

**О ПРОХОЖДЕНИИ СИЛЬНО НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН ЧЕРЕЗ ЭЛЕМЕНТЫ
МАШИННЫХ КОНСТРУКЦИЙ, МОДЕЛИРУЕМЫХ ПОСРЕДСТВОМ СПЛОШНЫХ
СРЕД СЛОЖНОЙ СТРУКТУРЫ (Часть 2)**

© **Виталий Львович Крупенин**

*Учреждение Российской академии наук институт машиноведения РАН
им. А.А. Благонравова
krupenin@online.ru*

Аннотация. Дано подробное описание процесса прохождения резонансного виброударного волнового процесса через машинную конструкцию, моделируемую сильно нелинейной сплошной средой сложной структуры. Такие модели содержат несущий элемент и присоединенное оборудование — прямой продольно колеблющийся стержень, в каждой точке которого амортизированы присоединенные динамические системы, содержащие ударные пары различной природы. Показано, что использование моделей данного типа дает возможность, в частности, аналитически описать весьма нетривиальные машинные конструкции, возникающие в них динамические процессы и присущие им и ранее не описанные нелинейные эффекты.

Ключевые слова: сильно нелинейные сплошные среды, волноводы, модели виброударных систем и процессов, распределенные периодические функции Грина (ПФГ), нелинейные формы колебаний, плотность импульса, распределение фазы удара, зоны прохождения вибрации, зоны локализации вибрации, множественные соударения элементов машин.

4. Для уяснения специфики задачи положим $\mu = 0$, $R = 1$ и рассмотрим режим свободных колебаний, предполагая существование симметричных режимов некоторого неизвестного периода T . При этом следует оговорить, что, во-первых, таких периодических режимов может быть несколько и детальное их описание в нашу задачу не входит и, во-вторых, в рассматриваемой системе могут существовать и гораздо более сложные режимы, обусловленные, например, возможностью стохастизации [3,4]. Выведенные интегральные уравнения предполагают непрямую T -периодичность и, следовательно, уже исходных дифференциальных.

Предположим, что виброударный режим осуществляется при всех $x \in [0, l]$. Кроме того, за период движения в каждой ударной паре происходят два соударения: одно с правой стенкой полости, другое с левой. Тогда можно положить $\Phi(y^0) = J(x) \delta^{T/2}[t - \varphi(x)]$, где $\delta^{T/2}$ - симметричная T -периодическая последовательности δ - функций Дирака. Подставив это выражение в (33), найдем:

$$y^0(x, t) = -c \int_0^t \int_0^{T/2} \chi_1(t-s) V[x, z, s - \varphi(z)] J(z) dz ds - \\ - J(x) \chi[t - \varphi(x)]. \quad (35)$$

Это и есть то самое представление, содержащее две неизвестные функции, которое мы искали. Если «заморозить» стержень и положить $V \equiv 0$, получим обычное соотношение, характерное для $R = 1$. Соотношения (11) дают:

$$\Delta = -c \int_0^l \int_0^{\tau/2} \chi_1 [\varphi(x) - s] V [x, z, s - \varphi(z)] J(z) dz ds - J(x) \chi(0); \quad (36)$$

$$J(x) = -2Mc \int_0^l \int_0^{\tau/2} \dot{\chi}_1 [\varphi(x) - s - 0] V [x, z, s - \varphi(z)] \times \\ \times J(x) dz ds - J(x) \dot{\chi}(-0) 2M. \quad (37)$$

Поскольку в соответствии со свойствами ПФГ в отсутствии трения $\dot{\chi}(-0) = -1/(2M)$, то выражение (37) примет вид

$$\int_0^l \int_0^{\tau/2} \dot{\chi}_1 [\varphi(x) - s - 0] V [x, z, s - \varphi(z)] J(z) dz ds = 0. \quad (38)$$

Пусть $\varphi(x) = \text{const}$. Используя определения входящих сюда функций χ_1 и V (п. 2), можно доказать, что (38) выполняется тождественно, т.е. значение $\varphi(x) = \varphi = \text{const}$ удовлетворяет этому уравнения при всех $J(z)$. Постоянное значение $\varphi(x)$ соответствует синфазности движения во всех ударных парах. Теперь уравнение (36) примет вид

$$\Delta = -c \int_0^l \int_0^{\tau/2} \chi_1 (-s) V (x, z, s) J(z) dz ds - J(x) \chi(0),$$

и после интегрирования по s для плотности импульса находим линейное интегральное уравнение Фредгольма [7]

$$J(x) = -\frac{\Delta}{\chi(0)} - \int_0^l K(x, z) J(z) dz, \quad (39)$$

ядро которого представляет собой бесконечный ряд:

$$K(x, z) = -\frac{2c^2}{ET\chi(0)} \frac{G_{2k+1}(x, z)}{[c - m(2k+1)^2\omega^2]^2},$$

где ω - частота периодического движения, $\omega = 2\pi T^{-1}$.

Решение уравнения (39) со столь сложным ядром представляет определенные трудности, но, поскольку коэффициенты ряда быстро убывают, его можно упростить, оставив только первый член. В этом случае

$$K(x, z) \approx -\frac{4c^2}{ET\chi(0)} \frac{G(x, z)}{(c - m\omega^2)^2},$$

где $G(x, z)$ - функция, описываемая (22) при $k=1$, $G(x, z) \equiv G_1(x, z)$.

Физический смысл проведенного упрощения заключается в пренебрежении уменьшающимися повторными влияниями присоединенной части среды на несущую и обратно, осуществляющимися за счет высших гармоник виброударного процесса. Проведенное сужение ряда неправомерно при $\omega_{0k} \approx \pi n/l(2k+1)$ [см. (22)].

