ФОРМУЛЫ /ТЕОРЕМЫ РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ ПО ЛАПЛАСУ

Репин А.М.

Анонс с предисловием.

▪ Кратко о возможных темах, своеобразном плане познания нового, о творении автор привёл в газете «Кадетское братство» № 2-2009. С общим редакторским названием «Закон девятки». В развитие материалов, опубликованных в предыдущих номерах 2006-2008 гг. И предназначенных юным. Школьникам. Кадетам. Студентам. Курсантам. Слушателям. Всем любознательным. Не исключая учителей, педагогов, преподавателей.

▪ В числе возможных тем, проблем, новшеств есть и тема, соответствующая указанному выше заголовку:

Преобразование Лапласа. Базовые и собазовые **формулы /теоремы** для $\Pi_i F_i(s)$.

Наряду с краткими пояснениями были заданы и предварительные вопросы. При этом отмечено:

▪ «Более просты **вопросики** (и ответы на них) по **формулам**/ теоремам для **произведения Лаплас**овых изображений. Адресованы **всем**. Кого в данный момент знакомят с **теорией преобразования Лапласа** /**Пьер**а **Симон**а, 23.3.1749 – 5.3.1827, Франция/. Кто уже знаком с нею. Тем более, преподаёт. Кто активно или эпизодически пользуется этим эффективным математическим аппаратом при решении важных конкретных задач. И многим другим.

Следует подчеркнуть: все вопросики – **не** с целью проверки знаний или **не**знаний. **Не** тест. **Не** экзамен. **Не** пресловутое ЕГЭ. **Цель** – **иная**. Привлечь внимание. Вовлечь в размышления. В думанье. В **творческий** процесс. Поэтому все ответы (с вопросами) полезно записывать в отдельную тетрадочку. И притом **сразу** по прочтении поступившей информации. С указанием даты и времени. Не обращаясь к “шпаргалкам”. Специальной литературе. Знаниям товарища. Коллеги. А на основе лишь **собственного** интеллектуального багажа. В **данный** момент. Как в КВН. Только тогда будет прок.

Итак, по **теоремам** в теории **преобразования П.С. Лапласа:**

С **XVIII** века **известна** (всем причастным к математике) формула и её **формулировка:**

Сумме ***оригиналов соответствует*** **сумма** ***изображений. И наоборот.***

С середины 60-х годов прошлого века некоторым известно:

Произведению ***любого числа изображений соответствует*** **сумма** ***оригиналов.***

Вопросик: верна ли эта формулировка? И корректно ли название «теорема»?

Контролёр при ответах – только собственная **совесть**. Да **Всевышний**».

▪ **Электронная версия** газетного варианта (при исправлении редакционных неточностей и ошибок), а также **авторского** исходного варианта (с названием «**Стремящимся к познанию. К знаниям/ *Aspiring to knowledge***») **опубликована в октябре 2010** г. // **НЭА. URL:** www.econf.rae.ru/article/5555». Как продолжение предшествующих статей (articles/5316; 5346; 5393). С общим названием направления «**Творчество. Творение. Космос. Обучение. Знания. Умение. Энергия. Вселенная. / *Creative work. Creation. Cosmos. Instruction. Knowledge. Skill. Energy. Universe***». Миниатюра или **Мин-7. Стр. 8-10.**

▪ **Ниже дана скан-копия статьи автора в журнале «*Известия АН СССР, Энергетика и транспорт*»** (ЭиТ. № **5-1973**. Стр.158-164). **Она основана на предшествующих его результатах. В т.ч. приведенных в кандидатской и докторской диссертациях 1971 и 1986 гг. В заключение выражена признательность соответствующим специалистам. А также приведены уникальные списки работ по операторному исчислению. С анонсами и частично кратким к работам комментарием.**

Дополнительно следует отметить, что приведенные в статье формулы можно по виду упростить. И автор предпринял попытку это сделать. Однако, в последние годы жёсткий диск в ПК автора дважды был уничтожен. Так называемыми хакерами. Проще, вредителями. Злобами. На одной из ксерокопий статьи есть авторские пометки по каждой формуле. Но сам автор физически уже не в состоянии выполнить эту, вроде бы, простенькую работу. А те, кто в состоянии, не могут набрать без участия автора. Парадокс. К тому же соответствующие материалы, в том числе рукописные, исчезли из личной квартиры. Особенно после того, как примерно неделю побывал в гостях (“погостевал”) один прохфессор из НскГТУ. И после чего (и опять совпадение) **появились публикации, содержащие сведения, по сути имевшиеся в виде и по содержанию только у автора.**

Такова ля ви. Что в переводе с зулусского означает: Такова жизнь. Такова чорная суть. Ныне. В России. Когда **усилиями антироссийских старателей и их,** как говорят, **приспешников, представителей она отброшена в эпоху** т.н. **“дикого капитализма”.** То бишь **на полтора века назад. Со свойственными принципами. Сутью.** А это **именно: тотальная (сверху донизу) безнравственность. Мошенничество. Обман. Жульничество. Грабёж. Воровство. Убийства. Предательство. В итоге и в масштабе шарика Земного, нашего беззащитного, домика хрупкого – само- и планетоуничтожение.**

Есть ли в России, в мире благоразумие, здравомыслие? Восторжествуют ли они? А с ними – человечество. Многое бесценное для него. В т.ч., будто бы, и малое. Например, теоремы в теории преобразования Лапласа.

