

## О МЕТОДАХ РАСЧЕТА ВИБРОУДАРНЫХ СИСТЕМ С БОЛЬШИМ ЧИСЛОМ УДАРНЫХ ПАР

© **Виталий Львович Крупенин**

*Учреждение Российской академии наук институт машиноведения РАН*

*им. А.А. Благодрава*

**Аннотация.** Дается представление периодических виброударных процессов в системах с произвольным конечным числом сосредоточенных ударных пар. Это представление, названное  $2n$ -параметрическим, используется для расчета виброударного режима движения балки, колеблющейся вблизи двустороннего решетчатого ограничителя хода. Исследованы некоторые динамические эффекты, свойственные изучаемым системам. Проведен расчет реальной конструкции.

**$2n$ -параметрическое представление.** Представим периодический виброударный процесс в склерономной стационарной механической системе общего вида, содержащей  $n$  сосредоточенных ударных пар. При построении в несколько модифицированном виде используем методы частотно-временного анализа виброударных процессов [1–3], основанные на записи искомым законов движения через периодические функции Грина взаимодействующих линейных механических подсистем.

Рассмотрим линейную склерономную стационарную механическую систему с произвольным числом степеней свободы (рис.1,а). Ограничимся для простоты, вообще говоря, несущественным предположением, что каждая точка указанной системы совершает одномерное движение вдоль некоторой оси. Предположим, что известно семейство операторов динамической податливости данной системы  $\{L(u, y; p)\}$ , где  $u$  и  $y$  — ее произвольные точки. Каждый такой оператор ставит в соответствие силе, приложенной в точке  $u$ , перемещение точки  $y$ ;  $p \equiv d/dt$ .

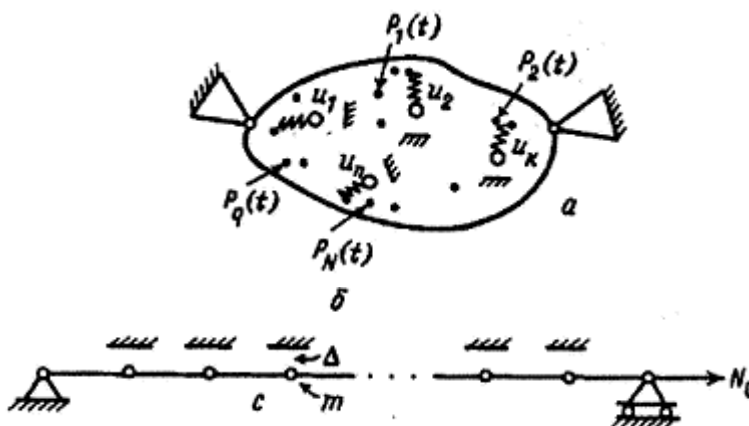


Рис. 1

Пусть в  $n$  точках  $\{u_k\}$   $L(u_k, u_k; p) = O(p^{-2})$  ( $p \rightarrow \infty$ ). Это предположение означает, в частности, что в точках  $\{u_k\}$  сосредоточены некоторые тела с массами  $m_k$ . Пусть далее в каждой такой точке помещена ударная пара, предполагаемая для определенности несимметричной и односторонней, т. е. имеется упорядоченный набор чисел  $\{\Delta_k\}$ , таких, что  $u_k \leq \Delta_k$  и при  $u_k = \Delta_k$  происходит ньютоновский прямой и центральный удар:  $\dot{u}_k(t_{\alpha k} + 0) = -R_k \dot{u}_k(t_{\alpha k} - 0)$ , где  $t_{\alpha k}$  — некоторый  $\alpha$ -ый момент удара в  $k$ -й ударной паре,  $R_k \in ]0, 1]$  — соответствующий коэффициент восстановления. Предположив, наконец, что в данных  $N$  точках  $\{u_q\}$  приложены возбуждающие периодические (с периодом  $T$ ) внешние силы  $P_q(t)$  (рис.1), можно записать для точек  $u_k$

$$u_k(t) = \sum_{q=1}^N L(u_q, u_k; p) P_q(t) - \sum_{j=1}^n L(u_j, u_k; p) \Phi_j(u_j, \dot{u}_j), \quad (1)$$

где  $\Phi_j(u_j, \dot{u}_j)$  — символическая запись силы удара в  $j$ -й ударной паре. Для нахождения перемещения любой произвольной точки  $u$  выписывается соотношение, вполне аналогичное (1).