В результате произведенного упрощения (39) принимает вид

$$\begin{aligned}
J(x) = & 2\Delta \left[\frac{1}{\sqrt{cm}} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{c}{m}} \frac{\pi}{2\omega} + \frac{\pi}{2m_1\omega} \right]^{-1} - \\
& - \frac{4c^2\omega}{\pi E\omega_0(c - m\omega^2)^2} \left[\frac{1}{\sqrt{cm}} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{c}{m}} \frac{\pi}{2\omega} + \frac{\pi}{2m_1\omega} \right]^{-1} \frac{1}{\sin \omega_0 l} \times \\
& \times \left[\int_0^x \sin \omega_0 z \sin \omega_0(x-l) J(z) dz + \int_x^l \sin \omega_0(z-l) \sin \omega_0 x J(z) dz \right],
\end{aligned} \tag{40}$$

где учтено (22) (при $k = 1$, $\omega_0 = \omega_{01}$) и то, что в соответствии с [3,4] ПФГ

$$\begin{aligned}
\chi(t) = & \frac{4}{T} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{c - m(2k+1)^2\omega^2} - \frac{1}{m_1(2k+1)^2\omega^2} \right) \times \\
& \times \cos [(2k+1)\omega t] = \frac{1}{2\sqrt{cm}} \frac{\sin \sqrt{\frac{c}{m}} \left(t - \frac{\pi}{2\omega} \right)}{\cos \sqrt{\frac{c}{m}} \frac{\pi}{2\omega}} + \frac{1}{m_1} \left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4\omega} \right),
\end{aligned}$$

причем здесь используется вещественная запись ряда Фурье и последнее равенство имеет место только при $0 \leq t < T/2$.

Выражение

$$J_0 = 2\Delta \left[\frac{1}{\sqrt{cm}} \operatorname{tg} \left(\sqrt{\frac{c}{m}} \frac{\pi}{2\omega} \right) + \frac{\pi}{2m_1\omega} \right]^{-1} = \operatorname{const}(x) \tag{41}$$

представляет собой плотность импульса в пренебрежении податливостью несущего стержня. Поскольку уравнение (40) решается методом последовательных приближений [3,7], примем (41) в качестве нулевого приближения и подставим в (40). После взятия квадратур, в первом приближении получим:

$$J(x) \approx J_1(x) \equiv J_0 \left[1 - \frac{2c^2\omega J_0}{\pi \Delta E \omega_0^2 (c - m\omega^2)^2} \left(1 - \frac{\cos \omega_0(x - l/2l)}{\cos l/2\omega_0 l} \right) \right]. \tag{42}$$

Ядро интегрального уравнения (40)

$$|K(x, z)| \leq \lambda(\omega_0) (\sin \omega_0 l)^{-1},$$

где ω_0 и ω связаны соотношением (18) и при $\omega \rightarrow \infty$ $\lambda(\omega_0) = \operatorname{const} \omega^{-3}$. Вследствие этого при больших значениях частоты движения формула (42) формально не применима только в малых окрестностях резонансных частот $\omega_0 = \pi n l^{-1}$, $n = 1, 2, \dots$ (хотя при $n = 2q$ она имеет смысл). По условию рассмотрению подлежит частотный диапазон $\omega \gg \Omega$ и предполагается, что собственные частоты несущей части вибропровода выше частоты присоединенных осцилляторов.

Используя (42) и (32) (при $U_1 \equiv 0$), можно найти поле перемещений $U(x, t)$. Подставив в (32) $\Phi(y^0) = J(x) \delta^{7/2}(t - \varphi)$, после вычисления квадратуры получим

$$\begin{aligned}
U(x, t) = U^0(x, t) = & \frac{2c}{ET} \left\{ \frac{\cos \omega(t - \varphi)}{(c - m\omega^2) \omega_0^2} \left[J_0(1 - \beta J_0) \times \right. \right. \\
& \times \left(1 - \frac{\cos \omega_0(x - l/2)}{\cos 1/2 \omega_0 l} \right) - \beta J_0^2 \omega_0 \left(\frac{l \sin \omega_0 x}{4 \cos^2 1/2 \omega_0 l} - \frac{x \sin \omega_0(x - l/2)}{2 \cos 1/2 \omega_0 l} \right) \left. \right] + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)\omega(t - \varphi)}{[c - m(2k+1)^2 \omega^2] \omega_0^2} \left[\frac{J_0(1 - \beta J_0)}{(2k+1)^2} \left(1 - \right. \right. \\
& - \left. \left. \frac{\cos(2k+1)\omega_0(x - l/2)}{\cos 1/2(2k+1)\omega_0 l} \right) - \frac{\beta J_0^2}{[(2k+1)^2 - 1]} \left(\frac{\cos(2k+1)\omega_0(x - l/2)}{\cos 1/2(2k+1)\omega_0 l} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\cos \omega_0(x - l/2)}{\cos 1/2 \omega_0 l} \right) \right] \left. \right\}, \tag{43}
\end{aligned}$$

что свидетельствует о наличии в спектре всех гармоник и определяет довольно быстрый характер их убывания. Интенсивность процесса определяется принимаемыми порядками значений параметров: при малых c и больших E она не велика. В формуле (43)

$$\beta = \frac{2c^2 \omega}{\Delta \pi E \omega_0^2 (c - m\omega^2)^2} > 0.$$

Аналогично можно найти распределения $y(x, t)$ и $y^0(x, t)$ [см. (31) и (33)]. Определяющие их главные члены имеют вид

$$y(x, t) = J(x) \chi_1(t - \varphi) + \dots, \quad y^0(x, t) = -J(x) \chi(t - \varphi) + \dots \tag{44}$$

Малые добавки, обозначенные многоточиями, подсчитываются при помощи простых, но громоздких квадратур. Для существования приведенных режимов необходимо, чтобы при всех x и ω выполнялось неравенство $J(x) > 0$.

Перепишем выражение (42) в виде

$$J(x) = J_0 \left[1 - \beta J_0 \left(1 - \frac{\cos \omega_0(x - 1/2l)}{\cos 1/2 \omega_0 l} \right) \right], \tag{45}$$

где β , по предположению, мало.