Ваше мнение? Юные. А также **зрелые**. И даже **пере.** Но **умудренные.**

= =

▪ **Пьер-Симо́н Лапла́с** (фр. Pierre-Simon Laplace; 23 марта **1749** – 5 марта **1827**) – выдающийся французский математик, физик и астроном. Известен работами в области небесной механики, дифференциальных уравнений. Один из создателей теории вероятностей. //Википедия.

Пись № 3
Москва
8 дек. 1973 г.

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК СССР
ЭНЕРГЕТИКА И ТРАНСПОРТ

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

Обобщённые формулы (R-теоремы) разложения для произведения Лапласовых изображений

Частные теоремы:
- 1-я и 2-я Хевисайда;
- умножения или Бинс вещественной и комплексной сверток ("Бореля", "Дюамеля", "Гринберга" и пр.) в алгебраическом виде;
- формулы включения;
- другие.

Одномерные цепи.
Оператор $R' = \sum_k a_k S'[k]$.
Исходная переменная.
Риджитная переменная.
Приложения в анализе линейных систем (R1; R2; ..., Rx

5

МОСКВА · 1973

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
ЭНЕРГЕТИКА И ТРАНСПОРТ

№ 5, с.157-164 1973

УДК 621.3.011.1

ФОРМУЛА РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ В АНАЛИЗЕ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

А. М. РЕПИН

(*Москва*)

Рекомендовано академиком Л.Р. Нейманом

Рассматривается случай, когда изображение можно представить в форме произведения сомножителей, имеющих простые полюсы. Получена удобная для практического применения формула по вычислению оригиналов. Применительно к анализу переходных и установившихся непрерывных процессов в линейных системах результаты приведены к виду, пригодному для непосредственного использования в инженерной практике. Библ. 6. Стр. 158–165.

Важнейший момент при использовании преобразования Лапласа — определение оригинала функции $f(\vartheta)$ по ее изображению $F(s)$.

Встречающиеся на практике задачи часто связаны с определением оригинала от произведения изображений

$$F(s)=\prod_{i=1}^{i_x}F_i(s). \tag{1}$$

Ниже получена формула разложения, позволяющая находить оригинал непосредственно от произведения (1), не прибегая к представлению его в виде одной функции. На основе полученной формулы показано, что при определенных условиях некоторые выражения, известные в интегральной форме (например, теорема вещественной свертки или умножения изображений), могут быть представлены в алгебраическом виде, более удобном для решения инженерных задач. Попутно получен также ряд соотношений, полезных для практического использования.

Вывод формулы разложения. Если функция $F(s)$ задана в виде правильной дроби

$$F(s)=\text{Ч}(s)\,/\,\text{З}(s), \tag{2}$$

числитель $\text{Ч}(s)$ и знаменатель $\text{З}(s)$ которой не имеют общих корней, и если корни s_k уравнения $\text{З}(s_k)=0$ простые, то для нахождения оригинала изображения (2) используется формула разложения [1-6], которая может быть записана в виде

$$f(\vartheta)=\sum_{k=1}^{k_x}\frac{\text{Ч}(s_k)}{\text{З}'(s_k)}e^{s_k\vartheta}, \tag{3}$$

где штрих означает первую по s производную знаменателя.

В основу последующего вывода положим для простоты те же допущения, что и при выводе теоремы (3) — функции (1) имеют простые полюсы и представляют собой правильную дробь. При этом входящие в (1) сомножители $F_i(s)=\text{Ч}_i(s)\,/\,\text{З}_i(s)$ не обязательно должны быть все правильными дробями.

Представим (1) в виде

$$F(s)=\prod_{i=1}^{i_x}F_i(s)=\prod_{i=1}^{i_x}\text{Ч}_i(s)\Big/\prod_{i=1}^{i_x}\text{З}_i(s). \tag{4}$$

Пусть s_{ν_i} — полюсы функций $F_i(s)$, т. е. корни знаменателей

$$\text{З}_i(s_{\nu_i})=0, \tag{5}$$

где индексы полюсов и функций $\nu_i=1,2,\ldots,\nu_{ix}$; $i=1,2,\ldots,i_x$.

