

## О ПРОХОЖДЕНИИ СИЛЬНО НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН ЧЕРЕЗ ЭЛЕМЕНТЫ МАШИННЫХ КОНСТРУКЦИЙ, МОДЕЛИРУЕМЫХ ПОСРЕДСТВОМ СПЛОШНЫХ СРЕД СЛОЖНОЙ СТРУКТУРЫ (Часть 1)

© Крупенин В.Л.

Учреждение Российской академии наук институт машиноведения  
им. А.А. Благодравова РАН  
[krupenin@online.ru](mailto:krupenin@online.ru)

**Аннотация.** Дано подробное описание процесса прохождения резонансного виброударного волнового процесса через машинную конструкцию, моделируемую сильно нелинейной сплошной средой сложной структуры. Такие модели содержат несущий элемент и присоединенное оборудование — прямой продольно колеблющийся стержень, в каждой точке которого амортизированы присоединенные динамические системы, содержащие ударные пары различной природы.

1. Рассмотрим дискретную систему регулярной структуры (рис.1), состоящую из линейной цепочки [ 1 ] с параметрами  $(m_0', k')$  и упруго присоединенных к ней осцилляторов с параметрами  $(m', c')$ . Внутри осцилляторов располагаются полости, в которых симметрично установлены тела массы  $m_1'$  (рис. 2). Линейная цепочка — суть дискретная модель одномерной упругой среды простой структуры. Присоединение осцилляторов обращает структуру среды в сложную (частный случай модели, описанной в [ 2 ]), а наличие зазоров вносит сильную нелинейность.

Обозначив координаты точечных тел, образующих цепочку,  $U_k$  ( $k = 0, 1, \dots, n, n + 1$ ) (левый конец системы закреплён, правый совершает синусоидальные колебания), запишем

$$m_0' \ddot{U}_k + k' (2U_{k-1} - U_{k+1} - U) + c' (U_k - y_k) = 0; \quad (1)$$

$$U_0 = 0, \quad U_{n+1} = \mu \cos \omega t, \quad (2)$$

где  $\mu$  и  $\omega$  - амплитуда и частота колебаний правого конца цепочки;  $y_k$  - координаты присоединенных осцилляторов.

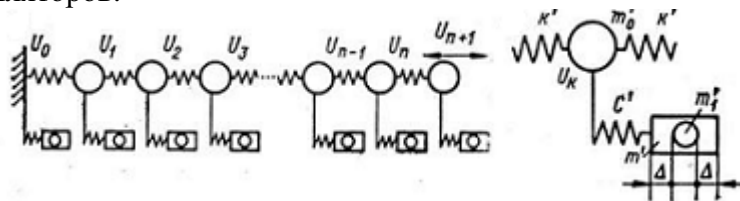


Рис. 1

Рис. 2

Для осцилляторов имеем

$$m' \ddot{y}_k + c' (y_k - U_k) - \Phi' (y_k^0) = 0. \quad (3)$$

Здесь  $\Phi'$  - ударная сила;  $y_k^0$  - относительная координата:  $y_k^0 = y_{1k} - y_k$ , где  $y_{1k}$  - абсолютная координата тела, располагающегося в полости, уравнение движения которого

$$m_1' (\ddot{y}_k + \ddot{y}_k^0) + \Phi' (y_k^0) = 0. \quad (4)$$

Предположим, что симметричная ударная сила  $\Phi'$  отвечает гипотезе Ньютона, т.е. для моментов удара  $\Phi'_k$  и ударных импульсов  $J'_k$  при строгой очередности соударений имеем:

$$y_k^0(\Phi'_k) = \Delta; \quad J'_k = M'(1 + R) \dot{y}_k^0(\Phi'_k - 0) > 0, \quad (5)$$

где  $M'$  - приведенная масса,  $M' = m'm'_1/(m' + m'_1)$ ;  $|y_k^0| \leq \Delta$ . Импульсы удара считаются положительными, когда удар происходит о правую границу полости.

Уравнения (1), (3), (4) и соотношения (2), (5) описывают дискретную модель сильно нелинейной одномерной вибропроводящей среды сложной структуры, «состоящей» из несущей и присоединенной частей. Поскольку в процессе передачи вибрации участвует большое число тел, перейдем к ее континуальному аналогу. При этом присутствие ударных пар будет учитываться плотностью силы удара, т.е. будет считаться, что удар распределен по всем сечениям континуального аналога линейной цепочки – стержня [5,6].