Пусть $\cos 1/2 \omega_0 l > 0$. Тогда точки $x_{2k+1} = 1/2l + \frac{(2k+1)\pi}{\omega_0}$ отвечают минимумам функции $J(x)$, а точки $x_{2k} = 1/2l + \frac{2\pi}{\omega_0}$ - максимумам. При $\cos 1/2 \omega_0 l < 0$ - ситуация обратная. Указанные точки подлежат рассмотрению только при x_{2k} и $x_{2k+1} \in [0, l]$. Если x_0 - точка минимума $J(x_0) < 0$, то рассматриваемые режимы не реализуются.

В качестве примера рассмотрим несколько частотных диапазонов. Поскольку ω и ω_0 связаны соотношением (18), то при больших ω $\omega_0 \approx a^{-1}\omega$, где a - скорость звука в несущем стержне $a = \sqrt{E\rho^{-1}}$. Для определения J_0 можно воспользоваться (41) ($\lim J_0 = \infty$ при $\omega \rightarrow \infty$) (рис. 5). Пусть $\omega_0 < \pi l^{-1}$, тогда $\cos 1/2 \omega_0 l > 0$ (рис. 6). При таком условии на отрезке $[0, l]$ функция (45) имеет один максимум. Точкам минимума отвечают концевые точки $x = 0; l$ (рис. 7,а). При приближении к частоте $\omega_0 = \pi l^{-1}$ интенсивность ударов в середине стержня возрастает: $J(l/2) \rightarrow \infty$.

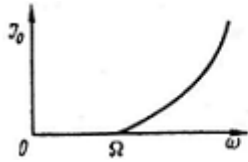


Рис. 5

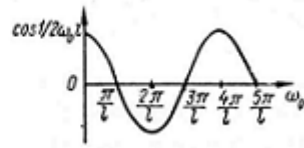


Рис. 6

Пусть $\pi l^{-1} < \omega_0 < 2\pi l^{-1}$. В этом случае $\cos 1/2\omega_0 l < 0$ и в точке $x_0 = 1/2l$ функция $J(x)$ минимальна. Других экстремумов при $x \in [0, l]$ нет (рис. 7,б). Вблизи значения $\omega_0 = \pi l^{-1}$ $J(1/2) < 0$ и колебания рассматриваемого вида невозможны. При возрастании ω_0 значение $J(1/2) > 0$, но мало настолько, что наиболее интенсивные режимы будут локализоваться у краев стержня.

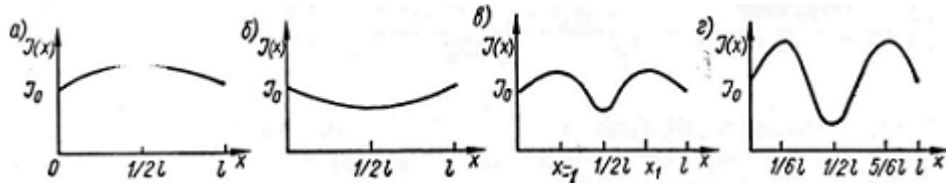


Рис. 7

В случае, когда $2\pi l^{-1} < \omega_0 < 3\pi l^{-1}$ $\cos 1/2\omega_0 l < 0$ и в точке $x_0 = 1/2l$ имеется минимум. Однако теперь здесь появляются еще два максимума $x_{-1,1} = 1/2l \pm \pi/\omega_0$ (рис. 7,в). Плотность импульса в этих точках

$$J(x_{-1,1}) = J_0 \left[1 - \beta J_0 \left(1 - \frac{1}{|\cos 1/2\omega_0 l|} \right) \right] \quad (46)$$

при приближении ω_0 к значению $3\pi l^{-1}$ стремится к бесконечности, между тем как значение

$$J(x_0) = J_0 \left[1 - \beta J_0 \left(1 + \frac{1}{|\cos 1/2\omega_0 l|} \right) \right] \quad (47)$$

становится все меньше (рис. 7,г). Таким образом, возникают явно выраженные локализации плотности импульса при $x \approx x_{-1}(3\pi l^{-1}) = 1/6l$ и $x \approx x_1(3\pi l^{-1}) = 5/6l$. Вблизи значения $\omega_0 \approx 3\pi l^{-1}$ колебания рассматриваемого вида невозможны, т.к. величина J_0 становится отрицательной.

Локализации ударов, очевидно, будут возникать всегда в районе частот $\omega_0 \approx (2k + 1)\pi l^{-1}$. Так в уже «пройденном» нами диапазоне $\omega_0 < \pi l^{-1}$ интенсивные удары (при приближении ω_0 к значению πl^{-1}) будут наблюдаться ближе к середине, после прохождения этого значения – к концам стержня.

Дальнейший анализ аналогичен предыдущему: с ростом ω_0 растет количество осцилляций функции $J(x)$; при приближении к частотам $\omega_0 = (2k + 1)\pi l^{-1}$ возникают локализации, и синфазные колебания будут срывать; при приближении к частотам $\omega_0 = 2k\pi l^{-1}$ будут рождаться новые экстремумы.

Проведенный анализ выявил важные свойства вибровыводов с присоединенными ударными элементами: генерирование высокочастотных составляющих и возможность возникновения локализаций интенсивных ударов. До сих пор рассматривалось синфазное движение всех ударных элементов. Такой режим будем именовать синфазной формой колебаний. Может возникнуть и иная ситуация, при которой часть ударных элементов двигается в противофазе по отношению к оставшейся части. Такие формы движения будем называть антифазными. Заметим, что при рассмотрении нелинейных колебательных систем (в отличие от случая линейных колебаний) под формой (например, синфазной) понимается существование некоторого упорядочения движения ударных элементов. В системе без

внешнего возбуждения и трения могут быть и другие типы движений, однако для дальнейшего изложения важнейшими оказываются именно синфазные и антифазные формы.