Отметим также, что совершенно аналогично может рассматриваться случай, когда принадлежащие изучаемой системе сосредоточенные тела соударяются между собой. В этом случае соотношение типа (1) записывается для относительных координат  $u_j^* = u_j^{(1)} - u_j^{(2)}$ , где  $u_j^{(1,2)}$  — абсолютные координаты контактирующих тел. Соответственно видоизменяются и условия удара [1—3].

Вид представления для функций  $\Phi_j$  может, вообще говоря, зависеть от предполагаемого характера анализируемого виброударного процесса. В работе ограничиваемся наиболее интересными для приложений основными периодическими режимами того же периода, что и силы возбуждения. Предположим, что за каждый период движения в каждой ударной паре происходит единственное соударение. Тогда можно записать

$$\Phi_j = J_j \delta^T(t - \varphi_j) \quad (2)$$

( $J_j, \varphi_j$  — неизвестные импульс и фаза удара в  $j$ -й ударной паре, ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) и периодическую обобщенную функцию

$$\delta^T(t) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \delta(t - qT) = T^{-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(ik\omega t) \quad (3)$$

где  $\delta(t) - \delta$  - функция Дирака, которую иногда называют «последовательность  $\delta$  - функций»;  $\omega = 2\pi T^{-1}$ .

Известно [2], что в условиях периодичности соотношения (1) оказываются эквивалентны интегральным представлениям

$$u_k(t) = \sum_{q=1}^N \int_0^T \chi_{qk}(t-s) P_k(s) ds - \sum_{j=1}^n \int_0^T \chi_{jk}(t-s) \Phi_j[u_j(s), \dot{u}_j(s)] ds, \quad (4)$$

где

$$\chi_{qk}(t) = T^{-1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} L(u_q, u_k; ij\omega) \exp(ij\omega t) \quad (5)$$

—  $T$ -периодическая несимметричная функция Грина, отвечающая оператору  $L(u_q, u_k; p)$  [2].

С учетом (2) и (3) получаем

$$u_k(t) = u_k^0(t) - \sum_{j=1}^n J_j \chi_{jk}(t - \varphi_j), \quad (6)$$

где  $u_k^0(t)$  — движение в отсутствие ударов (установившееся решение линейной задачи).

Данное представление содержит  $2n$  неизвестных параметров движения и называется  $2n$ -параметрическим представлением периодического виброударного процесса. Для нахождения неизвестных параметров имеется  $2n$  соотношений совместности, следующих из условий удара

$$u_k(\varphi_k) = \Delta_k, \quad J_k = (1 + R_k) m_k \dot{u}_k(\varphi_k - 0), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (7)$$

При этом необходимо  $u_k(t) \leq \Delta_k$  для всех  $t$  и  $J_k \geq 0$  для всех  $k$ . Систему (7) можно расписать подробнее:

$$\Delta_k = u_k^0(\varphi_k) - \sum_{j=1}^n J_j \chi_{jk}(\varphi_k - \varphi_j), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (8)$$

Первая группа уравнений — это система  $n$  линейных алгебраических уравнений относительно импульсов ударов в каждой из ударных пар. Вторую группу получим из второго соотношения (7). Для  $k = 1, 2, \dots, n$  имеем

$$\begin{aligned}
& J_k [1 + m_k (1 + R_k) \dot{\chi}_{kk}(-0)] + m_k (1 + R_k) \sum_{j \neq k} J_j \dot{\chi}_{jk}(\varphi_k - 0 - \varphi_j) = \\
& = m_k (1 + R_k) \dot{x}_k^0(\varphi_k).
\end{aligned} \tag{9}$$

Данная группа также является системой линейных алгебраических уравнений относительно импульсов  $J_k$ . В то же время системы (8) и (9) нелинейны относительно фаз  $\varphi_k$ . В конкретных случаях, используя свойства ПФГ [2], уравнения (8) и (9) могут быть упрощены.

