0) + J_{22} \chi_{21,22}(0);$$

$$\Delta = J_{22} \chi_{22,11}(0) + J_{12} \chi_{22,12}(0) + J_{21} \chi_{22,21}(0) + J_{22} \chi_{22,22}(0),$$

причем свойства релаксации учтены функциями $\chi_{kq,nj}$.

Симметрия решетки позволяет существенно упростить систему уравнений (20). Заметим, во-первых, что все локальные ПФГ [2-4] в одни и те же моменты времени, в частности при $t=0$, равны между собой: $\chi_{11,11}(0) = \chi_{12,12}(0) = \chi_{21,21}(0) = \chi_{22,22}(0)$; равны также и однотипные производные ПФГ [2-4]: $\chi_{11,12}(0) = \chi_{11,21}(0) = \chi_{12,22}(0) = \chi_{22,12}(0)$; $\chi_{11,22}(0) = \chi_{12,21}(0)$; кроме того, в соответствии с принципом взаимности [3,4] всегда $\chi_{kq,nj} = \chi_{nj,kq}$. Указанные равенства получены умозрительно, исходя из условий симметрии. Разумеется их можно получить и аналитически при помощи представления [2]:

$$\chi_{kq,nj}(0) = \zeta/T \sum_{\sigma=-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^{N_1-1} \sum_{\beta=1}^{N_2-1} \sin(k\alpha\pi N_1^{-1}) \sin(q\beta\pi N_2^{-1}) \sin(\alpha n\pi N_1^{-1}) \sin(\beta j\pi N_2^{-1}) \{ \Omega_{\alpha\beta}^2 [1 - \langle \Gamma_0(i\sigma\omega) \rangle - \omega^2] \}^{-1},$$

где: $\zeta = 2[(N_1-1)(N_2-1)]^{-2}$. Значения собственных частот линейной решетки даны в [1 - 3]. В данном случае

$$\Omega_{\alpha\beta}^2 = \frac{2W}{m\Delta L_1} [1 - \cos(\alpha\pi N_1^{-1})] + \frac{2V}{m\Delta L_2} [1 - \cos(\beta\pi N_2^{-1})]. \quad (21)$$

При этом конкретные значения четырех квадратов собственных частот линейной решетки оказываются такими ($N_1=N_2=3$):

$$\Omega_{11}^2 = \frac{W}{m\Delta L_1} + \frac{V}{m\Delta L_2}; \quad \Omega_{12}^2 = \frac{W}{m\Delta L_1} + \frac{3V}{m\Delta L_2}; \quad \Omega_{21}^2 = \frac{3W}{m\Delta L_1} + \frac{V}{m\Delta L_2}; \quad \Omega_{22}^2 = \frac{3W}{m\Delta L_1} + \frac{3V}{m\Delta L_2}.$$

В изотропном случае ($\frac{W}{\Delta L_1} = \frac{V}{\Delta L_2}$) эти выражения существенно упрощаются, кроме того, из-за появления еще одной симметрии, вторая и третья собственные частоты совпадают.

Соображения симметрии и приведенные выше соотношения приводят к равенству всех четырех искомого импульсов удара: $J_{11} = J_{12} = J_{21} = J_{22} \equiv J$. Величина J однозначно зависит от полной энергии системы и является ее интегралом движения. Другой интеграл движения – произвольный момент удара [3,4].

Таким образом, например, из первого уравнения (20) найдем для величины ударного импульса:

$$J = \Delta [\chi_{11,11}(0) + 2\chi_{11,12}(0) + \chi_{11,22}(0)]^{-1}, \quad (22)$$

Внося (22) в (17) и, учитывая построения проведенные в п. 4, получаем общий вид определяющего $2N_{2D}$ – параметрическое представления для T – периодических хлопков в синхронно соударяющейся решетке с четырьмя узлами при условии, что один из ударов совмещен с началом отсчета времени:

$$u_{kq}(t) = J [\chi_{11,11}(t) + 2\chi_{11,12}(t) + \chi_{11,22}(t)] = \\ = \Delta [\chi_{11,11}(0) + 2\chi_{11,12}(0) + \chi_{11,22}(0)]^{-1} [\chi_{11,11}(t) + 2\chi_{11,12}(t) + \chi_{11,22}(t)]. \quad (23)$$

Таким образом, соотношения п.4 определяют формулу (22), дающую важнейшую характеристику синфазного процесса – ударный импульс, а также и, следующий из (16) ряд, (23) определяющий искомый закон движения.

Для построения графика $J(\omega)$, оценим вначале частоту стоячей волны ω_0 , отвечающую максимальному (при введенных упрощениях бесконечно большому) импульсу удара. Воспользуемся формулой (22) и учтем свойства ПФГ [1]. Анализ показывает; $\omega_0 = 2\Omega_{11} - \theta(T_{1,2}; m; \Delta L_{1,2})$, где $\theta > 0$ – суть достаточно громоздко вычисляемая функция параметров решетки.

Характер зависимости $J(\omega)$ дан на рис. 4. Она напоминает аналогичную зависимость, получаемую для «ударного осциллятора» [3, 4]. Появление таких зависимостей позволяет говорить об аналогиях между режимами движения сложной решетчатой конструкцией и ударным осциллятором (явления

затягиваний по частоте и амплитуде, жесткого запуска, срыва хлопков и др. [3,4]).

