АСИМПТОТИКА ЛЮБОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА С СУММИРУЕМЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

С. И. Митрохин

НИВЦ МГУ им. М. В. Ломоносова

Москва, Россия

Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение:

$$y^{(4)}(x)+q(x)\cdot y(x)=\lambda a^4\cdot y(x),\quad 0\le x\le\pi,\quad a>0, \tag{1}$$

где λ - спектральный параметр, $q(x)\in L_1[0;\pi]\Leftrightarrow\left(\int_0^x q(t)\cdot dt\right)'_x=q(x)$ почти всюду на отрезке $[0;\pi]$.

Пусть $\lambda=s^4, s=\sqrt[4]{\lambda}\left(\sqrt[4]{1}=+1\right), w_k^4=1, w_1=-w_3=1, w_2=-w_4=i$.

Методами монографии [1] (глава 5) доказывается следующая теорема.

Теорема 1. Общее решение дифференциального уравнения (1) имеет следующий вид:

$$y^{(m)}(x,s)=\sum_{k=1}^{4}C_k\cdot y_k^{(m)}(x,s),\quad m=0,1,2,3, \tag{2}$$

где C_k $(k=1,2,3,4)$ - произвольные постоянные, причём при $|s|\to+\infty$ справедливы следующие асимптотические оценки:

$$\frac{y_k^{(m)}(x,s)}{(as)^m}=w_k^m\cdot e^{aw_k sx}-\frac{1}{4a^3s^3}\cdot\sum_{k_1=1}^{4}w_{k_1}^{m+1}\cdot e^{aw_{k_1}sx}\cdot\int_0^x q(t_1)e^{a(w_k-w_{k_1})st_1}dt_{1,qkk_1}+\frac{1}{16a^6s^6}\cdot\sum_{k_1=1}^{4}w_{k_1}\times$$
$$\times\left[\sum_{k_2=1}^{4}w_{k_2}^{m+1}e^{aw_{k_2}sx}\cdot\int_0^x q(t_1)\cdot e^{a(w_{k_1}-w_{k_2})st_1}\cdot\left(\int_0^{t_1}q(t_2)\cdot e^{a(w_k-w_{k_1})st_2}dt_2\right)dt_1,qkk_1qk_1k_2\right]-\frac{1}{64a^9s^9}\times \tag{3}$$
$$\times\sum_{k_1=1}^{4}w_{k_1}\cdot\left[\sum_{k_2=1}^{4}w_{k_2}\cdot\left(\sum_{k_3=1}^{4}w_{k_3}^{m+1}\cdot e^{aw_{k_3}sx}\cdot\left(\int_0^x\ldots\right)_{qkk_1qk_1k_2qk_2k_3}\right)\right]+\ldots+\underline{O}\left(\frac{e^{|\operatorname{Im}s|\cdot x}}{|s|^{3N+3}}\right),\quad N=1,2,3,\ldots$$

С помощью (3) можно изучить асимптотику собственных значений краевых задач, связанных с дифференциальным уравнением (1) (с разделёнными или неразделёнными граничными условиями, а также со спектральным параметром в граничных условиях). Пример приведён автором в работе [2].

Литература.

1. Митрохин С. И. Спектральная теория операторов: гладкие разрывные, суммируемые коэффициенты. – М.: ИНТУИТ, 2009. – 364с.
2. Митрохин С. И. Асимптотика собственных значений дифференциального оператора четвёртого порядка с суммируемыми коэффициентами // Вестник Московского университета. Серия: математика, механика. – 2009. - №3. – С. 14-17.