В случаях, когда ударные пары симметричны или ищутся субгармонические или комбинационные режимы, вид соотношений (6), (8), (9) остается практически тем же; меняются только конкретные значения величин  $\chi_{jk}(\varphi_k - \varphi_j)$  и  $\dot{\chi}_{jk}(\varphi_k - 0 - \varphi_j)$ . Например, при рассмотрении симметричных ударных пар и отыскании симметричных режимов ( $u_k(t + 1/2T) = -u_k(t)$ ) все соотношения строятся, исходя из симметричных ПФГ [2]. Вместо (5) здесь необходима замена  $\chi_{qk} \rightarrow \chi_{qk}^*$  и

$$\chi_{qk}^*(t) = T^{-1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} L[u_q, u_k; i(2j+1)\omega] \exp[i(2j+1)\omega t]. \tag{10}$$

После решения системы (8), (9) и определения представления (6) можно найти перемещение любой точки  $y$

$$y(t) = y^0(t) - \sum_{j=1}^n J_j \chi(u_j, y; t - \varphi_j), \tag{11}$$

где смысл обозначений очевиден.

Заметим, что возможен случай, когда процесс сопровождается ударами лишь в  $n_1 \leq n$  ударных парах, так что  $n - n_1$  ударных импульсов равны нулю. Если  $n_1 = n - 1$  и колебания в единственной «действующей» ударной паре имеют амплитуду, существенно превосходящую амплитуды всех прочих точек системы, то это свидетельствует об установлении локализованного режима, экспериментально описанного, например, в [4, 5].

**Хлопок в цепочке упругосвязанных масс.** Хлопком называется режим движения, при котором все массы двигаются синфазно и одновременно ударяются об ограничитель. При хлопке виброударный процесс наиболее интенсивен. Рассмотрим модель системы с периодической структурой (рис. 1, б). Не ограничивая общности рассуждений, для простоты будем считать  $m = c = 1$ . Предположим, что система консервативна. Тогда уравнения движения для  $k = 1, 2, \dots, n$  и граничные условия имеют вид

$$\ddot{u}_k + 2u_k - u_{k-1} - u_{k+1} + \Phi(u_k, \dot{u}_k) = 0, \quad u_0 = u_{n+1} = 0, \tag{12}$$

где  $u_k \leq \Delta$  и удар предполагается абсолютно упругим.

Пусть в системе осуществляется хлопок, в котором участвуют все частицы. Тогда  $2n$ -параметрическое представление (6) и определяющая система (8), (9) при  $k = 1, 2, \dots, n$  принимает вид

$$u_k(t) = - \sum_{j=1}^n J_j \chi_{jk}(t), \quad (13)$$

$$\Delta = - \sum_{j=1}^n J_j \chi_{jk}(0), \quad J_k = -2 \sum_{j=1}^n J_j \dot{\chi}_{jk}(-0), \quad (14)$$

где удар совмещен с началом отсчета времени.

Учитывая соотношения [2] и решения [6], при  $0 \leq t \leq T$  найдем

$$\chi_{jk}(t) = \sum_{q=1}^n \frac{1}{n+1} \sin \frac{\pi j q}{n+1} \sin \frac{\pi k q}{n+1} \frac{\cos \Omega_q (t - 1/2 T)}{\Omega_q \sin 1/2 \Omega_q T}, \quad (15)$$

где собственные частоты линейной цепочки  $\Omega_q = 2 \sin [1/2 \pi q (n+1)^{-1}]$  ( $q = 1, 2, \dots, N$ ).

Для получения периодической функции Грина (ПФГ)  $\chi_{jk}(t)$  вне отрезка  $[0, T]$  функцию (15) надо продолжить по периодичности, исходя из условия  $\chi_{jk}(t + \bar{T}) = \chi_{jk}(t)$  для всех  $t \in \mathbb{R}$ .

В силу ортогональности собственных форм второе соотношение (14); при всех  $k$  является тождеством (решение автономных систем определяются с точностью до произвольных фаз). Вектор импульсов легко отыскивается из системы линейных уравнений, следующих из первого соотношения (14) при  $k = 1, 2, \dots, n$ . Ранее подобное решение было выписано в [1].