Общее число полюсов $\nu_x = \sum_{i=1} \nu_{ix}$. Тогда на основе теоремы о вычетах для оригинала функции (4) получаем

$$f(\vartheta) = \sum_{i=1}^{i_x} \sum_{\nu_i=1}^{\nu_{ix}} \frac{Ч(s_{\nu_i})}{[З(s)]'_{s=s_{\nu_i}}} e^{s_{\nu_i}\vartheta}. \tag{6}$$

Из сравнения выражений (4) и (6) видно, что произведению изображений $F_i(s)$ соответствует сумма оригиналов $f_i(\vartheta)$ вида

$$f_i(\vartheta) = \sum_{\nu_i=1}^{\nu_{ix}} \frac{Ч(s_{\nu_i})}{З'(s_{\nu_i})} e^{s_{\nu_i}\vartheta}, \tag{7}$$

и можно записать теорему

$$f(s) = \prod_{i=1}^{i_x} F_i(s) \sqsubset f(\vartheta) = \sum_{i=1}^{i_x} f_i(\vartheta). \tag{8}$$

Производная знаменателя $З'(s)$ имеет вид

$$З'(s) = \left[\prod_{i=1}^{i_x} З_i(s)\right]' = З_1'(s) \prod_{\substack{i=1\\ i\neq 1}}^{i_x} З_i(s) +$$

$$+ З_2'(s) \prod_{\substack{i=1\\ i\neq 2}}^{i_x} З_i(s) + \ldots + З_{i_x}'(s) \prod_{\substack{i=1\\ i\neq i_x}}^{i_x} З_i(s)$$

или

$$З'(s) = \left[\prod_{i=1}^{i_x} З_i(s)\right]' = \sum_{i=1}^{i_x} З_i'(s) \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{i_x} З_j(s). \tag{9}$$

Из общего числа i_x^2 слагаемых, подлежащих вычислению, после подстановки $s = s_{\nu_i}$ в сумму (9) остается i_x слагаемых, поскольку остальные $i_x(i_x - 1)$ слагаемые, согласно (5), обращаются в нуль. Поэтому

$$З'(s_{\nu_i}) = З_i'(s_{\nu_i}) \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{i_x} З_j(s_{\nu_i}). \tag{10}$$

Подставляя (10) в (7) и учитывая, что

$$Ч(s_{\nu_i}) = \prod_{i=1}^{i_x} Ч_i(s_{\nu_i}) = Ч_i(s_{\nu_i}) \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{i_x} Ч_j(s_{\nu_i}),$$

получим

$$f_i(\vartheta) = \sum_{\nu_i=1}^{\nu_{ix}} \frac{Ч_i(s_{\nu_i}) \prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{i_x} Ч_j(s_{\nu_i})}{З_i'(s_{\nu_i}) \prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{i_x} З_j(s_{\nu_i})} e^{s_{\nu_i}\vartheta} = \sum_{\nu_i=1}^{\nu_{ix}} \frac{Ч_i(s_{\nu_i})}{З_i'(s_{\nu_i})} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{i_x} F_j(s_{\nu_i}) e^{s_{\nu_i}\vartheta}. \tag{11}$$

Окончательно оригинал произведения изображений (4) с учетом (8) и (11) определяется следующим образом:

$$f(\vartheta)=\sum_{i=1}^{i_x}\sum_{\nu_i=1}^{\nu_{ix}}\frac{Ч_i(s_{\nu_i})}{З_i'(s_{\nu_i})}\left[\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{i_x}F_j(s_{\nu_i})\right]e^{s_{\nu_i}\vartheta}. \tag{12}$$

Полученное разложение можно в определенном смысле рассматривать как обобщение формулы (3) на случай нахождения оригинала от произведения любого числа изображений. Как и формула (3), обобщенная формула (12) получена в явном замкнутом виде, в форме конечного числа алгебраических членов, что для практического применения удобнее интегральной формы известных соотношений и является достоинством формул разложения.

Помимо простоты использования полученный результат непосредственно дает решение, в котором легко могут быть выделены его *установившаяся* (принужденная) и *переходная* (свободная) части.

Кроме того, вкладывая в F_i определенный физический смысл, например, трактуя их как некоторые *структурные коэффициенты* системы (в зависимости от конкретно решаемой задачи это могут оказаться, скажем, собственная, взаимная проводимости или сопротивления электрической цепи либо передаточные функции отдельных звеньев или структур системы автоматического регулирования), приходим к выводу, что состояние системы (объекта, явления и пр.) может быть во временно́й области описано в виде простой суммы экспонент. При этом слагаемые ее содержат сомножитель из «сквозного» произведения структурных коэффициентов.

Некоторые применения разложения (12) в анализе линейных систем. Рассмотрим в общем виде ряд типичных случаев, встречающихся в практике анализа линейных систем.

А. Определение реакции сложной системы на одно воздействие. Пусть реакция $R(\vartheta)$ линейной системы или электрической цепи на воздействие $E(\vartheta)$ представима в операторном виде $R(s)=E(s)\prod\limits_{\mu=1}^{\mu_x}W_\mu(s)$, где $E(s)$ — изображение воздействия $E(\vartheta)$ с индексами полюсов $\nu=1,2,\ldots,\nu_x$; $W_\mu(s)$ — структурные коэффициенты системы с индексами полюсов $\xi_\mu=1,2,\ldots,\xi_{\mu x}$.