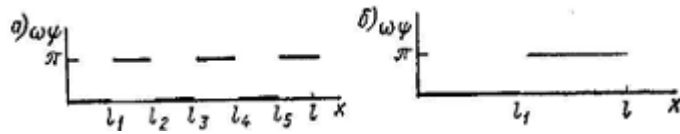


Рис. 8

Пусть задан конечный набор точек $0 < l_1 < l_2 < \dots < l_q < l$. Обозначим $\{l\}_1 = [0, l_1] \cup [l_3, l_4] \cup \dots$, $\{l\}_2 = [l_1, l_2] \cup [l_4, l_5] \cup \dots$. Очевидно $\{l\}_1 \cup \{l\}_2 = [0, l]$. Пусть

$$\omega\psi(x) = \begin{cases} 0, & x \in \{l\}_1; \\ \pi, & x \in \{l\}_2. \end{cases}$$

Докажем, что такая функция (рис. 8,а) удовлетворяет (38), а значит, и (37). Используя соглашение о суммировании, с учетом (25) при нечетных k вместо (38) можно записать

$$\frac{4c}{ET} \int_0^l \int_0^{T/2} \frac{i(2k+1)\omega}{c - m(2k+1)^2\omega^2} \frac{G_{2n+1}(x, z) J(z)}{c - m(2n+1)^2\omega^2} e_{2k+1}[\varphi(x) - s] \times \\ \times e_{2n+1}[s - \varphi(z)] dz ds = 0.$$

Обозначив левую часть $B(x)$ и используя ортогональность системы функций $\{e_{2k+1}(t)\}$, найдем

$$B(x) = \int_0^l A_{2k+1}(\omega, x, z) e_{2k+1}[\varphi(x) - \varphi(z)] dz,$$

где коэффициенты

$$A_{2k+1}(\omega, x, z) = \frac{2c}{ET} \frac{i(2k+1)\omega G_{2k+1}(x, z) J(z)}{[c - m(2k+1)^2\omega^2]^2}$$

Таким образом, в соответствии с (22)

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{2k+1}(\omega, x, z) = 0,$$

так как $A_{-n} = -A_n$.

Далее, с учетом того, что $e_{2k+1}(\pi) \equiv \exp[i(2k+1)\pi] = -1$, $e_{2k+1}(0) = 1$, находим

$$B(x) |_{\varphi=\psi(x)} = \int_{\{l\}_1} A_{2k+1}(\omega, x, z) e_{2k+1}[\psi(x)] dz - \\ - \int_{\{l\}_2} A_{2k+1}(\omega, x, z) e_{2k+1}[\psi(x)] dz.$$

Определим значение $B(x) |_{\varphi=\psi(x)}$ на множествах $\{l\}_1$ и $\{l\}_2$

$$\begin{aligned}
B(x) |_{x \in (l)_1, \varphi = \psi(x)} &= \int_{(l)_1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{2k+1}(\omega, x, z) dz - \\
&- \int_{(l)_2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{2k+1}(\omega, x, z) dz = 0; \\
B(x) |_{x \in (l)_2, \varphi = \psi(x)} &= 0.
\end{aligned}$$

Таким образом соотношение (38) удовлетворяется тождественно при любом $J(x)$, что и требовалось.

Для решения уравнения (36) можно воспользоваться методом последовательных приближений [3,7], положив предварительно $\varphi = \psi(x)$. Движения такого типа будем называть антифазными. Легко видеть, что число различных антифазных форм колебаний бесконечно.

В качестве примера рассмотрим антифазную форму движения для функции $\psi(x)$, изображенной на рис. 8,б; l_1 выбирается произвольно. С учетом произведенного упрощения формулы (39) запишем интегральное уравнение для плотности импульса

$$J(x) = \frac{\Delta}{\chi(0)} - \int_0^l K_\psi[x, z, \psi(x) - \psi(z)] J(z) dz, \quad (48)$$

где

$$\begin{aligned}
K_\psi[x, z, \psi(x) - \psi(z)] &= - \frac{4c^2}{ET\chi(0)} \frac{G(x, z) \cos \omega [\psi(x) - \psi(z)]}{(c - m\omega^2)^2} = \\
&= K(x, z) \cos \omega [\psi(x) - \psi(z)].
\end{aligned}$$

Для рассматриваемого случая

$$\begin{aligned}
J(x) &= \frac{\Delta}{\chi(0)} - \int_0^l K(x, z) \cos [\omega \psi(x)] J(z) dz + \\
&+ \int_l^l K(x, z) \cos [\omega \psi(x)] J(z) dz
\end{aligned} \quad (49)$$

и, следовательно,

$$J(x) = \begin{cases} -\frac{\Delta}{\chi(0)} - \int_0^{l_1} K(x, z) J(z) dz + \int_{l_1}^l K(x, z) J(z) dz, & x \in [0, l_1]; \\ -\frac{\Delta}{\chi(0)} + \int_0^{l_1} K(x, z) J(z) dz - \int_{l_1}^l K(x, z) J(z) dz, & x \in [l_1, l]. \end{cases} \quad (50)$$

Положив в нулевом приближении $J(x) = J_0 = -\Delta/\chi(0)$, после ряда преобразований запишем

$$J(x) = \begin{cases} J_0 \left[1 - \beta J_0 \left(1 + \frac{\sin \omega_0 (x-l) + \sin \omega_0 x - 2 \sin \omega_0 x \cos \omega_0 (l_1-l)}{\sin \omega_0 l} \right) \right], & x \in [0, l_1]; \\ J_0 \left[1 - \beta J_0 \left(1 + \frac{2 \cos \omega_0 l_1 \sin \omega_0 (x-l) - \sin \omega_0 x - \sin \omega_0 (x-l)}{\sin \omega_0 l} \right) \right], & x \in [l_1, l], \end{cases} \quad (51)$$

где $\beta = 2c^2\omega / [\pi\Delta E\omega_0^2(c - m\omega^2)^2]$ и предполагается достаточно малой величиной.

