Системный анализ как метод решения сложных логических проблем

Часть I. Апории Зенона

проф. Бескровный И. М.
Российский государственный медицинский институт

Показано, что строгое выполнение известных процедур системного анализа существенно повышает эффективность анализа даже таких сложных логических проблем, которые на протяжении столетий привлекали внимание многих выдающихся мыслителей, но так и не получили должного разрешения. Рассмотрение ведётся на примере анализа ряда неразрешённых парадоксов древности (апории Зенона и др.). Этот выбор обусловлен тем, что, во-первых, анализ этих парадоксов обладает большой наглядностью, а, во-вторых, практически во всех случаях трудности в их разрешении связаны не столько со сложностью рассматриваемых проблем, сколько с недостаточно внимательным анализом сущности их формулировки.

Цель настоящей статьи не заключается в опровержении этих древних парадоксов. В известной мере они неопровержимы, поскольку "по правилам хорошего тона" все рассуждения должны проводиться с использованием только тех методов, которые были известны современникам Зенона. То есть, необходимо оставаться в рамках той арифметики, которая была известна в ту пору. Иэто существенное ограничение делает эти древние парадоксы неопровержимыми. [3] Задача поставлена скромнее и, в то же время, шире. И истинной целью статьи является демонстрация возможностей системного анализа при решении не стандартных логических проблем и пока того, каким образом формальное следование простым по форме, но крайне важным по существу, процедурам системного анализа может оказаться полезным в подобной ситуации.

Методология системного анализа состоит из совокупности формализованных приемов, позволяющих за ограниченное время выделить такое конечное множество связей, влияющих на сущность рассматриваемой проблемы, которое с необходимостью определяет роль и значение каждого существенного элемента и отношения между ними. Именно, методология выделения существенных связей на высшем уровне обобщения составляет сущность общей методологии системного анализа, как такового, или его инструментарий.

Говоря о совокупности методологических приемов системного анализа, в настоящее время достаточно трудно дать исчерпывающий перечень методов, имеющих общесистемную применимость, отделив их при этом от методов, применимость которых ограничивается определенным классом проблем и систем. Поэтому для начала рассмотрим только один методологический прием, заведомо полезный при анализе проблем любого класса. Этим приёмом, использование которого следует считать обязательным, является соблюдение определенной последовательности этапов системного анализа [1], которая представлена на рис. 1.

Рис.1 **Последовательность этапов системного анализа**

Необходимый первый этап системного анализа - выявление проблемной ситуации. На этом этапе ищут ответа на вопрос "*Что случилось*?" Почему надо создавать (конструировать, совершенствовать) новую систему? или решать какую-то задачу? Ответ должен быть сформулирован в четких, конструктивных терминах, позволяющих наметить пути ликвидации проблемной ситуации.

Второй этап - формирование набора целей, достижение которых обеспечит ликвидацию (компенсацию последствий) или, хотя бы, снижение остроты возникшей (или выявленной) проблемной ситуации. Набор целей в своей совокупности должен четко определять состояние системы, достижение которого ликвидирует проблемную ситуацию.

На третьем этапе осуществляется формирование набора функции или действий, которые надо осуществить (осуществлять) для достижения сформулированных на втором этапе целей. То есть формируется ответ на вопрос: “*Что надо делать (сделать) для того, чтобы намеченные цели были достигнуты?*”

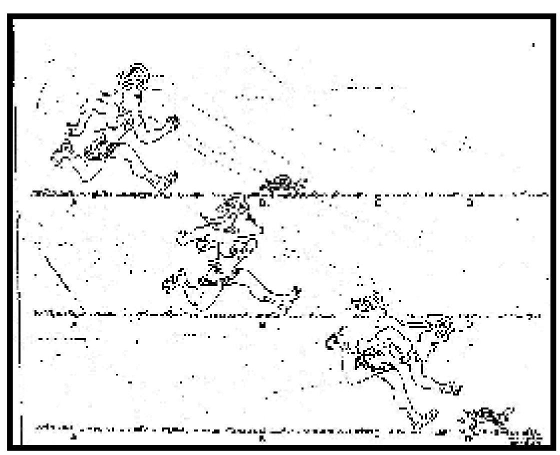
Четвертый этап - проектирование системы (или комплекса средств). Подбирается элементная база системы, разрабатывается ее структура, на основе которой возможна реализация набора функции, сформированного на третьем этапе.

И, наконец, на пятом этапе осуществляется проверка реализуемости спроектированной системы (модели) при заданных внешних условиях. Проверка осуществляется в лабораторных условиях, с помощью методов имитационного моделирования и, в конечном итоге, на натурных испытаниях. Итогом проверки является ответ на вопрос: “Так ли хороша система (модель) на практике, как она была задумана в проекте и в какой мере ликвидирована проблемная ситуация?”