Тогда, положив в (12) $i_x=\mu_x+1$, после выделения одной суммы получим

$$R(\vartheta)=R_у(\vartheta)+R_п(\vartheta)=\sum_{\nu=1}^{\nu_x}A_\nu e^{s_\nu\vartheta}+\sum_{\mu=1}^{\mu_x}\sum_{\xi_\mu=1}^{\xi_{\mu x}}A_{\mu\xi_\mu}e^{s_{\xi_\mu}\vartheta}, \tag{13}$$

где

$$A_\nu=\frac{Ч_E(s_\nu)}{З_E'(s_\nu)}\left[\prod_{\mu=1}^{\mu_x}W_\mu(s_\nu)\right],$$

$$A_{\mu\xi_\mu}=E(s_{\xi_\mu})\left[\prod_{\substack{\varkappa=1\\ \varkappa\neq\mu}}^{\mu_x}W_\varkappa(s_{\xi_\mu})\right]\frac{Ч_{W_\mu}(s_{\xi_\mu})}{З_{W_\mu}'(s_{\xi_\mu})}. \tag{14}$$

Составляющая $R_у(\vartheta)$ определяется суммой вычетов только в полюсах $E(s)$ и поэтому представляет собой установившуюся часть реакции. Составляющая $R_п(\vartheta)$, напротив, не зависит от корней воздействия, и следовательно, отражает переходную часть реакции.

В связи с независимостью этих составляющих переходные и установившиеся режимы могут быть исследованы самостоятельно. Для реальных цепей, когда $\mathrm{Re}\{s_{\xi_\mu}\}<0$, переходная составляющая $R_п(\vartheta)$ при $\vartheta\to\infty$ равна нулю, и тем самым установившийся режим можно исследовать непосредственно через коэффициенты A_ν.

Б. Случай общих корней. Встречаются задачи, когда хотя бы один из числителей $Ч_{W_\mu}(s)$ имеет общий корень с $З_E(s)$. В этих случаях ν-я компонента установившейся части будет равна нулю в силу обращения в нуль сомножителя $\left[\prod\limits_{\mu=1}^{\mu_x}W_\mu(s_\nu)\right]$ в коэффициенте A_ν. То же относится к переходной части. Математически это с очевидностью вытекает из того, что в дроби (4) общие корни функций $Ч_j(s)$ и $З_k(s)$ сокращаются. Но для физических задач здесь можно усмотреть полезность в том, что уже по внешнему виду структурных коэффициентов и воздействий, представленных в операторной форме, можно, не выполняя вычислений, сказать, какие компоненты будут отсутствовать в общей реакции цепи.

Это можно заметить уже в таком простом случае, как определение реакции последовательного RLC-контура (его проводимость $W(s) \equiv s / (s^2 + a_1 s + a_0)$) на постоянную э.д.с. ($E(s) = 1/s$ и $s_1 = 0$), если под реакцией понимается ток. Установившаяся составляющая тока, согласно (13) и (14), $i_у(\vartheta) \equiv \dfrac{1}{s'} \dfrac{s e^{s\vartheta}}{s^2 + a_1 s + a_0}\Big|_{s=s_1} =$

$= \dfrac{0 \cdot 1}{a_0} = 0,$ что можно было бы и не вычислять.

В. Реакция сложной системы на множество воздействий. Полагая воздействия независимыми, результат (13) может быть легко распространен (на основе принципа суперпозиции) и на общий случай числа i_x воздействий $E_i(\vartheta)$ с индексами полюсов $\nu_i = 1, 2, \ldots, \nu_{ix}$, что очевидным образом дает

$$R(\vartheta) \doteq \sum_{i=1}^{i_x} E_i(s) \prod_{\mu=1}^{\mu_x} W_{i\mu}(s) \doteq R_у(\vartheta) + R_п(\vartheta). \tag{15}$$

Здесь

$$R_у(\vartheta) = \sum_{i=1}^{i_x} \sum_{\nu_i=1}^{\nu_{ix}} A_{i\nu_i} e^{s_{\nu_i}\vartheta}, \tag{16}$$

$$R_п(\vartheta) = \sum_{i=1}^{i_x} \sum_{\mu=1}^{\mu_x} \sum_{\xi_\mu=1}^{\xi_{\mu x}} A_{i\mu\xi_\mu} e^{s_{\xi_\mu}\vartheta}, \tag{17}$$