Из формулы (50) следует, что в точке $x = l_1$ функция $J(x)$, вообще говоря, имеет скачок

$$\Delta J = J(l_1 - 0) - J(l_1 + 0) = 8 \sin \omega_0 (l_1 - l/2) \sin 1/2\omega_0 (l_1 - l) \times \\ \times \sin 1/2\omega_0 l_1.$$

В точках $l_1 = 0, l, l/2$ $\Delta J = 0$. При $l_1 = l/2$

$$J(x) = \begin{cases} J_0 \left[1 - \beta J_0 \left(1 - \frac{\cos \omega_0 (x - l/4)}{\cos 1/4\omega_0 l} \right) \right], & x \in [0, l/2]; \\ J_0 \left[1 - \beta J_0 \left(1 - \frac{\cos \omega_0 (x - 3l/4)}{\cos 1/4\omega_0 l} \right) \right], & x \in [l/2, l]. \end{cases} \quad (52)$$

Значению $l_1 = l/2$ соответствует «истинно» антифазная форма с одним «переключением» фазы: «половина» шариков, находящихся в полостях присоединенных осцилляторов, в некоторый момент времени одновременно соударяется с левой стенкой полости, другая «половина» - с правой.

Функция (52) при $\omega = 2\pi l^{-1} + 4\pi k l^{-1}$ неопределена, т.е. антифазные формы могут существовать и тогда, когда синфазные не существуют. На рис. 9 изображены графики зависимости плотности импульса $J(x)$ от ω_0 . При $\omega_0 < 2\pi l^{-1}$ наблюдается картина, приведенная на рис. 9,а. Если $\omega_0 \rightarrow 2\pi l^{-1}$, то в окрестностях точек $x = l/4, 3l/4$ могут наблюдаться локализации интенсивных ударов (рис. 9,б). Вид зависимости $J(x)$ при $2\pi l^{-1} < \omega_0 < 6\pi l^{-1}$ дан на рис. 9,в, а при $\omega_0 \rightarrow 6\pi l^{-1}$ - на рис. 9,г. Здесь также возникают локализации [ср. рис. 7,в].

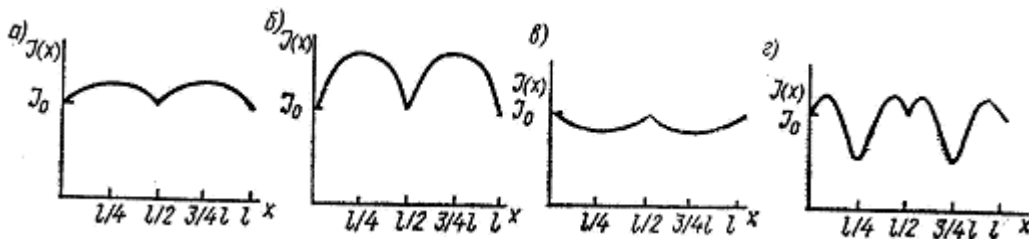


Рис. 9

Вернемся теперь к выражению (51) и рассмотрим случай, когда антифазная форма резко несимметрична: положим $l - l_1 = \xi$, $\xi \ll l$. В этом случае возникают «почти» синфазные формы:

$$J(x) = \begin{cases} J_0 \left[1 - \beta J_0 \left(1 - \frac{\cos \omega_0 (x - l/2)}{\cos \omega_0 l/2} \right) + \xi^2 \dots \right], & 0 \leq x < l - \xi; \\ J_0 [1 - \beta J_0 \xi \dots], & l - \xi < x \leq l. \end{cases} \quad (53)$$

причем многоточие обозначает члены неучитываемого порядка малости. Таким образом процесс можно описывать при помощи синфазных форм (при $l_1 \rightarrow l$ или $l_1 \rightarrow 0$). При $\varphi(x) = \text{const}$ кривые, приведенные на рис. 9, деформируются в кривые, приведенные на рис. 7.

После нахождения выражений для плотности импульса, зная распределения фазы, можно аналогично предыдущему подсчитать $y^0(x, t)$, $y(x, t)$ и $U(x, t)$ [см. (31), (32), и (35)].

5. Вернемся теперь к нашей основной задаче и будем считать, что $1 - R \neq 0$ и $\mu \neq 0$, но являются малыми величинами.

В соответствии с (33) и (34), полагая $\Phi(y^0) = J(x) \delta^{7/2}[t - \varphi(x)]$ ($T = 2\pi\omega^{-1}$ - период внешнего возбуждения), для T -периодических режимов получим:

$$y^0(x, t) = f(x, t) - c \int_0^t \int_0^{T/2} \chi_1(t-s) V[x, z, s - \varphi(z)] J(z) dz ds - J(x) \chi[t - \varphi(x)]; \quad (54)$$

$$f(x, t) = \mu C(x, \omega) \cos \omega t = - \frac{\mu c}{c - m\omega^2} \frac{\sin \omega_0 x \cos \omega t}{\sin \omega_0 l}. \quad (55)$$

Функции $J(x)$, $\varphi(x)$ могут быть определены из условий удара:

$$y^0[x, \varphi(x)] = \Delta; \quad J(x) = M(1 + R) y_t^0[x, \varphi(x) - 0] > 0. \quad (56)$$

Введем функцию

$$K_1[x, z, t - \varphi(z)] = c \int_0^{T/2} \chi_1(t-s) V[x, z, s - \varphi(z)] ds$$

и, выполнив интегрирование, найдем

$$K_1[x, z, t - \varphi(x)] = - \frac{2c^2}{ET} \frac{G_{2k+1}(x, z) e_{2k+1}[t - \varphi(z)]}{[c - m(2k+1)^2 \omega^2]^2} \approx \approx - \frac{4c^2}{ET} \frac{G(x, z) \cos \omega [t - \varphi(z)]}{(c - m\omega^2)^2}.$$

Уравнение (35) теперь примет вид

$$y^0(x, t) = f(x, t) - \int_0^t K_1[x, z, t - \varphi(z)] J(z) dz - J(x) \chi[t - \varphi(x)]. \quad (57)$$

При помощи (56), (55) и равенства $\dot{\chi}(-0) = -1/(2M)$ [см. (37), (38)] находим:

$$\left. \begin{aligned} \Delta + J(x) \chi(0) + \int_0^l K_1 [x, z, \varphi(x) - \varphi(z)] J(z) dz = \\ = \mu C(x, \omega) \cos [\omega \varphi(x)]; \\ - \frac{1}{\omega} \left[J(x) R_0 + \int_0^l \dot{K}_1 [x, z, \varphi(x) - \varphi(z)] J(z) dz \right] = \\ = \mu C(x, \omega) \sin [\omega \varphi(x)], \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

где $R_0 = (1 - R) [2M(1 + R)]^{-1}$.