При отрицательном ответе на этот вопрос, показанные на рис.1 этапы системного анализа реализуются в обратном порядке. А именно, проверяется адекватность разработанной структуры сформированному набору функций, затем - адекватность сформированных функции заданному набору целей и т. д. В конечном итоге, вновь анализируется проблемная ситуация и движение по этапам вновь идет в прямом порядке. Такой процесс должен циклически повторяться до тех пор, пока на пятом этапе не будет достигнут положительный результат.

Теперь посмотрим, в чём может помочь вдумчивое применение описанной последовательности этапов СА. Для примера проведём анализ одной из наиболее известных апорий Зенона об Ахиллесе и Черепахе, которая в вольном изложении звучит так. Ахиллес никогда не сможет догнать Черепаху, если в момент старта та находится впереди него на некотором расстоянии (назовём это расстояние *форой*) по следующей причине. Когда Ахиллес пройдёт дистанцию, равную *форе*, Черепаха продвинется на некоторое расстояние (назовём его *разрыв*). Теперь, когда Ахиллес пройдёт дистанцию, равную *разрыву*, Черепаха вновь продвинется и опять между ними останется разрыв и т. д. до бесконечности. Получается, по модели, предложенной Зеноном, что сколько бы раз ни проходил Ахиллес промежуток, отделявший его от Черепахи на очередном этапе, между ним и Черепахой будет оставаться разрыв. ***Поэтому***, утверждал Зенон, Ахиллес никогда не догонит Черепаху.

Читателю, не слышавшему об этом парадоксе (хотя таких, вероятно, не так уж много) может показаться странным внимание автора к такой «не серьёзной» проблеме. Но, дело в том, что анализу этого парадокса посвящено большое количество работ. Ему уделяли внимание такие выдающиеся мыслители как Аристотель, Кант, Бертран Рассел, Ленин и много-много других. Можно было бы привести предлинный список литературы по этому вопросу, но ограничимся только одной ссылкой на интернет ресурс Руслана Хазарзара, где в весьма обширной публикации [2] ссылок этих можно найти предостаточное количество. Автор не может отказать себе удовольствия привести цитату из этого любопытного документа.



Цитата 1[Ц.1]

- "…апории Зенона Элейского — идеальный тест на самостоятельность мышления. Причем это — тот самый тест, на котором могут "завалиться" люди с самыми почетными званиями. Мало того, его, как правило, не проходят именно обладатели технических дипломов и степеней, называя Зенона "софистом". Ибо "технари" привыкли оперировать четкими определениями, установленной формализацией и т. д., а апории Зенона — это тот самый гносеологический кошмар, который зрит в самый корень и ставит под сомнение любую формализацию и любые термины. Они требуют мышления, не отягощенного догмами, т. е. самостоятельного мышления. Они показывают разницу между знаниями и разумом, начитанностью и умом.

Апории Зенона не нашли удовлетворительного разрешения и поныне. Причем современные издания, в отличие от советских, с этим соглашаются: "Апории теперь признаются подлинными парадоксами, связанными, в частности, с описанием движения". Как вы увидите в дальнейшем, все т. н. "разрешения" апорий представляют собой логическую ошибку ignorantia elenchi, состоящую в том, что доказывается не тот тезис, который требуется доказать.

Разумеется, мало сказать, что апории неразрешимы. Мы рассмотрим, какие глобальные вопросы выросли из незамысловатых апорий. Оказалось, что ни математика, ни физика, ни другая наука не могут обезвредить элейских аргументов. Наоборот, сами апории и вытекающие из них вопросы постоянно требуют пересмотра уже устоявшейся формализации. И для разрешения апорий необходимо разрешить основополагающие вопросы: что́ собой представляет мироздание — бытие или становление? что́ такое бесконечность? дискретен мир или непрерывен? как разрешить проблемы пространства и времени? и т. д."

Эта обширная цитата приведена, во-первых, потому, что содержит несколько весьма любопытных высказываний и фраз, а, во-вторых, с той целью, чтобы в дальнейшем изложении можно было приводить отдельные отрывки из нее, выделяемые курсивом, без дополнительной ссылки на источник.

Попробуем подойти решению проблемы с позиций системного анализа, не убоявшись того, что нас ждёт "*тот самый гносеологический кошмар, который зрит в самый корень*". (Именно так: "*кошмар…. зрит*". Но, не будем придираться к мелочам. Видимо, так пишут и мыслят философы, а не "*технари*"…которые… *привыкли оперировать четкими определениями, установленной формализацией и т. д*" – Вот, ведь зануды!)