как и ранее, установившаяся и переходная составляющие реакции линейной системы или цепи общего порядка на общее число воздействий. Входящие в них коэффициенты

$$A_{i\nu_i} = \frac{Ч_{E_i}(s_{\nu_i})}{З_{E_i}'(s_{\nu_i})} \left[\prod_{\mu=1}^{\mu_x} W_{i\mu}(s_{\nu_i}) \right] = f(s_{\nu_i}), \tag{18}$$

$$A_{i\mu\xi_\mu} = E_i(s_{\xi_\mu}) \frac{Ч_{W_{i\mu}}(s_{\xi_\mu})}{З'_{W_{i\mu}}(s_{\xi_\mu})} \left[\prod_{\substack{\varkappa=1 \\ \varkappa\neq\mu}}^{\mu_x} W_{i\varkappa}(s_{\xi_\mu}) \right] = f(i, s_{\xi_\mu}). \tag{19}$$

Г. Реакция на начальный запас энергии. Для определения реакции электрической цепи, обусловленной ненулевыми (ниже отмечается индексом $_=$) начальными условиями (начальным запасом энергий в реактивностях), достаточно в формуле (15) из реакций на i_x воздействий выделить реакции на $p_x = k_x + l_x$ пассивных воздействий U_k и U_l, отражающих заряды на $k = 1, 2, \ldots, k_x$ конденсаторах и магнитную энергию в $l = 1, 2, \ldots, l_x$ индуктивностях. Допуская для упрощения записи $\mu_x = 1$, числители $Ч_{W_k}$ сокращающимися на s (т. е. обозначая $Ч_{1W_k} = Ч_{W_k}/s$)

и полагая, что знаменатели коэффициентов передачи одинаковы для всех воздействий, находим

$$R(\vartheta)_= = R_п(\vartheta)_= = \sum_{\xi=1}^{\xi_x} A_{kl} e^{s_\xi \vartheta}, \tag{20}$$

где

$$A_{kl} = \left[\sum_{k=1}^{k_x} U_k Ч_{1W_k}(s_\xi) + \sum_{l=1}^{l_x} U_l Ч_{W_l}(s_\xi) \right] \Big/ З_W'(s_\xi). \tag{21}$$

Составляющие (20) определяются суммой вычетов только в полюсах $W(s)$, и поэтому реакция на начальный запас энергии содержит только переходную часть.

Д. Реакция на последовательность воздействий. Для часто встречающегося на практике случая, когда по отношению ко всем воздействиям цепь описывается одним структурным коэффициентом, из (15) при $\mu_x = 1$ находим

$$R(\vartheta) = W(s) \sum_{\iota=1}^{\iota x} E_\iota(s) = R_{у}(\vartheta) + R_{п}(\vartheta) = \sum_{\iota=1}^{\iota x} [R_{\iota у}(\vartheta) + R_{п\iota}(\vartheta)], \tag{22}$$

где

$$R_{у\iota}(\vartheta) = \sum_{\nu_\iota=1}^{\vartheta_{\iota x}} A_{\iota\nu_\iota} e^{s_{\nu_\iota}\vartheta}, \quad R_{п\iota}(\vartheta) = \sum_{\xi=1}^{\xi_x} A_{\iota\xi} e^{s_\xi \vartheta}, \tag{23}$$

$$A_{\iota\nu_\iota} = W(s_{\nu_\iota}) \frac{Ч_{E_\iota}(s_{\nu_\iota})}{З_{E_\iota}'(s_{\nu_\iota})}, \qquad A_{\iota\xi} = E_\iota(\vartheta) \frac{Ч_W(s_\xi)}{З_W'(s_\xi)}. \tag{24}$$

Формулой (22) можно воспользоваться, в частности, при воздействиях, приложенных последовательно, либо если воздействие на отдельных интервалах описывается разными функциями или к цепи приложена последовательность различных импульсов.

Для широко распространенного случая, когда к цепи, описываемой одним структурным коэффициентом, приложено одно воздействие, т. е. когда

$$R(s) = E(s) W(s), \tag{25}$$

из (13) при $\mu_x = 1$ или из (22) при $i_x = 1$ получаем

$$R(\vartheta) = R_у(\vartheta) + R_п(\vartheta) = \sum_{\nu=1}^{\nu_x} A_\nu e^{s_\nu \vartheta} + \sum_{\xi=1}^{\xi_x} A_\xi e^{s_\xi \vartheta}, \tag{26}$$

где

$$A_\nu = \frac{Ч_E(s_\nu)}{З_E'(s_\nu)} W(s_\nu), \qquad A_\xi = E(s_\xi) \frac{Ч_W(s_\xi)}{З_W'(s_\xi)}. \tag{27}$$

Формула (26) в алгебраической форме соответствует известной в интегральной форме теореме умножения изображений.

Е. К анализу одномерных цепей. Цепь называют одномерной, если ее состояние удается описать посредством некоторой переменной, через которую остальные переменные находятся без операции интегрирования. Такую переменную будем называть *исходной* (*И*), а остальные определять в виде

$$R_\iota(\vartheta) = \sum_{k=0}^{k_x} a_k s^k [И], \tag{28}$$

где $s = d/d\vartheta$ — оператор дифференцирования, a_k — постоянные, определяемые структурой цепи, которая, как и порядок оператора k_x, зависит от того, насколько удалена от исходной ветвь с искомой i-й переменной ($i = 1, 2, \ldots, i_x$). В качестве исходной целесообразно выбирать *риджитную* переменную, т. е. не изменяющуюся скачком при любом виде воздействия, например ток индуктивности или напряжение на емкости.