Пусть  $a^0$  - расстояние между соседними частицами цепочки в равновесном состоянии. Тогда при малых  $a^0$ , заменяя индекс  $k$  на текущую переменную  $x$  и действуя аналогично, запишем:

$$\rho U_{tt} - EU_{xx} + c(U - y) = 0; \quad (6)$$

$$my_{tt} + c(y - U) - \Phi(y^0) = 0; \quad (7)$$

$$m_1(y_{tt} + y^{0}_{tt}) + \Phi(y^0) = 0. \quad (8)$$

где  $\rho$  и  $E$  - линейная плотность и модуль Юнга несущей части среды, кг/м<sup>2</sup> и Н/м<sup>2</sup>;  $U, y, y^0$  - перемещения структурных элементов среды с координатой  $x$ ,  $U = U(x, t)$ ,  $y = y(x, t)$ ,  $y^0 = y^0(x, t)$  [ $U(x, t)$  описывает смещение в несущей части среды,  $y(x, t)$  и  $y^0(x, t)$  - в присоединенном оборудовании];  $\Phi(y^0)$  - плотность силы удара; индексация по независимым переменным обозначает частное дифференцирование;  $m$  и  $m_1$  - линейные плотности присоединенной части, кг/м;  $c$  - распределенная статическая жесткость подвеса, кг/с<sup>2</sup> м:  $c/\rho = c'/m_0 = \Omega^2 [1/c^2]$ . Здесь  $\Omega$  - парциальная частота свободных колебаний присоединенного осциллятора.

Приведенные соотношения отражают сложность структуры рассматриваемой сплошной среды. Генерация широкого спектра осуществляется за счет распределенной силы удара.

Граничные условия принимают вид

$$U(0, t); \quad U(l, t) = \mu \cos \omega t, \quad (9)$$

где  $l$  - длина вибровода,  $l = (n + 1)a^0$ . Для многих случаев вместо (9) встречаются условия:

$$U_x(0, t) = 0; \quad EU_x(l, t) = \mu \cos \omega t. \quad (10)$$

Соотношения (5) переходят в следующие:

$$y^0[x, \Phi(x)] = \Delta; \quad J(x) = M(1 + R) \dot{y}^0[x, \Phi(x) - 0] > 0, \quad (11)$$

где  $\Phi(x)$  - распределение моментов удара (фазы);  $J(x)$  - плотность ударного импульса, кг/с;  $M$  - погонная приведенная масса,  $M = mm_1/(m + m_1)$ , кг/м.

Таким образом, в качестве вибровода теперь рассматривается среда, состоящая из стержня, по которому распространяются продольные волны (рис. 3,а), и в каждой его точке помещена упруго с ним связанная ударная пара (рис. 3,б). Следует заметить, что при такой

постановке может оказаться необходимым задаться распределениями  $\Delta(x)$  и  $R(x)$ , а также рассмотреть неравномерные распределения масс. Такие задачи формулируются и рассматриваются аналогично.

Для записи определяющих соотношений для присоединенной части среды существуют также другие модели ударных пар (рис. 4), в которых присоединенной части среды соответствуют либо несимметричные ударные пары (рис. 4,а), либо симметричные (рис. 4,б) (в последнем случае при  $c'_1 \rightarrow 0$  получаем модель рис. 2).

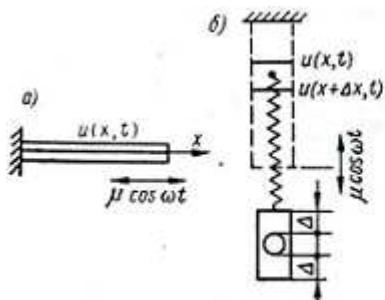


Рис.3

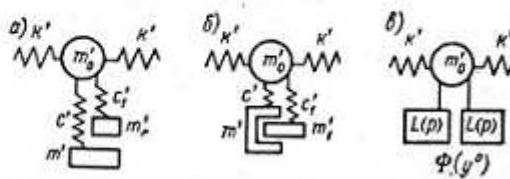


Рис.4

В континуальном приближении граничные условия (9), (10), а также условия удара (11) сохраняют ту же форму (с учетом симметрии и несимметрии задачи). Относительная координата  $y^0 = y - y_1$ , где  $y_1$  - координата второго присоединенного тела. В этом случае

$$\rho U_{tt} - EU_{xx} + c(U - y) + c_1(U - y_1) = 0; \quad (12)$$

$$my_{tt} + c(y - U) + \Phi(y^0) = 0; \quad (13)$$

$$m_1 y_{1tt} + c(y_1 - U) - \Phi(y^0) = 0. \quad (14)$$

Разница между системами рис. 4,а и 4,б в свойствах симметрии возможных режимов, определяемых видом силовой функции  $\Phi(y^0)$ .