Рассмотрение начнем, как полагается, с первого этапа СА - анализа проблемной ситуации, которая заключается в следующем. Есть логичное по форме изложение процесса безнадёжной погони Ахиллеса за Черепахой и есть объективное знание того, что на практике Ахиллес эту Черепаху быстро догонит. Таким образом, из, казалось бы, безупречного рассуждения следует абсурдный вывод. В этом и состоит парадокс. А проблема опровержения парадокса состоит не в поисках доказательства того, что Ахиллес на деле догонит зловредную Черепаху. В этом и сам Зенон не сомневался. И во многих публикациях это успешно доказывалось. На самом деле, проблема состоит в том, что бы найти логическую погрешность в его рассуждениях, хотя, как утверждается в [2] – "…они безупречны".

Теперь на втором этапе СА – формулирование целей определяем, что необходимо найти доказательства того, что в модели Зенона имеется изъян. То есть надо доказать, что либо приводимая система доказательств не верна, либо эти доказательства логичны, но доказывают не ту цель, которая декларировалась. Заявленная таким образом цель на третьем этапе СА логично определяет структуру наших действий – детальный анализ предложенного Зеноном описания процесса движения Ахиллеса.

Вот с этого описания и начнем. Точное текстовое содержание парадокса Зенона нам неизвестно, различные источники излагают его по-разному, но суть при этом остается неизменной. Возьмем для рассмотрения изложение, приведенное в [2]:

Цитата 2 [Ц.2]

- *"…А сейчас давайте примем следующие условия. Пусть Ахиллеса отделяет от финиша расстояние 1, а черепаху — 1/2. Двигаться Ахиллес и черепаха начинают одновременно. Пусть для определенности Ахиллес бежит в 2 раза быстрее черепахи. Тогда, пробежав расстояние 1/2, Ахиллес обнаружит, что черепаха успела за то же время преодолеть отрезок 1/4 и по-прежнему находится впереди героя. И т. д…."*

На втором этапе при анализе структуры функций возникает вопрос. А почему мы следим за Ахиллесом, а не за Черепахой? Черепаха впереди, и если Ахиллес её достигнет, то окажется рядом с ней, а этого события мы не пропустим. А прослеживать её перемещение будем в стиле Зенона поэтапно. Таким образом, меняем предложенную Зеноном структуру функций и определяем её в следующем виде:

> Пусть Черепаха, начав движение, пройдет отрезок 1/2. А Ахиллес, который движется в два раза быстрее, за это время за это время пройдет отрезок, равный 1 и окажется на финише одновременно с Черепахой. Finita la Commedia!

Впрочем, стоп. Торжествовать рано. Здесь наступает пятый этап системного анализа – проверка реализуемости нашей модели, описанной выше. То есть, проверка того, отвечает ли она на все поставленные вопросы. Оказывается – увы! Да, доказано, что Ахиллес Черепаху догоняет. Но нет ответа на вопрос, а почему из модели Зенона следует обратное?

В соответствии с правилами СА движемся по основным этапам в обратном порядке и от пятого этапа переходим к четвертому этапу – проверяем структуру предложенной нами модели. Здесь, вроде всё в порядке. Имеется два объекта, движущихся с разными скоростями. Более медленный объект находится впереди более быстрого на расстоянии форы.

На третьем этапе структура функций задана логично. Медленный участник пассивно уползает. И за его передвижением ведется наблюдение. Быстрый участник реализует предписанное ему действие – ликвидирует имеющийся разрыв в один прием. Тем самым, обеспечивается достижение цели, сформулированной на втором этапе – догнать беглянку, что он и делает в один приём. Но, перейдя к начальному этапу – анализ проблемной ситуации, видим, что основная проблема остаётся не решенной. Во-первых, не выяснено, где же скрывается изъян в модели Зенона. Почему наши рассуждения приводят к правильному результату, а стройные и логичные рассуждения Зенона - нет. Во-вторых, приведенное решение справедливо только в случае, когда все параметры процесса находятся в определённых количественных соотношениях, а именно – фора = 1/2, скорость Черепахи = 1, скорость Ахиллеса = 2 и дистанция от места старта Ахиллеса до места встречи – до финиша равна 1. Эти количественные значения заданы в [Ц.2] и заданы, при этом, вопреки всем законам математики!

Для пояснения этого утверждения необходимо ввести алгебраические обозначения и записать несколько простейших соотношений. Вообще-то делать это не желательно. Во времена Зенона не знали алгебра и такого фундаментального понятия алгебры как *переменная*. Но поступим следующим образом. Все дальнейшие рассуждения будем вести с использованием современных математических методов, а в самом конце попытаемся изложить полученные результаты на языке, понятном современникам Зенона.

Введём обозначения

A_W - Advantage given to weaker participant of competition - преимущество, даваемое более слабому участнику состязаний (фора);

R_E - Rupture between escaping and catching up – разрыв между убегающим и догоняющим, остающийся между участниками после прохождения предыдущего этапа;

W_A - Way passed by Achilles – путь, пройденный Ахиллесом;

W_T - Way passed by Turtle – путь, пройденный Черепахой;

v_A – Скорость Ахиллеса;

v_T – Скорость Черепахи;

$C_A = v_A / v_T$ - отношение скоростей Ахиллеса и Черепахи.