Таким образом здесь возникает операторный аналог трансцендентных уравнений для виброударной системы с одной ударной парой. Поскольку решение системы (58) весьма трудоемко и получить его точное представление, по-видимому, невозможно, необходимо произвести некоторые упрощения. Предположим, что влияние присоединенной части среды на несущую настолько незначительно, что им можно пренебречь. Тогда система (58) может быть разрешена. Взяв в нулевом приближении значения $J(x)$ и $\varphi(x)$, соответствующие устойчивому виброударному режиму, при достаточно малых значениях ядер K_1 и \dot{K}_1 искомые решения можно отыскать методом последовательных приближений при помощи простых, но громоздких квадратур. Получаемые решения, поэтому, трудно интерпретируемы и оказывается целесообразным ввести дальнейшие упрощения. Пусть $R = 1$. Пренебрежем влиянием несущей части среды на присоединенную. Тогда в выражении (58) $K_1 = \dot{K}_1$ и, кроме того, по предположению $R_0 = 0$. Решив второе уравнение, найдем, что $\omega \varphi(x) = 0$, либо $\omega \varphi(x) = \pi$.

Если бы в системе учитывалась диссипация, то заведомо неустойчивому режиму соответствовало бы меньшее значение импульса, а устойчивому – может отвечать только большее [3,4]. В соответствии с этим, при $C(x, \omega) > 0$ [см. (55)] будем считать $\omega \varphi(x) = \pi$, а при $C(x, \omega) < 0$ $\omega \varphi(x) = 0$. При малых μ значение импульса удара в каждой ударной паре будет близко к значению, получаемому в консервативном случае. Поэтому в нулевом приближении положим $J(x) = J_0$, $\omega \varphi(x) = \pi \eta [C(x, \omega)]$, где $\eta(y)$ - функция Хевисайда.

Теперь правая часть первого уравнения (58) принимает с учетом (55) вид $\mu |C(x, \omega)|$, а введенная выше функция $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению (58) тождественно (см. п. 4). Таким образом, в соответствии со схемой метода последовательных приближений для плотности импульса получим

$$\left. \begin{aligned} J(x) = J_0 \left\{ 1 + \frac{\mu}{\Delta} |C(x, \omega)| + \right. \\ \left. + \frac{J_0}{\Delta} \int_0^l K_1 [x, z, \pi (\eta [C(x, \omega)] - \eta [C(z, \omega)])] dz \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

Проинтегрировав данное выражение, найдем искомую плотность импульса в первом приближении. Число «переключений» фазы и, соответственно, число отрезков интегрирования, на которые разбивается промежуток $[0, l]$, зависит от числа нулей функции $C(x, \omega)$. Чем выше частота – тем больше переключений.

Рассмотрим важнейший случай колебаний по первой форме. При $\omega_0 < \pi/l$ на интервале $]0, l[$ $C(x, \omega) \neq 0$. Это соответствует синфазному движению: $\varphi(x) \equiv \pi$. Формула (59) в соответствии с (45) и (55) записывается так:

$$J(x) = J_0 \left[1 + \beta_1 \left| \frac{\sin \omega_0 x}{\sin \omega_0 l} \right| - \beta J_0 \left(1 - \frac{\cos \omega_0 (x - l/2)}{\cos \omega_0 l/2} \right) \right], \quad (60)$$

где $\beta_1 = \mu c / [\Delta(m\omega^2 - c)]$.

Воспользовавшись выражением (32), запишем искомое представление для $U(x, t)$:

$$U(x, t) = \mu \frac{\sin \omega_0 x}{\sin \omega_0 l} \cos \omega t + U^0(x, t) + \beta_1 \sum_{k=0}^{\infty} A_k(x) \cos(2k+1)\omega t, \quad (61)$$

где $U^0(x, t)$ задается выражением (43) ($\varphi = \pi$). Коэффициенты $A_k(x)$ вычисляются посредством элементарных квадратур при помощи (32) и (25):

$$A_1(x) = \frac{c^2 \sin^{-2} \omega_0 l}{ET(c - m\omega^2)\omega_0^2} \{l \sin \omega_0 x \cos \omega_0 l - x \cos \omega_0 x \sin \omega_0 l - \omega_0 [\sin \omega_0(x-l) \cos \omega_0 x (\sin \omega_0 x - 1)]\}$$

и так далее для высших тонов.

В формуле (61) при сделанных предположениях о малости μ , ω^{-1} и т.д. члены, входящие сомножителями к коэффициентам β_1 и β_1 малы и поэтому (61) можно записать так:

$$U(x, t) = \mu \frac{\sin \omega_0 x}{\sin \omega_0 l} \cos \omega t - \mu_0 J_0 \left(1 - \frac{\cos \omega_0(x-l/2)}{\cos 1/2(\omega_0 l)}\right) \cos \omega t + \beta B(x, t) + \beta_1 B_1(x, t), \quad (62)$$

где $\omega_0 \neq \pi l^{-1}$; $\mu_0 = 2c\omega_0^{-2} / [ET(m\omega^2 - c)]$.