Рассмотрим трехпролетную цепочку с двумя массами ( $n = 2$ ). Из (14) следует

$$\Delta = -J_1 \chi_{11}(0) - J_2 \chi_{12}(0), \quad \Delta = -J_1 \chi_{21}(0) - J_2 \chi_{22}(0). \quad (16)$$

Так как  $\chi_{11}(0) = \chi_{22}(0)$  и  $\chi_{21}(0) = \chi_{12}(0)$ , то  $J_1 = J_2 = J$ . Для собственных частот находим  $\Omega_1 = 1$ ,  $\Omega_2 = \sqrt{3}$ . Соотношения (13) — (15) дают

$$\chi_{11}(0) = \chi_{22}(0) = \frac{1}{3} \left( \frac{3}{4} \operatorname{ctg} \frac{1}{2} T + \frac{\sqrt{3}}{4} \operatorname{ctg} \frac{\sqrt{3}}{2} T \right),$$

$$\chi_{12}(0) = \chi_{21}(0) = \frac{1}{3} \left( \frac{3}{4} \operatorname{ctg} \frac{1}{2} T - \frac{\sqrt{3}}{4} \operatorname{ctg} \frac{\sqrt{3}}{2} T \right),$$

$$J \equiv J_1 = J_2 = -2\Delta \operatorname{tg} \frac{1}{2} T = -2\Delta \operatorname{tg} \pi\omega^{-1},$$

что в точности отвечает движению обычного «ударного осциллятора» [1,2]. Из условия  $J \geq 0$  следует, что хлопки возможны в частотном диапазоне  $\dot{j} = \Omega_1 < \omega < 2\Omega_1 = 2$ . Из (12) для искомых законов движения получаем

$$u_1(t) = u_2(t) = -J [\chi_{11}(t) + \chi_{12}(t)] = \Delta \frac{\cos(1 - \pi\omega^{-1})}{\cos \pi\omega^{-1}},$$

т.е. движение каждого тела аналогично движению «ударного осциллятора». Подобный вывод справедлив при любом  $n$ .

**Система с решетчатым ограничителем.** Рассмотрим систему, представленную на рис. 2. Шарнирно закрепленный стержень может при совершении

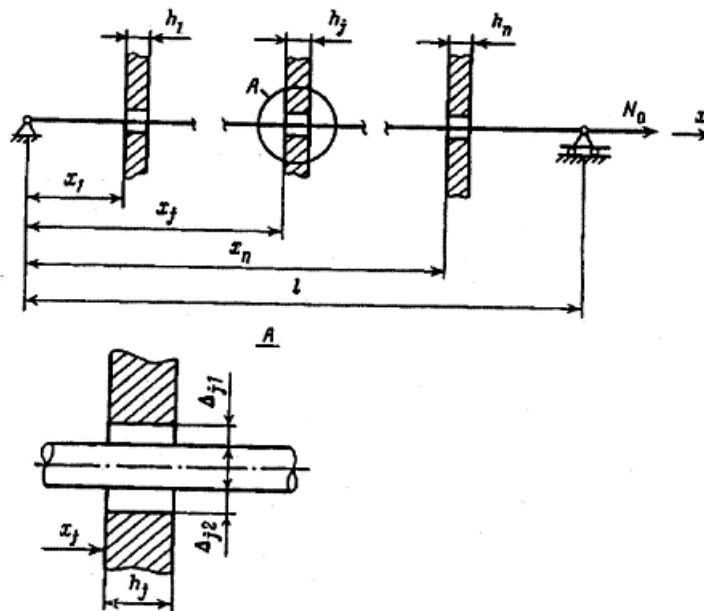


Рис. 2

колебаний в плоскости чертежа соударяться с  $n$  плоскими протяженными ограничителями ширины  $h_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ). Параметры системы: длина стержня -  $l \gg h_j$ ; растягивающее усилие

$N_0$ ; жесткость и погонная масса стержня  $K$  и  $P$ ; установочные зазоры  $\Delta_{1,2}$ ; координаты начал ограничителей -  $x_j$ , концов -  $x_j + h_j$ . Будем рассматривать симметричную систему ( $\Delta_1 = \Delta_2 \equiv \Delta$ ).

Предполагая, что малая диссипация учитывается только при ударах и мал уровень возбуждения, запишем уравнение движения в предположениях, что стержень моделируется балкой Бернулли

$$\begin{aligned} \rho u_{tt} + Ku_{xx} - N_0 u_{xx} + \Phi_1^*(u, u_t) &= \varepsilon [P(x, t) - \Phi_2^*(u, u_t)], \\ u(0, t) = u(l, t) = u_{xx}(0, t) = u_{xx}(l, t) &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь граничные условия отвечают свободному опиранию;  $\varepsilon$  - малый параметр ( $h_j \sim \varepsilon$ );  $P(x, t) = -P(x, t + T/2) - T$  - периодическое возбуждение, предполагаемое симметричным;  $\Phi_1^*$  и  $\varepsilon\Phi_2^*$  - упругая и малая диссипативные составляющие плотности силы ударного воздействия. Появление малого параметра в правой части говорит о том, что исследоваться будут колебания, близкие к собственным.