Используя эти обозначения, запишем несколько очевидных соотношений. За некоторый промежуток времени T_0 Черепаха пройдёт отрезок W_T , равный

$$W_T = v_T T_0 \quad (1)$$

Очевидно, чтобы догнать Черепаху, Ахиллес за это же время должен пройти путь W_A, определяемый соотношением

$$W_A = v_A T_0 = A_W + v_T T_0 \quad (2)$$

Из соотношения (2) следует, что

$$T_0 = W_A / v_A = (W_A - A_W) / v_T \quad (3)$$

Умножив два правых члена соотношения (3) на величину v_A, получим окончательное соотношение, связывающее три величины W_A, C, и A_W .

$$W_A = C(W_A - A_W) \quad (4)$$

Теперь, задав произвольно любые две величины, третью величину можно найти из соотношения (4). Естественно, что при наличии функциональной связи между величинами нельзя задавать все три величины сразу, как это сделано, например, в [Ц.2]. Об этом приходится напоминать, потому некоторые авторы, при наличии "*мышления, не отягощенного догмами, т. е. самостоятельного мышления*" [Ц.2], возможно об этом элементарном правиле даже не догадываются.

Мы видим, что перенос объекта наблюдения с одного участника на другого позволяет получить ответы на все вопросы: на какой дистанции догонит Ахиллес Черепаху при заданной скорости и форе, за какой промежуток времени, какая скорость должна быть, чтобы встреча состоялась на заданной дистанции при заданной форе и т. д. Но, в модифицированной модели процесс завершается в один прием. А при этом ничего нельзя сказать о характере процесса движения – носит ли он непрерывный или дискретный характер (на чём настаивал Зенон). Значит, действенное опровержение выводов Зенона надо искать, строго придерживаясь предложенной Зеноном процедуры.

Для удобства представим описание процесса по Зенону с помощью математической модели. Такой моделью является бесконечная последовательность величин, каждая из которых в два раза меньше предыдущей. Эта последовательность приведена в качестве примера в [2], где о ней сказано следующее:

Цитата 3[Ц.3]

- "*…Знающие математический анализ обычно указывают, что ряд*

$$\sum_{i=1}^{\infty} 1/2^n \qquad (5)$$

сходится к 1. Поэтому, дескать, Ахиллес преодолеет весь путь за конечный промежуток времени и, безусловно, обгонит черепаху."

Цитата 3 является прямым продолжением [Ц.2] и здесь используется комбинация параметров, приведенных в [Ц.2], то есть, дистанция до финиша (в нашем обозначении W_A) равна единице, фора равна 1/2 и относительная скорость равна двум. Заметим, что это единственное сочетание параметров, которое можно было задать одновременно, не противоречя при этом соотношению (4). Так вот, только при таком сочетании параметров доказательство того, что на каком-то этапе сумма членов бесконечного ряда (5) будет равна единице, явилось бы доказательством того, что на этом этапе беглянку удастся догнать. Но, увы точное равенство при заданной последовательности не быть достигнуто никогда.

Поэтому, слово *дескать* вставлено в [Ц.3] не случайно. Попробуем присмотреться к формуле (5), с помощью которой описывается процесс движения Ахиллеса, заданный Зеноном. Более детально описываемая этой формулой последовательность представлена в табл.1

Таблица 1

Расстояние до финиша		1	1/2	1,4	1,8	1/16
Путь, проходимый на очередном этапе	$\sum_{i=1}^{\infty} 1/2^n =$	1/2	+1,4	+1/8	+1/16	+1/32

Таблица 1 полностью раскрывает причину неудачи Ахиллеса. Вся суть в том, что на каждом очередном этапе, каким бы малым ни оставался промежуток, отделяющий Ахиллеса от финиша, ему разрешается пройти только половину этого промежутка. Вернемся к фразе,– "…*Знающие математический анализ обычно указывают, что ряд* (1) *сходится к 1.*" Здесь, специально для "знающих", следует пояснить, что слова "ряд сходится к 1" и "сумма членов равна 1", это разные формулировки. И первая из них означает, что в строгой математической формулировке выражение (1) следует записывать так:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{1}^{n} 1/2^n = 1 \qquad (6)$$

А соотношения (6) означает, что как бы ни было велико значение n, сумма членов ряда всегда будет меньше единицы. Стало быть, в рамках предложенной модели Черепаху догнать невозможно. Но, мы-то знаем, что это не так. Как же быть?