При этом функции βB и $\beta_1 B_1$ содержат малые и высокочастотные составляющие. Поскольку $\mu^0 > 0$ и $\omega^0 < \pi/l$, два первых слагаемых в правой части (62) отвечают синфазным процессам и, следовательно, система «раскачивается». Таким образом, если выполняется неравенство [см. (18)]

$$\omega_0^2 = \omega^2 E^{-1} [\rho + cm(c - \omega^2 m)^{-1}] < \pi^2 l^{-2},$$

то при прохождении синусоидальной вибрации происходит усиление основного тона; удары в присоединенных ударных парах синфазны; в случае колебаний, близких к собственным ($\beta J_0 \gg \beta_1$), наибольшая интенсивность ударов наблюдается около середины несущего стержня; генерируется представительный спектр гармоник типа $\cos[(2k+1)\omega t]$.

Пусть $\pi/l < \omega_0 < 2\pi/l$, тогда при $0 < x < \pi/\omega_0$ функция $C(x, \omega) < 0$, а при $\pi/\omega_0 < x \leq l$ $C(x, \omega) > 0$. В порождающей системе первому интервалу соответствует фаза $\omega\varphi = 0$, а второму — $\omega\varphi = \pi$ (см. рис. 8,б).

В соответствии с (59) и (51)

$$J(x) = \begin{cases} J_0 \left[1 + \beta_1 \left| \frac{\sin \omega_0 x}{\sin \omega_0 l} \right| - \beta J_0 \left(1 + \frac{\sin \omega_0(x-l) + \sin \omega_0 x (1 + 2 \cos \omega_0 l)}{\sin \omega_0 l} \right) \right] & x \in [0, \pi/\omega_0]; \\ J_0 \left[1 + \beta_1 \left| \frac{\sin \omega_0 x}{\sin \omega_0 l} \right| - \beta J_0 \left(1 - \frac{\sin \omega_0 x + 3 \sin \omega_0(x-l)}{\sin \omega_0 l} \right) \right] & x \in]\pi/\omega_0, l]. \end{cases} \quad (63)$$

Если ω_0 близко к значению πl^{-1} , а $\beta_1 \ll \beta J_0$, то примерный вид функции $J(x)$ приводится на рисунке 10,а. С приближением ω_0 к значению $2\pi l^{-1}$ картина видоизменяется (рис. 10,б).

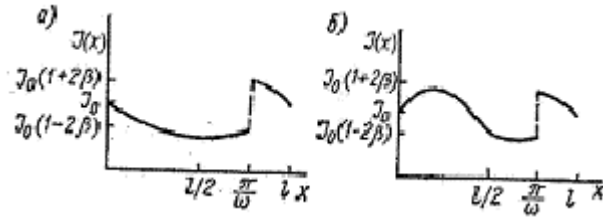


Рис. 10

На основании вышеизложенного можно построить представление для решения $U(x, t)$. Интересуясь лишь главной (наибольшей по величине) составляющей процесса, после ряда вычислений запишем:

$$U(x, t) = \begin{cases} \mu \frac{\sin \omega_0 x}{\sin \omega_0 l} \cos \omega t - \\ - \mu_0^{(1)} J_0 \left(1 + \frac{\sin \omega_0 (x-l) + \sin \omega_0 x (1 + 2 \cos \omega_0 l)}{\sin \omega_0 l} \right) \times \\ \times \cos \omega t + \beta B^{(1)}(x, t) + \beta_1 B_1^{(1)}(x, t), & x \in [0, \pi/\omega_0], \varphi = 0; \\ \mu \frac{\sin \omega_0 x}{\sin \omega_0 l} \cos \omega t - \mu_0^{(2)} J_0 \left(1 - \frac{\sin \omega_0 x + 3 \sin \omega_0 (x-l)}{\sin \omega_0 l} \right) \times \\ \times \cos \omega t + \beta B^{(2)}(x, t) + \beta_1 B_1^{(2)}(x, t), & x \in [\pi/\omega_0, l], \varphi = \pi. \end{cases} \quad (64)$$

Здесь функции $\beta B^{(1)}$, $\beta_1 B_1^{(1)}$, $\beta B^{(2)}$ и $\beta_1 B_1^{(2)}$, по-прежнему содержат малые и высокочастотные составляющие.

Проанализируем формулу (64). Ее первая строчка соответствует фазе $\varphi = 0$, $\cos \varphi = 1$ [ср. (43)] и $\mu_0^{(1)} = 2c\omega_0^{-2} / [ET(c - m\omega^2)] < 0$; соответственно $\mu_0^{(2)} = -\mu_0^{(1)} > 0$. Введем

$$\gamma_1(x) = 1 + \frac{\sin \omega_0 (x-l) + \sin \omega_0 x (1 + 2 \cos \omega_0 l)}{\sin \omega_0 l};$$

$$\gamma_2(x) = 1 - \frac{\sin \omega_0 x + 3 \sin \omega_0 (x-l)}{\sin \omega_0 l}.$$

Первая функция определена при $x \in [0, \pi/\omega_0]$; вторая – при $x \in [\pi/\omega_0, l]$. Функция $\gamma_2(x) \geq 0$. Функция $\gamma_1(x)$ вблизи собственной частоты $\omega_0 = \pi l^{-1}$ положительна (рис. 11,а), а затем становится знакопеременной (рис. 11,б). При этом «отрицательный» интервал стремится локализоваться вблизи значения $x = l/2$ и уменьшается. Поскольку при $x \in]0, \pi/\omega_0[$ $C(x, \omega) < 0$, а при $x \in]\pi/\omega_0, l[$ $C(x, \omega) > 0$, то на основании изложенного