Сказанное позволяет обобщить задачу и рассмотреть сложные модели ударных пар (рис.4,в), образованных системами с произвольными операторами динамических податливостей  $L_1(p)$  и  $L_2(p)$ . При усложнении их структуры, однако, задача становится трудноанализируемой.

Аналогично можно построить определяющие модели и для трехмерной несущей среды [ 6 ], а также рассмотреть другие частные случаи: несущая среда-балка, мембрана, пластина.

2. Для того чтобы воспользоваться частотно-временными методами найдем распределенные периодические функции Грина для решения вспомогательной линейной задачи вида:

$$\left. \begin{aligned} \rho U_{tt} - EU_{xx} + c(U - y) &= 0; \\ my_{tt} + c(y - U) &= P(x, t); \\ U(0, t) = 0, \quad U(l, t) &= \mu \cos \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

где  $P(x, t)$  - внешняя  $T$  - периодическая сила,  $T = 2\pi\omega^{-1}$ . (Когда это не будет приводить к недоразумениям, слово «сила» мы будем отождествлять со словами «распределение силы»).

Пусть имеют место разложения:

$$\begin{aligned} P(x, t) &= P_k(x) e_k(t); \\ U(x, t) &= U_k(x) e_k(t); \\ y(x, t) &= y_k(x) e_k(t), \end{aligned}$$

причем, как и ранее, по повторяющимся индексам здесь ведется суммирование от  $-\infty$  до  $\infty$ .

Для искомым  $T$ -периодических режимов запишем:

$$U(x, t) = U_1(x, t) + U_2(x, t); \quad y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t), \quad (16)$$

где  $U_2$  и  $y_2$  - движения под действием силы  $P(x, t)$ ;  $U_1$  и  $y_1$  - движения, вызванные периодическим граничным условием; выражения для них хорошо известны:

$$U_1 = \mu \frac{\sin \omega_0 x}{\sin \omega_0 l} \cos \omega t; \quad y_1 = \frac{c}{c - m\omega^2} U_1. \quad (17)$$

При этом квадрат величины

$$\omega_0^2 = \frac{\omega^2}{E} \left[ \rho + \frac{cm}{c - \omega^2 m} \right] \quad (18)$$

будет вещественным числом при  $\rho > \frac{cm}{\omega^2 m - c} = \frac{c}{\omega^2 - \Omega^2}$ .

В дальнейшем наибольший интерес представляет случай

$$\omega \gg \Omega, \quad (19)$$

так как присоединенное оборудование на практике зачастую оказывается низкочастотным. Будем поэтому считать, что  $\text{Im } \omega_0 = 0$ . Комплексность частоты приводит к важным эффектам, описанным в [ 2 ]. В этом случае виброударные процессы нерезонансны и малоинтенсивны [ 3-5 ].

Для определения  $U_2$  и  $y_2$  положим  $\mu = 0$ . Подставив ряды Фурье для  $P_1$ ,  $U_2$  и  $y_2$  в (15), после преобразований найдем:

$$y_{k2}(x) = \frac{P_k(x)}{c - mk^2\omega^2} + \frac{cU_{k2}(x)}{c - mk^2\omega^2}; \quad (20)$$

$$U''_{k2}(x) + k^2\omega_0^2 U_{k2} = - \frac{cP_k(x)}{E(c - mk^2\omega^2)}; \quad \omega_0^2 = \frac{\omega^2}{E} \left[ \rho + \frac{cm}{c - \omega^2 mk^2} \right], \quad (21)$$

причем, так как  $\mu = 0$ ,  $U_{k2}(0) = U_{k2}(l) = 0$ . Решение данного уравнения можно найти в справочнике [ 7 ].