Разумный выход только один: "Если гора не идет к Магомету, то Магомет идет к горе". Это означает, если предлагаемая модель противоречит объективной реальности, то надо корректировать модель, а не пытаться, погружаясь в "*тот самый гносеологический* ***кошмар****, который* ***зрит*** *в самый корень*" [Ц.1], пытаться переосмыслить основы мироздания.

Оставаясь в рамках описания процесса движения, предложенного Зеноном, обеспечить Ахиллесу возможность догнать Черепаху можно единственным способом. Надо просто "разрешить" ему на каком-то заключительном этапе продвинуться не на половину остающегося разрыва, а преодолеть этот разрыв целиком. Собственно такой подход – чтобы на заключительном этапе Ахиллес двинулся чуть дальше дозволенного ему интервала - предлагался во многих публикациях. Только там не приводилась математическая формулировка этого подхода. Складывалась ситуация, напоминающая анекдот про Чапаева:

> «Понимаешь Петька – говорил Василий Иванович – нутром я чую, что 1/2 и 0,5 это целый литр, а математически доказать не могу».

Ну, а мы постараемся доказать правильность своего подхода математически. Для этого в математической модели процесса движения следует ввести дополнительное слагаемое и вместо выражения (5) записать следующее соотношение

$$W_A = \sum_{n=1}^{N} 1/2^n + 1/2^N = 1 \text{ при } 1 \le N \le \infty \qquad (7)$$

где W_A – путь, пройденный Ахиллесом.

На первый взгляд, может показаться что "победил" в конечном итоге Зенон. Ведь только этого он и добивался. Все его рассуждения были направлены против идеи непрерывности движения. Если процесс движения непрерывен, заявлял он, то его можно представить как бесконечную сумму бесконечно делимых отрезков. Но тогда можно показать, что в этих условиях более быстрый никогда не догонит более медленного. А это противоречит реальности. А если привести модель в соответствие с реальностью и какой-то из заключительных разрывов сделать неделимым, то это и будет доказывать, что движение по своей природе дискретно.

Ну, нет. Здесь мы не дадим Ахиллесу ни малейшей поблажки. Дело в том, что соотношение (7) справедливо при любом значении N. Можно подобрать такую величину этого параметра, что отрезок, определяемый слагаемым $1/2^N$, может иметь длину любого порядка малости. Это может быть ангстрем, нанометр, пентаметр. Его расчётная длина может быть равной величине диаметра атома, или если угодно, одной миллионной от этой величины. Стоит только подобрать соответствующее, достаточно большое значение параметра N. Так что, никакой "дискретности" добавляемое слагаемое не вносит. А вот "*тот самый гносеологический* ***кошмар****, который* ***зрит*** *в самый корень*", по нашему глубокому убеждению, рассеивает.

Переходим к пятому этапу – проверяем реализуемость модели. В нашем случае – её доказательность и полноту ответа на все поставленные вопросы. Доказано, что Ахиллес догонит Черепаху при любом значении N. Показано, что предложенная модель не противоречит постулату о непрерывности движения, поскольку допускает возможность деления проходимого пути на отрезки любого порядка малости. Но, остается еще одно ограничение. Соотношение (7) описывает путь Ахиллеса только для случая, когда значения всех параметров таковы, как они предложены в [Ц.1]. А если принять, что какой-нибудь параметр имеет иное значение, например, $C = 3$, то соотношение (7) будет просто описывать некоторый бесконечный ряд, сумма членов которого равна 1 при любом значении N, но к процессу движения Ахиллеса это не будет иметь отношения. Поэтому для общего случая необходимо построить новую модель.

В общем случае удобнее за факт встречи удобнее принять условие, что участники за одинаковый промежуток времени окажутся равноудаленными от точки старта догоняющего. То есть, будет выполнено равенство

$$D_A = W_A = D_T = A_W + W_T , \qquad (8)$$

где D_A - удаление Ахиллеса от старта и D_T - удаление Черепахи от этой же точки.

Примем условия Зенона, что процесс движение осуществляется поэтапно. На первом этапе проходит расстояние A_W, а на втором – продвигается на дистанцию, равную разрыву R_{E1} между ним и Черепахой, образовавшемуся по завершении первого этапа. Поскольку

$$R_{E1} = A_W / C, \quad \text{то } R_{E2} = R_{E1} / C = A_W / C^2 \qquad \text{и т. д,} \quad (9)$$

то путь Ахиллеса в общем виде можно представить в виде бесконечного ряда

$$W_A = \sum_{n=0}^{\infty} A_W / C^n \qquad (10)$$

Соответственно путь Черепахи отображается бесконечной последовательностью

$$W_T = \sum_{n=0}^{\infty} A_W / C^{n+1} \qquad (11)$$

Из соотношений следует, что условием завершения погони является достижение равенства

$$D_A = W_A = \sum_{n=0}^{\infty} A_W / C^n = D_T = A_W + \sum_{n=0}^{\infty} A_W / C^{n+1} \quad (12)$$

однако, это равенство никогда не может быть достигнуто, поскольку после прохождения каждого N-го этапа между догоняющим и преследуемой остаётся разрыв $R_{En} = A_W / C^{n+1}$, наличие которого обусловлено условиями посталенной задачи. Так пора, наконец, сжалиться над несчастным Ахиллесом, измученным за многие столетия безуспешной погони, и разрешить ему на одном из этапов этот самый разрыв.

