ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ ДЛЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СИЛ УДАРНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И РАЗРЫВНЫХ РЕШЕНИЙ

Крупенин В.Л.
ИМАШ РАН
Москва, Россия

Будем предполагать, что независимые способы измерения независимых переменных x и t, определяющие искомое перемещения сечений стержня $u(x, t)$ выбраны так, что линейная плотность стержня равна единице. Тогда единичной оказывается и скорость звука в материале стержня. Без ограничения общности, можно считать координаты его концов, находящегося в статическом состоянии равными $x=-½$ и $x=0$. Исследуемую модель запишем в виде уравнения движения и граничных условий:

$$\square u-\Phi(u)=\varepsilon H(t,x,u_t, u_x,\ldots);\ u(-{}^1/_2,t)=0;\ u_x(0,t)=0, \qquad (1)$$

где $\square u\equiv u_{tt} - u_{xx}$ –оператор Д'Аламбера; H – вообще говоря, нелинейная T-периодическая функция времени, зависящая как от независимых переменных, так и от высших частных производных перемещения. Предполагается, что гладкость функции H обеспечивает существование и единственность решения хотя бы в обобщенном смысле [1]. Функция $\Phi(u)$, входящая в уравнение движения (1) – сила взаимодействия свободного конца стержня с неподвижным ограничителем (например, обрабатываемой поверхностью). Пусть взаимодействие осуществляется при $u(0,t)=\Delta$. Если $\Delta<0$ - имеем систему с зазором, при $\Delta>0$ - с натягом. Таким образом, при всех t

$$u(0,t)\geq\Delta. \qquad (2)$$

При возникновении контакта стержня с ограничителем, его концевое сечение $x=0$ будет некоторое время покоиться. При этом в неравенстве (2) реализуется равенство. Если t_k – момент начала k-го взаимодействия, а θ_k – его окончание. Таким образом равенство в неравенстве (2) реализуется при $t\in[t_k, \theta_k]$. Поэтому

$$\Phi(u)=\Sigma R_k(t)\ \delta(x)[\ \eta(t- t_k\ ) - \eta(t- \theta_k\ )],\qquad R_k(t)=- u_x(+0)\geq0,\ t\in[t_k, \theta_k] \qquad (3)$$

где суммирование ведется по целым числам $k\in Z$; $\delta(x)$ и $\eta(t)$ – обобщенные функции Дирака и Хевисайда (сингулярная и регулярная); R_k - сила реакции ограничителя. Наличие выстоев стержня приводит к парадоксальной для традиционной теории, использующей предположение о мгновенном отскоке ударника, ситуации. Оказывается, что при самом ударе энергия не теряется, но он, тем не менее, оказывается подобным абсолютно неупругому, так как, в частности, $u_t(0,t_k+0)=0$. При реализации в (2) строгого неравенства, R_k=0 и контакт прекращается.

Уравнение (1) – суть нелинейное уравнение Клейна-Гордона. В предположении периодичности процесса, обозначим здесь и далее T – период стационарной стоячей волны. Оно анализируется в соответствии с методами частотно – временного анализа виброударных процессов, переходом к интегральному уравнению процесса в виде [1]:

$$u(x,t)=\int_0^T\int_{-1/2}^0 \chi(x,z,t-s)\ \{\Phi[u(z,s)] +\varepsilon H(s,x,u_t, u_x,\ldots)\}dz\ ds$$

где $\chi(x,z,t)$ Т-периодическая функция Грина (ПФГ) стержня с граничными условиями (1).

$$\chi(x,z,t)=4\sum_{k=o}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\ \ \sin[(2k+1)\pi(x+½)]\ \sin[(2k+1)\pi(z+½)]\chi_{2k+1}(t).$$

Данная методика позволяет получить непрерывные решения, несмотря на сингулярность, вносимую обобщенными функциями.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 08-10-00500).

Литература.

1. V.I. Babitsky, V.L. Krupenin Vibration of Strongly Nonlinear Discontinuous Systems.- Berlin. Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 2001. –404 p.p.