Рассмотрим функцию

$$G_k(x, z) = \begin{cases} \frac{\sin k\omega_0(z-l) \sin k\omega_0 x}{k\omega_0 \sin k\omega_0 l}, & 0 \leq x \leq z; \\ \frac{\sin k\omega_0 z \sin k\omega_0(x-l)}{k\omega_0 \sin k\omega_0 l}, & z \leq x \leq l. \end{cases} \quad (22)$$

Решение уравнения (21) записывается так [ 1,7 ]:

$$U_k(x) = - \frac{c}{E(c - k^2\omega^2 m)} \int_0^l G_k(x, z) P_k(z) dz.$$

Из (20) находим, что

$$y_{k2}(x) = \frac{P_k(x)}{c - mk^2\omega^2} - \frac{c^2}{E(c - k^2\omega^2 m)} \int_0^l G_k(x, z) P_k(z) dz.$$

Следовательно, возвращаясь к исходному разложению в ряд Фурье, можно записать

$$U_2(x, t) = -\frac{c}{ET} \int_0^l \int_0^T \frac{G_k(x, z)}{c - mk^2\omega^2} e_k(t-s) P(z, s) dz ds, \quad (23)$$

где при  $\hat{f}(x, t) = T^{-1} f_k(x) e_k(t)$

$$\hat{f}_k(x) = \int_0^T \hat{f}(x, s) e_k(-s) ds.$$

Аналогично находим

$$y_2(x, t) = \int_0^T \frac{e_k(t-s)}{T(c - mk^2\omega^2)} P(x, s) ds - \int_0^l \int_0^T \frac{c^2}{ET(c - k^2\omega^2 m)^2} G_k(x, z) e_k(t-s) P(z, s) dz ds. \quad (24)$$

Функция

$$V(x, z, t) = -\frac{c}{ET} \frac{G_k(x, t) e_k(t)}{c - mk^2\omega^2} = \begin{cases} -\frac{c}{ET} \frac{\sin k\omega_{0k}(z-l) \sin k\omega_{0k}x}{(c - mk^2\omega^2) k\omega_{0k} \sin \omega_{0k}l} e_k(t), & 0 \leq x \leq z; \\ -\frac{c}{ET} \frac{\sin k\omega_{0k}z \sin k\omega_{0k}(x-l)}{(c - mk^2\omega^2) k\omega_{0k} \sin \omega_{0k}l} e_k(t), & z \leq x \leq l \end{cases}$$

и является распределенной периодической функцией Грина (ПФГ) [ 3,4 ], с помощью которой искомое решение записывается в виде, аналогичном [ 3,5 ]:

$$U_2(x, t) = \int_0^l \int_0^T V(x, z, t-s) P(z, s) dz ds. \quad (25)$$

Из формулы (24) видно, что распределенная ПФГ для решения  $y_2(x, t)$  состоит как бы из двух частей:

$$y_2(x, t) = \int_0^T \chi_1(t-s) P(x, s) ds - \int_0^l \int_0^T Y(x, z, t-s) P(z, s) dz ds, \quad (26)$$

где  $\chi_1(t-s)$  - ПФГ, соответствующая оператору динамической податливости  $(mp^2 + c)^{-1}$  («сосредоточенная часть»), а  $Y(x, z, t-s)$  - «распределенная часть». При помощи (24) и (22) находим:

$$Y(x, z, t) = \begin{cases} -\frac{c^2}{ET} \frac{\sin k\omega_{0k}(z-l) \sin k\omega_{0k}x}{k\omega_{0k}(c-k^2\omega^2m)^2 \sin k\omega_{0k}l} e_k(t), & 0 \leq x \leq z; \\ -\frac{c^2}{ET} \frac{\sin k\omega_{0k}z \sin k\omega_{0k}(x-l)}{k\omega_{0k}(c-k^2\omega^2m)^2 \sin k\omega_{0k}l} e_k(t), & z \leq x \leq l. \end{cases} \quad (27)$$

Первый член в правой части (26) описывает реакцию системы на силу, действующую на нее непосредственно, второй член – реакцию на ту же силу со стороны несущей части среды («эхо»).

Итак, искомое представление для  $T$ -периодического решения вспомогательной задачи (15) найдено. При рассмотрении симметричных  $T$ -периодических режимов  $U(x, t + T/2) = -U(x, t)$ ;  $y(x, t + T/2) = -y(x, t)$  во всех приведенных здесь соотношениях надо заменить  $T$  на  $1/2T$  и в рядах Фурье оставить лишь нечетные гармоники.