Для этого достаточно добавить к дистанции, проходимой Ахиллесом только одно слагаемое и переписать соотношение (12) в следующем виде

$$D_A = W_A = A_W / C^{N+1} + \sum_{n=0}^{N} A_W / C^n = D_T = A_W + \sum_{n=0}^{N} A_W / C^{n+1} \quad \text{при} \quad 1 \le N \le \infty$$

(13)

Вот теперь можно сказать, что достигнута идиллия – "и волки сыты и овцы целы". Соотношение (13) позволяет Ахиллесу приближаться к цели бесконечно малыми перемещениями. Наличие дополнительного слагаемого этому не препятствует, поскольку слагаемое это может принимать самые невообразимо малые значения, так, что говорить о вносимой им дискретности движения не имеет никакого смысла. И, в то же время, требуемое равенство соблюдается при любом значении N, начиная $N = 1$.

$$D_A = W_A = A_W + A_W / C + A_W / C^2 = D_T = A_W + A_W / C + A_W / C^2 \quad (14)$$

Здесь, пожалуй, следует дать дополнительные пояснения. Посмотрим, как выглядит график забега, если он проводится в соответствии с соотношением (13). Примем, что забег должен завершиться за четыре этапа и относительная скорость С=3. Результаты представлены в табл. 2.

Таблица 2

Номер этапа	1	2	3	4	Дистанция от старта
Путь Ахиллеса за один этап	A_W	$A_W/3$	$A_W/9$	$A_W/27+ A_W/81$	$A_W(1+40/81)$
Путь Черепахи за один этап	$A_W/3$	$A_W/9$	$A_W/27$	$A_W/81$	$A_W(1+40/81)$
Разрыв	$A_W/3$	$A_W/9$	$A_W/27$	0	0

Как видно из табл.1, всё, что требуется Ахиллесу – это пройти на четвёртом этапе дистанцию не 3/81 A_W, а 4/81 A_W, то есть увеличить скорость на 4/3 и вместо C=3 развить скорость C=4. Для спортсмена это, конечно, не сложно, а вот как быть с дискретностью? А очень просто – пусть это приращение скорости произойдет не на четвёртом, а на тысячном, на миллионном, да на каком угодно этапе. Главное достигнуто – Черепаха никуда от него не денется, и никакой дискретности.

Но и на этом этапе мудрый Зенон остаётся в известном смысле не опровергнутым. Полное, стопроцентное опровержение было бы достигнуто, если бы доказательства можно было провести, пользуясь исключительно только правилами арифметики, а не прибегая к таким понятиям как бесконечный ряд, сходимость т. п. Однако, как справедливо отметил Говард де Лонг [3] – одно из фундаментальных свойств арифметики состоит в том, что она может поставить гораздо больше задач, чем сможет решить. В этом, и только в этом заключается "неопровержимость" парадоксов Зенона, которая ни в коей мере не влечёт за собой никакого гносеологического кошмара.

Апория "Дихотомия"

Что касается другой апории Зенона "Дихотомия", то она основывается на аргументах, схожих с аргументами, приведенными в апории "Ахиллес" и утверждает невозможность начать движение: для того чтобы пройти весь путь, движущееся тело сначала должно пройти половину пути, но чтобы преодолеть эту половину, надо пройти половину половины и т. д. до бесконечности. Иными словами, при тех же условиях, что и в предыдущем случае, мы будем иметь дело с непрерывно возрастающей последовательность отрезков: $(½)^n$, ..., $(½)^3$, $(½)^2$, $(½)^1$. Если в случае апории "Ахиллес" соответствующий ряд не имел заключительного отрезка, то в "Дихотомии" этот ряд не имеет *первого* отрезка. Стало быть, если движение как процесс считать непрерывным, то движение не может начаться. А поскольку, согласно элеатам, движение не только не может закончиться, но и не может начаться, движения нет и быть не может!

Здесь, как и в предыдущем случае, можно пойти на "уступку" и ввести элемент дискретности. Можно в качестве первого отрезка продвинуться на неделимую дистанцию $1/2^N$, где $1 \leq N \leq \infty$, тем самым соглашаясь, что если дискретность и существует, то выражается она бесконечно малой величиной, значение которой можно установить бесконечно малым по отношению к любой самой малой мысленно или физически выявленной частице материи. Можно ли это считать доказательством непрерывности процесса движения? Безусловно, нет! Это всего лишь математическая модель, параметры которой, никак не связаны с параметрами пространства, времени и движения. Но, эта модель, по крайней мере логична. Сопоставление выводов, следующих из этой модели, не противоречит наблюдаемым фактам. Стало быть, может считаться адекватной описываемому процессу до тех пор, пока не будут выявлены новые свойства этого процесса, наличие которых потребует разработки новой модели. Таковы требования системного подхода.