Плотность ударных сил, действующих при  $x \in [x_k, x_k + h_k]$ , записывается через плотность ударного импульса ( $I(x)$ ) и распределение фазы ( $\varphi(x)$ ) [3, 7]

$$\Phi_1^*(u, u_t) + \varepsilon\Phi_2^*(u, u_t) = \sum_{k=1}^n I(x) \delta^{T/2}[t - \varphi(x)] \{\eta(x_k) - \eta(x_k + h_k)\}, \quad (18)$$

где  $\eta(x)$  — функция Хевисайда; симметричная  $T$  — периодическая последовательность  $\delta$ -функций Дирака [2];

$$\delta^{T/2}(t) = \delta^T(t) - \delta^T(t - 1/2T) = 2T^{-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp[i(2k+1)\omega t].$$

Для искомого поля перемещений имеет место интегральное представление [3, 7], являющееся аналогом  $2n$ -параметрического представления (6)

$$u(x, t) = \varepsilon u^0(x, t) - \sum_{k=1}^n \int_{x_k}^{x_k+h_k} \chi^*[x, z, t - \varphi_k(z)] I_k(z) dz, \quad (19)$$

где  $\varepsilon u^0$  — решение соответствующей линейной задачи;  $I_k(x)$ ,  $\varphi_k(x)$  — плотность импульса и распределения фазы для  $k$ - пары в решетке.

Симметричная ПФГ балки при  $0 \leq t \leq 1/2T$  имеет вид [1, 2]

$$\chi^*(x, z, t) = (\rho l)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} [\Omega_n \cos 1/4\Omega_n T]^{-1} \sin \pi n z l^{-1} \sin \pi n x l^{-1} \sin \Omega_n (t - 1/4T) \quad (20)$$

и отвечает оператору, действующему из точки  $z$  в точку  $x$ . Собственные частоты линейной системы  $\Omega_n = (\pi^4 n^4 l^{-4} K \rho^{-1} + \pi^2 n^2 l^{-2} N_{\text{д}} \rho^{-1})^{1/2}$ . Вне отрезка  $[0, 1/2 T]$  функция (20) продолжается на всю ось по периодичности, исходя из условий симметрии  $\chi^*(x, z, t + 1/2 T) = -\chi^*(x, z, t)$ .

Воспользуемся малостью величин  $h_k$ : волновые процессы в самом ударном элементе оказывают на режим слабое влияние и вместо (19) можно перейти к  $2n$ -параметрическому представлению вида

$$u(x, t) = \varepsilon u^0(x, t) - \sum_{k=1}^n J_k \bar{\chi}^*(x, x_k; h_k; t - \varphi_k), \quad (21)$$

где фигурирует полный импульс в  $k$ -паре

$$J_k = \int_{x_k}^{x_k+h_k} I_k(z) dz = \text{const}(x).$$

В формулу (21) входит усреднение ПФГ

$$\bar{\chi}^*(x, x_k; h_k; t) = h_k^{-1} \int_{x_k}^{x_k+h_k} \chi^*(x, z, t) dz. \quad (22)$$

Подставляя (20) в (22), после интегрирования имеем

$$\begin{aligned} \bar{\chi}^*(x, x_k; h_k; t) = \\ = -\frac{2}{\pi \rho h_k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi n x l^{-1} \sin \pi n \left(x + \frac{1}{2} h_k\right) l^{-1} \sin \frac{1}{2} \pi n h_k l^{-1} \sin \Omega_n \left(t - \frac{1}{4} T\right)}{n \Omega_n \cos 1/4 \Omega_n T}. \end{aligned} \quad (23)$$

Представление (21) вполне аналогично (6). Оно предполагает, что масса приведенного точечного контактирующего тела  $m_k = \rho h_k$ , а импульс  $J_k = m_k (1 + R_k) u_t(x_k, -0)$ , где  $R = 1 - \varepsilon r_k$  — коэффициент восстановления в  $k$ -й паре. Используя (21), можно получить определяющую систему уравнений, подобную (8), (9). Для получения более просто интерпретируемых решений найдем в консервативном случае ( $\varepsilon = 0$ ) одночастотный периодический режим. Затем, предположив, что на резонансе режим движения приближенно отвечает консервативному решению, найдем условие существования резонансных режимов, исходя из принципа энергетического баланса, в соответствии с которым на периодическом движении балансируются работы неконсервативных сил — воз-буждения и диссипации [1 — 3].