Определив исходную в одном из приведенных выше виде, например в виде (26), операторный сомножитель k-й составляющей в (28) находится просто

$$s^k[И] = R_у^k(\vartheta) + R_п^k(\vartheta) = \sum_{\nu=1}^{\nu_x} s_\nu^k A_\nu e^{s_\nu \vartheta} + \sum_{\xi=1}^{\xi_x} s_\xi^k A_\xi e^{s_\xi \vartheta}. \tag{29}$$

Значение k_x в общем случае не превышает ξ_x, и, таким образом, решение линейной электрической цепи сведено по существу лишь к определению корней s_ν и s_ξ, а при типовых воздействиях, когда s_ν известны,— к определению только s_ξ. Тем самым число неизвестных определяется в данном случае порядком цепи ξ_x в отличие от произведения $\xi_x i_x$ при известной методике.

Ж. Модификация теоремы Хевисайда. Для случая, когда $\iota(s) = \frac{1}{s} U(s) \frac{1}{Z(s)}$, в теории цепей известно соотношение, которое носит название второй теоремы Хевисайда [6]:

$$i(\vartheta) = \frac{U(0)}{Z(0)} + \sum_{k=1}^{k_x} \frac{U(s_k)}{s_k Z(s_k)} e^{s_k \vartheta}. \tag{30}$$

Положив в (12) $i_x = 3$, теорему (30) можно привести к виду, более удобному для практического использования:

$$i(\vartheta) = \frac{U(s)}{Z(s)\,|_{s=0}} + \sum_{\nu=1}^{\nu_x} \frac{Ч_U(s_\nu)}{З_U'(s_\nu)\,s_\nu Z(s_\nu)} e^{s_\nu \vartheta} + \sum_{\xi=1}^{\xi_x} \frac{З_Z(s_\xi)\,U(s_\xi)}{Ч_Z'(s_\xi)\,s_\xi} e^{s_\xi \vartheta}, \tag{31}$$

где ν, ξ — индексы полюсов $U(s)$, $1\,/\,Z(s)$.

Соотношение (31) является решением интегрального уравнения Лапласа $\int\limits_0^\infty i(\vartheta)\,e^{-s\vartheta} d\vartheta = i(s)$, если $i(s) = U(s)\,/\,sZ(s)$, что относится и к соотношению (12), если $i(s)$ суть (4).

3. Типовые воздействия. 1. *Экспоненциальное.* Если к цепи со структурным коэффициентом $W(s)$ приложено воздействие с показательным законом изменения $E(\vartheta) = e^{\alpha\vartheta}$ [2], то имеем $E(s) = 1\,/\,(s - \alpha)$, $s_\nu = \alpha$, и по формуле (26) *непосредственно* получаем

$$R(\vartheta) = W(\alpha)\,e^{\alpha\vartheta} + \sum_{\xi=1}^{\xi_x} \frac{Ч_W(s_\xi)\,e^{s_\xi\vartheta}}{(s_\xi - \alpha)\,З_W'(s_\xi)}. \tag{32}$$

2. *Постоянное.* В случае постоянного, в частности единичного воздействия $E(\vartheta) = 1 = \mathrm{const}$ (т. е. $E(s) = 1\,/\,s$, что соответствует нулевому полюсу), из (32) при $\alpha = 0$ находим

$$R(\vartheta) = W(0) + \sum_{\xi=1}^{\xi_x} \frac{Ч_W(s_\xi)}{s_\xi З_W'(s_\xi)} e^{s_\xi\vartheta}. \tag{33}$$

3. *Синусоидальное.* При воздействии синусоидальной формы $E(\vartheta) = S = \sin(\vartheta + \psi)$, т. е. $S_\psi(s) = Ч_s(s)\,/\,З_s(s) = (s \sin\psi + \cos\psi)\,/\,(s^2 + 1)$, что дает два комплексно-сопряженных полюса, получаем из (26)

$$R(\vartheta) = R_у(\vartheta) + R_п(\vartheta) = \mathrm{Im}\{W(j)\,e^{j(\vartheta+\psi)}\} + \sum_{\xi=1}^{\xi_x} \mathrm{S}(s_\xi)\,\frac{Ч_W(s_\xi)}{З_W'(s_\xi)} e^{s_\xi\vartheta}, \tag{34}$$