Что же касается модели Зенона, то её параметры также не отображают никаких свойств реального пространства и времени. Но, кроме того, выводы, следующие из этой модели, противоречат реально наблюдаемым фактам по очень простой причине. В качестве описания процесса, который в соответствии с известными физическими законами, является конечным, принята бесконечная последовательнось элементов. Такая модель является неадекватной и должна быть отвергнута.

Проанализировав апории «Дихотомия» и «Ахиллес», мы обнаружили, что обе они приводят к парадоксу (точнее – должны приводить) при допущении о *непрерывности* пространства и времени в смысле их *бесконечной делимости*. Без допущения тезиса о том, что любой пространственный или временной интервал можно разделить на меньшие по длине интервалы, обе апории рушатся сами по себе.

Апория "Стрела"

Третья апория Зенона «Стрела», пожалуй, самая труднодоступная для системного анализа. По отношению к двум предыдущим апориям анализ, проведенный в рамках предписанной последовательности СА (анализ проблемной ситуации, формулировка целей, формулировка функций) привел, в конечном итоге, к выяснению истинной причины возникновения парадокса. Правда, для этого пришлось использовать математические понятия, неизвестные во времена Зенона (алгебраические уравнения, бесконечные ряды и т. д.). По отношению же к апории «Стрела» дело обстоит гораздо сложнее.

Суть апории «Стрела», в изложении, приведенном в обзоре [2], заключается в следующем: "…в *каждый момент полета* стрела *занимает* определенное место и *покоится* в нем; *стало быть, движение* стрелы есть *сумма состояний покоя*, т. е. стрела не движется". Сложность состоит в том, что здесь нет ни модели, анализ которой мог бы показать её неадекватность, ни словесного описания процесса, поддающегося критике. Кроме того, парадокс возникает не только из утверждения, противоречащего реальности. Парадоксальным является факт, что все последующие обсуждения разворачиваются без какого-либо анализа исходных предпосылок. Прежде всего – что такое *момент полета*? Скорее всего, здесь имеется в виду *момент времени*. Под этим понятием по умолчанию подразумевается некоторая точка – координата на оси времени, фиксирующая начало некоторого события, либо достижения некоторого этапа, либо его завершение. Именно в этом смысле используется этот термин в быту: - "В данный *момент* господин Недотёпов занят…" или – "С *момента* начала судебного процесса и до *момента* его окончания…". В этом же смысле термин используется и в научных текстах. – "В *момент* t_0 тело находилось в точке A, а в *момент* t_1 переместилось в точку D". При этом однозначно подразумевается, что координатные точки (*моменты времени*) не имеют никакой протяжённости во времени. Протяжённостью обладает лишь интервал между этими точками. Пишут, например, так: – "…Поскольку интервал времени $T_1 = t_1 - t_0$ пренебрежимо мал, по сравнению с…. и т. д.".

В наше время невозможно судить о том, в каких именно выражениях излагал свои доводы Зенон. До нас дошли только изложения многократно переведенные и пересказанные. А объяснять, что такое перевод и, тем более, пересказ, пожалуй, излишне. Достаточно вспомнить те "перлы", которыми сплошь и рядом пестрят переводные издания. А, что до пересказов… В приватной беседе можно было бы, привести анекдот о полковнике, который очень любил пересказывать услышанные накануне анекдоты своим подчинённым. Но, элементарные рамки приличия этого не позволяют. В силу сказанного выше, дальнейший анализ проблемной ситуации будем проводить применительно к тексту из обзора [2], приведенному в начале настоящего раздела.

Итак, примем, что *момент времени* – это координата. Тогда, что означает прилагательное *каждый* в рассматриваемом контексте. Обычно пишут так: - "В каждый последующий момент времени t_n… и т. д." При этом подразумевается, что имеется несколько моментов t_0, t_1, …t_n… и есть, соответственно, временные интервалы между ними: $T_1 = t_1 - t_0$, $T_2 = t_2 - t_1$… и т. д. При таком, общепринятом подходе вполне нормально воспринимается следующий текст: - "В момент времени t_0 стрела находится в точке пространства l_0, затем в момент t_1 – в точке l_1 и т. д." Никаких неясностей такая фраза у грамотного человека не вызовет. Он понимает, что здесь "точка l_n" это всего лишь обозначение координаты, а не элемента пространства и стрела может здесь спокойно "находиться", но, ни в коем случае, не "покоиться". И, что термин "находится" применён здесь в процессе умозрительного анализа, в ходе которого можно спокойно "остановить" время в произвольный момент и любоваться стрелой, "находящейся" в этой точке неопределённо долго. И размышлять при этом, где окажется стрела в следующий момент времени и как она сюда попала.