Положив  $\varepsilon = 0$ , для свободных колебаний некоторого периода  $T_0$ , ограничиваясь рассмотрением синфазных хлопков и совместив одновременные удары о правые ограничители с началом отсчета времени, найдем:

$$\Delta_j = - \sum_{k=1}^n J_k \bar{X}_k^* (x_j, x_k; h_k; 0), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (24)$$

$$J_k = -2\rho h_k \sum_{k=1}^n J_k \bar{X}_k^* (x_j, x_k; h_k; -0). \quad (25)$$

Можно показать, что с принятой точностью соотношения (25) удовлетворяются, а решения линейной алгебраической системы (24) полностью определяют представление

$$u = u^* (x, t) = - \sum_{k=1}^n J_k \bar{X}_k^* (x, x_k; h_k; 0), \quad \varepsilon = 0. \quad (26)$$

Следует отметить, что при получении решений консервативной задачи период усредненной ПФГ  $T_0$  не равен периоду  $T$ . В консервативном случае период  $T_0$  есть функция величин  $J_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Далее, при изучении одночастотных резонансных режимов будем предполагать, что  $T = T_0$ .

**Расчет трехпролетной трубки.** Рассмотрим трехпролетную трубку ( $n = 2$ ), которую корректно моделировать при посредстве балки Бернулли. Положим  $h_1 = h_2 \equiv h$ ,  $\Delta_1 = \Delta_2 \equiv \Delta$ ,  $x_2 = l - x_1 - h$ . Разрешая систему (24) и обозначая частоту свободных колебаний  $\omega_0$  ( $\omega_0 = 2\pi T_0^{-1}$ ), с учетом (23) находим  $J_1 = J_2 \equiv J$ , где

$$J = \frac{1}{4} \pi \rho \Delta h \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin \pi(2j-1)x_1 l^{-1} \sin \frac{1}{2} \pi(2j-1)h l^{-1} \sin \left[ \pi(2j-1)l^{-1} \left( x_1 + \frac{h}{2} \right) \right]}{(2j-1) \Omega_{2j-1} \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \Omega_{2j-1} \pi \omega_0^{-1}} \right\}^{-1}.$$

(27)

Это вместе с (26) и (23) полностью описывает режимы в консервативной системе. Приравнявая нулю фигурную скобку (27), можно отыскать частоты, отвечающие бесконечным импульсам.

Проведем расчеты при следующих геометрических и физических характеристиках трубки [7]: наружный диаметр  $D = 16 \cdot 10^{-3}$  м, внутренний диаметр  $d = 13 \cdot 10^{-3}$  м, модуль Юнга  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Н·м<sup>-2</sup> (отсюда изгибная жесткость  $K = 1/64 \pi E (D^4 - d^4) = 363$  Н·м<sup>2</sup>), длина трубки  $l = 3$  м,  $\rho = 1$  кг/м,  $N_0 = 4 \cdot 10^3$  Н,  $\Delta = 2 \cdot 10^{-4}$  м,  $h = 10^{-2}$  м.

Частотные зоны, в которых формально могут существовать режимы движения типа хлопков, определяются условием  $J \geq 0$ . Для нахождения границ этих зон необходимо определить частоты, при которых  $J = 0$  и  $J = \infty$ . Расчеты показывают, что одна такая зона

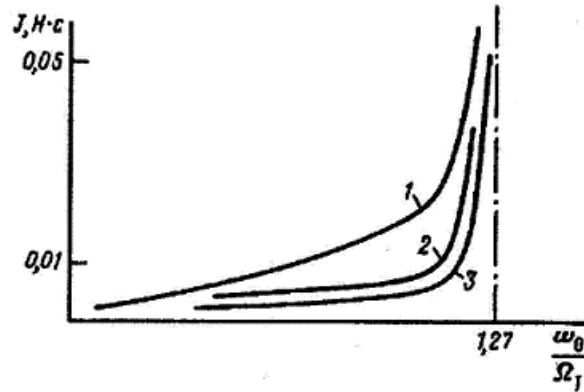


Рис.3

существует справа от первой собственной частоты линейной системы и занимает отрезок  $[\Omega_1; 1,27\Omega_1]$ . Расчеты были выполнены численно. Учитывали 20 членов ряда (27). Сходимость контролировали численно. Наряду с этой зоной были найдены другие, оказавшиеся весьма узкими, и их рассмотрение не имеет практического смысла. Данное замечание находится в согласии с экспериментом [4].