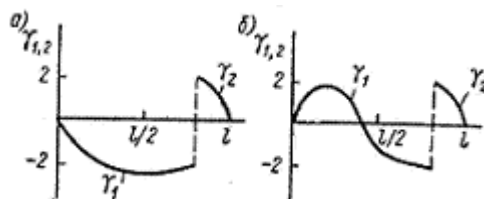


Рис. 11

можно сделать следующие качественные выводы. При прохождении первой резонансной частоты $\omega_0 = \pi l^{-1}$ в области $0 \leq x < \pi/\omega_0$ происходит заметное подавление основного тона колебаний (вибровод «запирается»), а на малом интервале $\pi/\omega_0 < x \leq l$ - основной тон усиливается. С физической точки зрения это означает, что действие присоединенной части среды оказывается эквивалентно действию ударного динамического гасителя колебаний. По мере увеличения частоты (при приближении ее к значению $\omega_0 = 2\pi l^{-1}$) «запертая» зона начинает деформироваться и уменьшаться в размерах. Она локализуется вблизи значений $x = l/2$. В отпертой зоне идет раскачка системы. После прохождения точки $x = \pi\omega_0^{-1}$ удары происходят антифазно по отношению к ударам, происходящим в зоне $x < \pi\omega_0^{-1}$. В случае колебаний, близких к свободным ($\beta J_0 \gg \beta_1$), при приближении к частоте $\omega_0 = 2\pi l^{-1}$ наибольшая интенсивность ударов будет наблюдаться в окрестностях точек $x = l/4$ и $x = 3l/4$. Форма колебаний стремится к «истинно» антифазной.

Генерируется также представительный спектр гармоник типа $\cos[(2k+1)\omega t]$. Такие гармоники могут наблюдаться в то время, когда подавляется основной тон колебаний. Это обстоятельство может, в частности, вызвать сложные резонансные явления в приемниках вибрации [3,4].

Дальнейший анализ ($\omega_0 > 2\pi l^{-1}$) аналогичен проведенному. В зарезонансной области зоны «запирания» увеличиваются. По мере приближения к третьему резонансу снова происходит их частичное «отпирание» и «раскачка» и т.д.

6. Для завершения анализа данной модели распределенного широкополосного ГМК осталось учесть диссипацию, т.е. обратиться к полной системе (58). До сих пор мы везде полагали $R = 1$ и учитывали влияние диссипации, так сказать, неявно: имея в виду, что при $R < 1$ устойчивым режимам могут соответствовать движения с большими импульсами, мы избавились от возможной двусмысленности решений. Чтобы не затруднять изложение чрезвычайно громоздкими вычислениями, прокомментируем качественно вопрос о том, к каким дополнительным эффектам может привести учет рассеяния энергии.

Присутствие трения приводит, прежде всего, к размыванию динамических эффектов, присущих системам без демпфирования. В данном случае оказываются невозможными скачкообразные «переключения» распределения фазы $\varphi(x)$, и соответственно, не будет терпеть разрыв плотность импульса $J(x)$. В этом случае не возникают чисто синфазные или антифазные режимы, а лишь моменты ударов «сдвигаются» друг относительно друга на разные временные промежутки. Вследствие этого эффекты «запирания» и «раскачки» вибровода выражены слабо.

Так как при прохождении вибрации интенсивность колебаний в различных точках несущего стержня различна, а в некоторых мала, то, очевидно, следует ожидать, что в некоторых областях, расположенных вдоль стержня, колебания с соударениями будут срываться. Это означает, что появятся локализации виброударных режимов, определяемые не только собственными свойствами вибровода, но и структурой диссипативных сил. При этом, в отличие от рассмотренных случаев, когда режимы движения сопровождалась ударами во всех точках и только вблизи некоторых были особенно интенсивны, теперь в представительных областях удары могут отсутствовать и, соответственно, локализоваться. Две указанные особенности и характеризуют роль диссипации в первую очередь.

Методы, описанные выше, позволяют проводить анализ и в других случаях, например, при рассмотрении системы с одним свободным концом [см. (9)]. Описанные выше качественные выводы в принципе остаются в силе. Для получения количественных оценок надо воспользоваться другими выражениями для функции $G(x, z)$ [7] и решениями линейной задачи $U_1(x, t)$. В то время, как при закрепленном конце формы колебаний описываются при помощи «синусоид», в случае свободного конца появятся «косинусоиды».

То же самое можно сказать и о других типах присоединенной части среды (рис. 4). Основное отличие этих случаев – в структуре ПФГ, определяющей импульс, конкретный вид

которого практически не важен. При рассмотрении несимметричных соударений в системе генерируются как нечетные, так и четные высокочастотные составляющие. В этом случае необходимо также различать условия $\Delta \geq 0$ и $\Delta < 0$.

Требование $\omega \gg \Omega$ и все вытекающие из него следствия или приводящие к нему предположения существенны только для применяемой здесь методики расчетов и не влияют на исходные соотношения. Если линейные резонансы несущей и присоединенной частей не разнесены, то проведенные построения нуждаются в существенной корректировке. В зоне линейного резонанса присоединенной части «вялое». Там весьма вероятны «дребезги» [3,4] и иные сложные режимы движения.

Из формулы (18) видно, что здесь $\text{Im } \omega_0 \neq 0$ и, значит, будет проявляться эффект «линейного динамического гашения колебаний» [6].

В рассматриваемой системе возможны также и другие периодические режимы движения, например, субгармонические. Их описание при помощи надлежащего построения ПФГ не вызывает принципиальных затруднений.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (Проект № 10-08-00500-а).

Литература

1. Мандельштам Л.И. Лекции по теории колебаний. М.: Наука, 1972. 470 с.
2. Пальмов В.А. Колебания упруго-пластических тел. М.: Наука, 1976, 328 с.
3. Бабицкий В.И., Крупенин В.Л. Колебания в сильно нелинейных системах.-М., Наука, 1985. – 384 с.
4. Babitsky V.I., Krupenin V.L. Vibration of Strongly Nonlinear Discontinuous Systems.- Berlin. Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 2001. –404 p.p.
5. Широкополосные виброударные генераторы механических колебаний// Крупенин В.Л., Веприк А.М. и др. Л.: Машиностроение, 1987. 76 с.
6. Крупенин В. Л. Модель сильно нелинейной вибропроводящей среды с распределенным ударным элементом// ДАН, 1995, Т. 343, №6, с. 759–763.
7. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971. 576 с.