Абсолютный прогноз случайной величины.

Амирханов Ш.Д.
КНИТУ-КАИ, г. Казань, Россия.

Современная теория стохастического прогнозирования строится на выборе оптимального прогноза случайной величины. Такой прогноз представляет собой число $ft \in R$, описывающее наилучшим (оптимальным) образом прогнозируемую случайную величину. Случайная величина в свою очередь описывается в общем случае функцией распределения вероятностей $F(x)$, которая для дискретных случайных величин может быть заменена законом распределения, а для непрерывных случайных величин со всюду дифференцируемой функцией распределения плотностью распределения вероятностей.

Ключевым является выбор критерия оптимальности, который и определяет, какое число будет оптимальным прогнозом для прогнозируемой случайной величины. Наиболее распространенный и часто употребляемый критерий в настоящее время - минимизация математического ожидания квадрата отклонения случайной величины от прогноза, так называемой среднеквадратической ошибки прогноза.

$$M(X-ft)^2 \to min.$$

Эта популярность вызвана тем, что для этого критерия процедура нахождения оптимального прогноза, которым будет математическое ожидание прогнозируемой величины $ft = M(X)$, и его оценки относительно проста.

Однако, такой критерий не является единственным. Можно предложить следующие альтернативы. Минимум математического ожидания модуля отклонения случайной величины от прогноза

$$M(|X-ft|) \to min.$$

Минимум математического ожидания любой четной степени отклонения случайной величины от прогноза

$$M(X-ft)^n \to min, \;\; n/2 \in C, \qquad n > 0.$$

Уже число этих альтернатив бесконечно, а это далеко неполный список.

Возникает естественный вопрос о выборе между всеми возможными критериями не с точки зрения простоты вычислений прогноза, а с точки зрения его точности. Другими словами необходимо ответить на следующие вопросы.

1) Существует ли какой-то «абсолютный» критерий оптимальности прогноза, который дает более точный прогноз, чем любой другой критерий?

2) Если да, что это за критерий?

3) Если «абсолютный» критерий существует то, какое число будет прогнозом случайной величины по этому критерию?

Ответы дает следующие определение и теорема.

Определение. *Абсолютным прогнозом случайной величины X назовем такое число $aft \in R$, которое удовлетворяет соотношению:*

$$P(|X-aft| \le |X-b|) \ge P(|X-aft| > |X-b|), \forall\, b \in R,$$

где $P(\dots)$ - вероятность события указанного в скобках.

Теорема. *Для любой случайной величины X абсолютный прогноз существует и удовлетворяет следующим соотношениям:*

$$F(aft) \le 0.5\,,$$
$$F^+(aft) \ge 0.5\,.$$

Здесь $F(x) = P(X < x)$, $F^+(x) = P(X \le x)$, $x \in R$.

В соответствии с данным определением функция распределения модулей отклонений значений случайной величины от абсолютного прогноза будет «наилучшей» по сравнению с функцией распределения модулей отклонений значений этой же случайной величины относительно любого другого вещественного числа.