Прогнозирование однородно нестационарных временных рядов.

Амирханов Шамиль Даниялович,
КНИТУ-КАИ, г. Казань, Россия.

Напомним, что стохастический временной ряд является однородно нестационарным (ОНВР), если ряд его k-ых разностей стационарен, k∈C. На значение ОНВР при прогнозировании обратили внимание Бокс и Дженкинс в [1]. В ней в частности они предложили метод АРПСС (ARIMA) для прогнозирования этих рядов.
Суть метода состоит в сведении исходного ряда к стационарному ряду разностей, оценивании параметров этого ряда по его единственной реализации (пользуясь его стационарностью), вычислению по этим параметрам параметров исходного (параметров модели исходного ряда) и определению на основе этой модели прогноза значения временного ряда в заданный момент времени. Несмотря на то, что общее описание метода выглядит простым, его реализация таковой не является. Наиболее сложной частью метода является оценивание параметров ряда разностей. Но и описание метода не является простым, особенно для не специалистов.
В данной работе приводится альтернативный метод прогнозирования ОНВР. Он значительно проще АРПСС, как с точки зрения оценки параметров ряда, так и описания метода.
Обозначим через x_i - значение исходного стохастического временного ряда в i - ый момент времени, через $\Delta^j x_i$ - значение ряда j - ых разностей (разностей порядка *j*) исходного ряда в i - ый момент времени. $M(\ldots)$ - оператор взятия математического ожидания от случайной величины указанной в скобках. Кроме этого, через - $\overline{x_\iota}$ обозначим оценку математического ожидания значения ряда в i - ый момент времени, вычисленное как среднее предшествующих значений реализации ряда, через $\overline{\Delta^J x_\iota}$ - обозначим оценку математического ожидания значения ряда j - ых разностей исходного ряда в i - ый момент времени, вычисленное как среднее имеющихся значений j - ых разностей. При этом будем нумеровать значения исходного ряда и ряда j - ых разностей с единицы. Исходя из смысла ряда разностей [1], если длинна исходного ряда n, то длинна ряда его j - ых разностей $n-j$.
На основе всего сказанного, с учетом смысла ряда разностей, можно записать:

$$\Delta^j x_i = \Delta^j x_{i-1} + \Delta^{j+1} x_i,\ j = 0,1,2,\ldots,n-1;\ i = 1,2,\ldots,n. \qquad (1)$$

Тогда, исходя из свойств математического ожидания:

$$M(\Delta^j x_i) = M(\Delta^j x_{i-1}) + M\left(\Delta^{j+1} x_i\right),\ j = 0,1,2,,\ldots,n-1;\ i = 1,2,\ldots,n. \qquad (2)$$

Это формула представляет собой рекуррентный алгоритм вычисления математических ожиданий ряда разностей любого порядка j, включая $j = 0$, т.е. исходного ряда. В этом случае выполняется:

$$M(\,x_i) = M(\,x_{i-1}) + M(\Delta\,x_i), i = 1,2,\ldots,n. \qquad (3)$$

Т.к. в соответствии с классической теорией прогнозирования математическое ожидание представляет собой оптимальный (с точки зрения минимизации суммы квадратов отклонений) прогноз значений стохастического ряда, то соотношения (2) и (3) дают метод вычисления прогноза значений временного ряда на основе математических ожиданий прошлых значений ряда и значений его рядов разностей.
Однако, на практике вычислить математические ожидания для значений ряда и его рядов разностей невозможно из-за отсутствия информации о совместном законе распределений значений ряда. Все что есть – единственная реализация ряда в прошлом. В этих условиях используются оценки математических ожиданий значений временного ряда и вместо соотношения (2) можно записать:

$$\overline{\Delta^J x_\iota} = \overline{\Delta^J x_{\iota-1}} + \overline{\Delta^{J+1} x_\iota}\ j = 0,1,2,,\ldots,k-1;\ i = 1,2,\ldots,n; k < n. \qquad (4)$$

При $j = 0$ оно даст оценку математического ожидания значений исходного временного ряда, которая и будет прогнозом его значений. Т.к. исходный ряд является однородно нестационарным, то ряд его k-ых разностей будет стационарным. Оценка математического ожидания этого ряда разностей может быть вычислена как среднее $\widehat{M}\left(\Delta^k x_i\right) = \overline{\Delta^k x_\iota}$. Эта оценка будет несмещенной и состоятельной [2]. При $i = 2$ $\overline{\Delta^J x_{\iota-1}}$=$\overline{\Delta^J x_1}$=$\Delta^j x_1$, поэтому $M\overline{(\Delta^J x_1)} = M\left(\Delta^j x_1\right)$, *0≤j≤k-1.* В результате $\overline{\Delta^J x_\iota}$ вычисленное по (4) будет несмещенной и состоятельной оценкой математического ожидания для всех *0≤j≤k-1.*
Т.е. (4) дает рекуррентное соотношение для вычисления точных (в смысле несмещенности и состоятельности оценок математических ожиданий) прогнозов значений ОНВР (при $j = 0$) на основе несмещенных и состоятельных оценок математических ожиданий стационарного ряда k-ых разностей.

Литература.
1. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. – М.: Мир, 1974.-Вып.1,2.
2. Прогнозирование в системе STATISTICA в среде Windows/ В.П. Боровиков В.П., Ивченко Г.И. М.: Финансы и статистика, 2000.