где $j = \sqrt{-1}$ — мнимая единица, оператор Im означает, что от выражения в фигурных скобках следует взять лишь мнимую часть. В силу независимости входящих в (34) составляющих установившийся режим можно исследовать самостоятельно, не будучи ограниченным условиями предшествующих состояний цепи:

$$R_у(\vartheta) = \mathrm{Im}\{|W(j)|\,e^{j(\vartheta+\psi+\varphi)}\} = |W(j)|\sin(\vartheta + \psi + \varphi) = \frac{\mathrm{Re}\{W(j)\}}{\cos\varphi}\sin(\vartheta + \psi + \varphi), \tag{35}$$

где прямые скобки означают модуль $|W(j)| = \mathrm{mod}\,W(j) = \mathrm{Re}\,\{W(j)\}\,\mathrm{sc}\,\varphi$, а угол $\varphi = \arg W(j) = \mathrm{arc\,tg}\,\dfrac{\mathrm{Im}\{W(j)\}}{\mathrm{Re}\{W(j)\}}$ — аргумент структурного коэффициента.

Если в формулах (32)—(34) под воздействием понимать приложенную э.д.с., под реакцией – ток, под структурным коэффициентом – проводимость $1\,/\,Z(s)$, где $Z(s)$ – операторное сопротивление цепи, то соотношения (32)—(34) дают так называемые формулы включения [2].

II. Случай сопряженных полюсов. Если в произведении $F(s) = P(s) \cdot Q(s)$ один из сомножителей, например $P(s) = Ч_P(s)\,/\,З_P(s)$, содержит, в отличие от предыдущего случая, пару комплексно-сопряженных полюсов вида $s_{1,2} = -a_P \pm \pm j\omega_P$ с вещественной частью, не равной нулю, и с комплексной частью, не равной единице, то составляющая $R_P(\vartheta)$, обусловленная в общей реакции $R(\vartheta)$ данной функцией $P(s)$, может быть представлена в виде

$$R_P(\vartheta) = \omega_P^{-1}\,\mathrm{Im}\{Ч_P(s_1)\,Q(s_1)\,e^{s_1\vartheta}\} = \frac{\mathrm{Re}\{Ч_P(s_1)\}\,\mathrm{Re}\{Q(s_1)\}}{\omega_P \cos\varphi_P \cos\varphi_Q} \sin(\omega_P\vartheta + \varphi_\Sigma)\,e^{-a_P\vartheta}, \tag{36}$$

где $s_1 = -a_P + j\omega_P$, $-a_P = \mathrm{Re}\{s_1\}$, $\omega_P = \mathrm{Im}\{s_1\}$, $\varphi_\Sigma = \varphi_P + \varphi_Q$,

$$\varphi_P = \arg Ч_P(s_1) = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{\mathrm{Im}\{Ч_P(s_1)\}}{\mathrm{Re}\{Ч_P(s_1)\}}, \qquad \varphi_Q = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{\mathrm{Im}\{Q(s_1)\}}{\mathrm{Re}\{Q(s_1)\}}.$$

При $Q(s) = W(s)$, $P(s) = S(s)$, когда $\varphi_Q = \varphi$, $Ч_S(s) = s \sin\psi + \cos\psi$, $З_S(s) = s^2 + 1$, т. е. когда $a_P = 0$, $\omega_P = 1$, $\mathrm{Im}\{Ч_P(s_1)\} = \sin\psi$, $\mathrm{Re}\{Ч_p(s_1)\} = \cos\psi$, $\cos\varphi_P = \cos\psi$, из (36) непосредственно получаем (35).

Если корни $Q(s)$ действительные, с базисом $\mathrm{Ba}\{s\} = -a$ и дополнением $\mathrm{Su}(s) = \pm b$, т. е. $s_{1,2} = -a \pm b$, то по аналогии с предыдущим можно записать

$$R_Q(\vartheta) = \frac{\mathrm{Ba}\{A\}}{b\,\mathrm{ch}\,\beta}\,\mathrm{sh}(b\vartheta + \beta)\,e^{-a\vartheta}, \tag{37}$$

где $A = P(s_1)Ч_Q(s_1)$, $\beta = \mathrm{arth}(\mathrm{Su}\{A\} / \mathrm{Ba}\{A\})$.

Таким образом, сопряженные комплексные или действительные корни дают в общей реакции синусоидальные составляющие (затухающие или незатухающие, тригонометрические или гиперболические), находить которые при выполнении расчетных операций достаточно лишь для первого корня (с положительным дополнением или комплексной частью). Тем самым при наличии сопряженных полюсов определению подлежит в 2 раза меньшее число составляющих, и трудоемкость вычислений снижается.