3. Перепишем уравнение (7), (8) в операторной форме:

$$y = \frac{cU}{mp^2 + c} + \frac{\Phi(y^0)}{mp^2 + c}; \quad y = -y^0 - \frac{\Phi(y^0)}{m_1p^2} \quad (28)$$

и исключим  $y$ , тогда

$$y^0 = -\frac{cU}{mp^2 + c} - \left[ \frac{1}{mp^2 + c} + \frac{1}{m_1p^2} \right] \Phi(y^0). \quad (29)$$

Пусть операторам  $1/(mp^2 + c)$ ,  $1/(m_1p^2)$ ,  $1/(mp^2 + c) + 1/(m_1p^2)$  соответствуют симметричные ПФГ  $\chi_1$ ,  $\chi_2$ ,  $\chi = \chi_1 + \chi_2$ . Тогда для симметричных режимов из (29) найдем:

$$y^0(x, t) = -c \int_0^{T/2} \chi_1(t-s) U(x, s) ds - \int_0^{T/2} \chi(t-s) \Phi[y^0(x, s)] ds. \quad (30)$$

Далее, используя (28), запишем

$$y(x, t) = -y^0(x, t) - \int_0^{T/2} \chi_1(t-s) \Phi[y^0(x, s)] ds. \quad (31)$$

С другой стороны из (16) и (25) следует, что

$$U(x, t) = U_1(x, t) + \int_0^l \int_0^{T/2} V(x, z, t-s) \Phi[y^0(z, s)] dz ds. \quad (32)$$

Подставив это выражение в (30), получим

$$\begin{aligned}
y^0(x, t) = & -c \int_0^{T/2} \chi_1(t-s) U_1(x, s) ds - \\
& -c \int_0^{T/2} \int_0^{T/2} \int_0^{T/2} \chi_1(t-s) V(x, z, s-\tau) \Phi[y^0(z, \tau)] dz ds d\tau - \\
& - \int_0^{T/2} \chi(t-s) \Phi[y^0(x, s)] ds. \quad (33)
\end{aligned}$$

Интегральные уравнения (31)-(33) и описывают симметричные  $T$  - периодические режимы в рассматриваемой системе. В соответствии с (17) запишем решение нашей задачи при безударном режиме:

$$\left. \begin{aligned}
u_1(x, t) = & \mu \frac{\sin \omega_0 x}{\sin \omega_0 t} \cos \omega t; \\
-c \int_0^{T/2} \chi_1(t-s) U_1(x, s) ds = & -\frac{c\mu}{c-m\omega^2} \frac{\sin \omega_0 x}{\sin \omega_0 t} \cos \omega t \equiv f(x, t).
\end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Далее из уравнения (33) находим представление для режима  $y^0(x, t)$ , зависящего от двух неизвестных функций  $J(x)$  и  $\varphi(x)$ , для чего представляем нелинейность  $\Phi$  в виде обобщенной функции, описывающей удары и зависящей от распределения фазы  $\varphi(x)$  и плотности импульса  $J(x)$ . Затем при помощи условий удара (11) определяем функции  $J(x)$  и  $\varphi(x)$ , для чего придется решить систему двух интегральных уравнений существенно более простых, чем (31)-(33). После полного определения вида функции  $y^0(x, t)$  при помощи квадратур находим поля перемещений  $\bar{U}(x, t)$ ,  $y(x, t)$ . Реализация этой программы связана с существенными трудностями. Поэтому в дальнейшем будут использованы некоторые приближенные представления.

*Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (Проект № 10-08-00500а).*

*(Продолжение в последующих частях).*

### Литература

1. Мандельштам Л.И. Лекции по теории колебаний. М.: Наука, 1972. 470 с.
2. Пальмов В.А. Колебания упруго-пластических тел. М.: Наука, 1976, 328 с.
3. Бабицкий В.И., Крупенин В.Л. Колебания в сильно нелинейных системах.-М., Наука, 1985. – 384 с.
4. Babitsky V.I., Krupenin V.L. Vibration of Strongly Nonlinear Discontinuous Systems.- Berlin. Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 2001. –404 p.p.
5. Широкополосные виброударные генераторы механических колебаний// Крупенин В.Л., Веприк А.М. и др. Л.: Машиностроение, 1987. 76 с.
6. Крупенин В. Л. Модель сильно нелинейной вибропроводящей среды с распределенным ударным элементом// ДАН, 1995, Т. 343, №6, с. 759–763.
7. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971. 576 с.