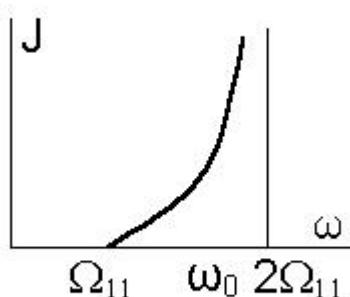


Рис.4

Отметим, что для виброударной системы, состоящей из струны, соударяющейся с прямым протяженным ограничителем, и реализующей синхронный режим движения (хлопок), подобный рассмотренному выше для решетки, характер зависимости $J(\omega)$ имеет вид аналогичный, показанному на рис. 4 [5, 6, 8]. Однако здесь функция $\theta \equiv 0$ и $\omega_0 = 2\Omega_1$; Ω_1 – первая собственная частота линейной струны. Можно показать, что это обстоятельство – есть следствие кратности спектра собственных частот линейной струны. Поэтому аналогия между динамическими свойствами синхронных хлопков в струнных системах и виброударных режимов, устанавливающихся в простой системе с одной степенью свободы здесь более полная. Важно, однако, что эта аналогия прослеживается и для большого числа достаточно сильно отличных друг от друга систем [5, 6, 8].

При отказе от упрощающих предположений, когда в системе присутствует малая возбуждающая синусоидальная сила, $R < 1$ и, наконец, синус преобразование Фурье ядра релаксации не равно нулю, кривая рис.4 трансформируются. Она приобретает две ветви, из которых одна – неустойчивая и имеет вид аналогичный классическому ударному осциллятору с трением [1]. Соответствующие вычисления здесь не приводятся из-за их чрезмерной громоздкости.

5. Таким образом рассматриваемая задача в простейшей постановке решена. При рассмотрении примеров конкретных решеток происходит увеличение размерности определяющей системы алгебраических уравнений. Отсюда следует, что для решеток более высокой размерности, чем в рассмотренном только что примере, импульсы ударов уже не равны между

собой и их величины распределены более сложным образом. Например, для полосы с размерностью «3 на 2» определяющая система алгебраических шести уравнений сводится к двум уравнениям. При этом для импульсов ударов можно найти $J_{11} = J_{13} = J_{21} = J_{31} \equiv J^0$; $J_{12} = J_{22} \equiv J^*$; $J^* > J^0$. Синхронные хлопки существуют при частотах движения $\Omega_{11} < \omega < \Omega^0 < 2\Omega_{12}$.

Сделаем еще два существенных замечания. Первое касается высших форм синхронных хлопков. В рассматриваемом случае односторонних ограничителей проблема построения таких форм, остается пока нерешенной.

В случае симметрично расставленных ограничителей высшие формы консервативной задачи, например, аналогичные построенным в работе [8], определяются при помощи симметричных ПФГ [2 - 5] соответствующих линейных задач.

Заключительное замечание снова касается исходной неконсервативной задачи. В этом случае определяющими соотношениями являются N_{2D} -параметрическое представление и система алгебраических уравнений (15), которые строятся на основе полных соотношений. Поэтому для оценки режимов движения, устанавливающихся при малых $\varepsilon \neq 0$ и близких к режимам консервативной системы можно, как и во многих случаях воспользоваться принципом энергетического баланса [3 - 6, 8].

Пусть ω - частота возбуждения. Рассматривая хлопки той же самой частоты, предположим, что $\Omega_{11} \leq \omega \leq [2\Omega_{11} - \theta(T_{1,2}; m; \Delta L_{1,2})]$. Обозначая далее найденный режимы движения консервативной задачи $u_{kq}^0(t)$, положим приближенно для искомого решения $u_{kq}(t) \approx u_{kq}^0(t)$ для всех k и q .

В соответствии с принципом энергетического баланса при установлении периодических процессов работа неконсервативных сил за период движения равна нулю.

Условие разрешимости уравнения энергетического баланса даст условие существования периодического режима $u_{kq}(t) \approx u_{kq}^0(t)$. Подобные условия, в том числе и для систем с релаксацией, неоднократно выписывались, например в работах [3 - 6, 8]. Они представляют собой неравенства, при выполнении которых обеспечивается средняя достаточность запаса внешней энергии для преодоления сил диссипации (внутреннего трения). При посредстве таких условий можно получить достаточные условия неустойчивости тех или иных периодических движений [3 - 6, 8].

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (Проект 10-08-00500).

Литература

1. Нагаев Р.Ф., Ходжаев К.Ш. Колебания механических систем с периодической структурой. - Ташкент: ФАН, 1973. – 272 с.
2. Крупенин В.Л. О расчете вибрационных процессов в решетчатых двумерных конструкциях //Проблемы машиностроения и надежности машин.- № 4 - 2006 г.
3. Крупенин В.Л. К анализу динамики колеблющейся двумерной решетки // Вестник научно-технического развития (<http://www.vntr.ru/nomera/2007-2/>) -№2 - 2007 г – С.8-18.
4. В.Л. Крупенин. К описанию виброударных процессов в решетчатых двумерных системах //Вестник научно - технического развития (<http://www.vntr.ru/nomera/2007-2/>) -№1 - 2008 г – С.20-30.
5. Бабицкий В.И., Крупенин В.Л. Колебания в сильно нелинейных системах.-М., Наука, 1985. – 384 с.
6. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел.-М.: Наука, 1977.-384 с.
7. Крупенин В.Л. Случайные соударения решетчатой конструкции с периодической структурой и плоским ограничителем хода // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2005. -№4. С. 105-109.
8. Krupenin V.L., Veprik A.M. Vibroconductors equipped with impact elements and distributed vibroimpact systems // Proceedings of the 2-nd European Nonlinear Oscillations Conference. V.1. Czech Prague: CTU, 1996, pp. 229-234.
9. Асташев В.К., Крупенин В.Л. Волны в распределенных и дискретных виброударных системах и сильно нелинейных средах // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 1998. - № 5 - С. 13-30.
10. Крупенин В.Л. К исследованию высших нелинейных форм колебаний виброударных систем с распределенными ударными элементами// Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2005. -№4. С. 105-109.