Ограничиваясь экспериментально наблюдаемыми хлопками — режимами, устанавливающимися справа от первой собственной частоты линейной системы, можно получить зависимости, показанные на рис. 3 (кривая 1 отвечает случаю  $x_1 = 0,7$ ; 2 — 0,85; 3 — 1).

Пусть в (17)  $P(x, t) = P_1 \sin \pi x l^{-1} \cos(\omega t + \varphi)$ . Рассмотрим вынужденные резонансные колебания, для осуществления которых необходимо, чтобы частота  $\omega$  попала в интервал собственных частот  $(\Omega_1; 1,27\Omega_1)$ . Будем описывать движения при посредстве (26), (27), считая  $u(x, t) \approx u^*(x, t) + \dots$  и  $\omega = \omega_0$ . Совместив удар с началом отсчета времени, считаем фазу  $\varphi$  неизвестной. Для ее нахождения воспользуемся принципом энергетического баланса, который в случае  $n$  ударных пар принимает вид

$$\int_0^l \int_0^{T/2} P(x, t) u_i^*(x, t) dx dt = \sum_{j=1}^n J_j^2 \frac{1 - R_j}{2\rho h_j (1 + R_j)}, \quad (28)$$

где в левой части помещена работа силы внешнего источника на движении  $u^*(x, t)$  ( $\omega_0 = \omega$ ); в правой части — следующее из теоремы Карно выражение для суммарных

потерь энергии при ударах ( $R_j$  — коэффициент восстановления в  $j$ -й паре). Подставляя в (28) выражение для  $P(x, t)$  и пользуясь соотношениями (26) и (23), после вычислений получим

$$\frac{4P_1 J \omega \sin \frac{\pi h}{2l} \sin \frac{\pi}{l} \left( x_1 + \frac{1}{2} h \right) \sin \varphi}{\pi \rho h (\Omega_1^2 - \omega^2)} = \frac{J^2}{2\rho h} \left( \frac{1 - R_1}{1 + R_1} + \frac{1 - R_2}{1 + R_2} \right).$$

Отсюда определяем два значения фазы и условие существования резонансного режима ( $|\sin \varphi| \leq 1$ ). В рассматриваемом примере трехпролетной трубки для амплитуды внешней силы, потребной для поддержания резонансных колебаний, можно получить оценку ( $R_1 = R_2 \equiv R$ )

$$P_1 \geq \left| \frac{J(1-R)(1+R)^{-1} \pi (\Omega_1^2 - \omega^2)}{4l\omega \sin \frac{\pi h}{2l} \sin \frac{\pi}{l} \left( x_1 + \frac{h}{2} \right)} \right|.$$

Аналогично анализируются несимметричный случай решетчатого ограничителя, а также некоторые другие типы движений, устанавливающихся подобных системах.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 10-08-00500).

### Литература

1. Бабицкий В. И. Теория виброударных систем. М.: Наука, 1978. 352 с.
2. Бабицкий В. И., Крупенин В. Л. Колебания в сильно нелинейных системах. М.: Наука, 1985. 320 с.
3. Веприк А. М., Вознюк Г. Д., Крупенин В. Л. и др. Широкополосные виброударные генераторы механических колебаний. Л.: Машиностроение, 1987. 79 с. Бабицкий В. И., Веприк А. А., Крупенин В. Л. Виброударные эффекты при ограниченных колебаниях одномерной цепочки упруго соединенных бусинок // ДАН СССР. 1989. Т. 300. № 3. С. 562—566.
4. Крупенин В. Л. Трансформация форм колебаний струны, взаимодействующей с двумя протяженными преградами // ДАН СССР. 1990. Т. 313. № 6. С. 1390—1394.
5. Коткин Г. Л., Сербо В. Г. Сборник задач по классической механике. М.: Наука, 1977. 320 с.
6. Крупенин В. Л. К теории виброударных систем с распределенными ударными элементами // Изв.
7. АН СССР. МТТ. 1986. № 1. С. 25—32. Парогенераторы АЭС вертикальные. Расчет вибраций теплообменных труб. РТМ-108. Л.: Изд-во НПО ЦИТИ, 1986. 101 с.