К. Случай однополюсных функций. Для нередко встречающихся на практике однополюсных функций, когда $З_i(s) = s + \alpha_i$, согласно теореме (12) при $\nu_{ix} = 1$, $s_i = -\alpha_i$ получаем $f(\vartheta) = \prod_{i=1}^{i_x} F_i(s) = \prod_{i=1}^{i_x} Ч_i(s) \Big/ \prod_{i=1}^{i_x}(s + \alpha_i) \doteq \sum_{i=1}^{i_x} A_i e^{-\alpha_i\vartheta}$,

где $A_i = Ч_i(-\alpha_i) \Big/ \prod_{j\neq i}^{i_x} З_j(-\alpha_i)$. Если числители всех функций отнесены к числителю одной какой-либо функции (т. е. $\prod_{i=1}^{i_x} Ч_i(s) = Ч(s)$) и тем самым числители остальных функций равны каждый единице (единичные числители), коэффициент A_i преобразуется к виду $A_i = Ч(-\alpha_i) \Big/ \prod_{j\neq i} З_j(-\alpha_i)$.

В последних трех соотношениях для каждого фиксированного значения индекса i числителей $Ч_i$ и корней α_i текущий индекс j в произведении функций F_j и знаменателей $З_j$ пробегает все значения, кроме фиксированного. Раскрывая знаменатель $З_j(-\alpha_i)$, формулу разложения для однополюсных функций можно представить в виде

$$f(\vartheta) \doteq Ч(s) \Big/ \prod_{i=1}^{i_x}(s + \alpha_i) \doteq \sum_{i=1}^{i_x} Ч(-\alpha_i)\,e^{-\alpha_i\vartheta} \Big/ \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{i_x}(\alpha_j - \alpha_i). \tag{38}$$

Нетрудно видеть, что это иная форма записи теоремы (3), и ее можно получить и непосредственно из (3), если положить $[З(s)]'_{s=s_k} = (s_k - s_1)(s_k - s_2)\ldots(s_k - s_{k-1})(s_k - s_{k+1})\ldots(s_k - s_{kx}) = \prod_{\substack{q=1\\ q\neq i}}^{kx}(s_k - s_q)$ и заменить s_q на $-\alpha_j$, s_k на $-\alpha_i$.

Поскольку полином любого знаменателя в (12) $З(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0$ степени n может быть единственным образом разложен на произведение n линейных сомножителей $З(s) = \prod_{k=1}^{n}(s - s_k)$, то, очевидно, аналогичные преобразования можно выполнить и в формуле (12) и ее частных соотношениях.

Так как, кроме того, при вещественных коэффициентах указанного полинома его комплексные нули, т. е. комплексные полюсы функций $F_i(s)$, могут встречаться лишь сопряженными парами, то число слагаемых с комплексными корнями в соотношении (12) и других может быть уменьшено вдвое, а сами слагаемые могут определяться аналогично тому, как это выполнено, например, в выражении (36).

В заключение отметим, что разложение (12) без принципиальных трудностей распространяется на случай кратных корней, а также мероморфных функций, как это сделано, например, в [3, 6] по отношению к теореме (3).

Выводы. 1. Теорему разложения, выведенную для случая, когда изображение представимо произведением нескольких функций, имеющих простые полюсы, можно в определенном смысле рассматривать как обобщение теоремы, известной для однофункционального изображения. При получении функций вещественного аргумента от произведения изображений указанная формула позволяет непосредственно находить оригинал и тем самым не выполнять ряд промежуточных выкладок.

2. Соотношения, полученные на основе формулы разложения для ряда встречающихся на практике случаев, благодаря представлению результатов в замкнутом явном виде создают удобства в инженерной практике в случаях, когда при решении технических задач преобразование Лапласа является наиболее эффективным математическим аппаратом.

Эти соотношения могут быть рекомендованы для решения линейных или к ним сводящихся задач с нулевыми или ненулевыми начальными условиями. Их целесообразно использовать, например, для анализа линейных электрических цепей, эквивалентно представляющих различные электро- и радиотехнические системы и устройства, а также при исследованиях процессов, которые могут быть отображены (смоделированы) в виде линейных структур.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Анго.* Математика для электро- и радиоинженеров. «Наука», 1967.
2. *Г. И. Атабеков.* Теоретические основы электротехники, ч. I. «Энергия», 1970.
3. *М. Ф. Гарднер, Дж. Бэрнс.* Переходные процессы в линейных системах, Физматгиз, 1961.
4. *С. Г. Гинзбург.* Методы решения задач по переходным процессам в электрических цепях, «Высшая школа», 1967.
5. *Д. Р. Карсон.* Электрические нестационарные явления и операционное исчисление, НТИ Украины, НКТП, пер. с нем., 1934.
6. *М. И. Конторович.* Операционное исчисление и процессы в электрических цепях. «Наука», 1964.

Поступило
9 X 1972

Краткие сообщения

А. М. Репин (Москва). Формула разложения для произведения изображений и ее применение в анализе линейных систем 157

П. Г. Али-заде, Р. К. Кулизаде, Э. К. Каргиев (Баку). Воспроизведение пульсации напряжения питающей сети в электродинамических моделях электроприводов 165

Адрес редакции:
Москва Ж-127, ул. Осипенко, 52. Тел. 231-01-88

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

ЭНЕРГЕТИКА И ТРАНСПОРТ

5

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

МОСКВА · 1973

Продолжение следует