Что касается термина "покоится", то следует отметить, что стрела в действительности покоится только в двух точках своего полета. В момент t_0 она покоится на луке, касаясь основанием (или как там оно называется) тетивы, тетива натянута до отказа и стрелок тетиву отпускает. Второй момент t_f соответствует событию, когда стрела, попав в цель (или в иной предмет) останавливает свой полёт. Можно с достаточной определённостью говорить и о третьем моменте t_a, когда стрела, пущенная вертикально вверх, достигает точки апогея и там, исчерпав запас кинетической энергии, сообщённой ей отпущенной тетивой, на миг зависает. После чего она начинает движение вниз под воздействием накопленной потенциальной энергии.

Проблему "размытости" постановки проблемы усиливает наличие ещё парочки перлов, содержащихся в цитируемом изложении апории "Стрела". Первый из них - *сумма состояний покоя,* - термин, нам доселе не известный. Как это, каким образом, можно суммировать **состояния?** Вот уж действительно шедевр философской мысли.

В своем обзоре его автор высокомерно и пренебрежительно отзывается о "технарях": *"Ибо "технари" привыкли оперировать четкими определениями, установленной формализацией и т. д., а апории Зенона — это тот самый гносеологический кошмар, который зрит в самый корень и ставит под сомнение любую формализацию и любые термины.*[Ц.1]

В заключительной фразе автор обзора, несомненно, прав. В тех случаях, когда итоги некоторого анализа противоречат реальным фактам, а уж тем более известным физическим законам, прията, согласно принципам СА, в первую очередь усомниться в адекватности принятых формулировок и терминов. Но это вовсе не значит, что взамен чётких логических формулировок и терминов можно использовать такие откровенные ляпы как *сумма состояний покоя*. Или, рассматривая числовую последовательность пространственных отрезков, заявлять, что "*…мы будем иметь дело с перевернутым рядом **точек:*** $(½)^n$, ..., $(½)^3$, $(½)^2$, (½)". [2]. Конечно, в процессе анализа любой сложной проблемы, всегда приходится вводить некоторые упрощения, допущения и т. д.. Но, такая степень вульгаризации, когда отождествляются понятия "пространственный отрезок" и "точка", непростительны даже для самого выдающегося философа.

Итак, если выражение *каждый момент полета* использовано в качестве замены термина *момент времени* и этот термин используется в общепринятом смысле, то есть обозначает последовательность координат на временной оси, то парадокс исчезает. В этом случае стрела в каждый t_n-й момент времени находится (в смысле – умозрительно наблюдается) в определенной точке пространства l_n. Далее, в момент времени t_{n+1} - находится в точке l_{n+1} и т. д. Причём отрезки пространства L_n, проходимые за отрезки времени T_n, определяются простым соотношением

$$L_n = l_{n+1} - l_n = T_n \overline{V}_n = (t_{n+1} - t_n)\overline{V}_n \quad , (15)$$

где $\overline{V}_n$ – средняя скорость стрелы на данном участке полета. Современные уравнения физики позволяют этот параметр вычислить при задании конкретных данных о стреле, о луке и о силе натяжения стрелы. А вот в эпоху Зенона это сделать было невозможно. Да и не требовалось – главное, что бы стрела двигалась. А Зенон утверждает обратное. И его утверждение опровергнуть невозможно. Ибо, никакая математика не в состоянии подтвердить или отвергнуть простое словесное утверждение, в котором не содержится никакого математического описания или формулы.

Вряд ли помогло бы словесное возражение, что движущийся объект можно считать "покоящимся" в фиксированной точке пространства лишь при умозрительной "остановке" времени. А в реальности же это невозможно. В наше время эта истина известна даже эстрадным звездам. Можно вспомнить, как пела известная певица – "…И время *не* на миг *ни* остановишь.." (именно так она пела). Тем более невозможно было бы опровергнуть Зенона ссылками на известные нам законы движения. Но, точно так же в свое время невозможно было доказать мудрецу, убеждённому, что Земля плоская и покоится на трёх китах, что на самом деле Земля имеет форму шара, да ещё и вертится вокруг солнца. И потребовались тысячелетия наблюдения и осмысления реальных физических фактов, чтобы эта истина стала тривиальной даже для трёх-четырёхлетнего малыша.

Заключение

При анализе апории Зенона "Ахиллес" на первом этапе СА "анализ проблемной ситуации", было установлено, что исследуемая вербальная модель процесса (словесное описание, изложенное Зеноном) содержит все элементы, обеспечивающие применение общих методов СА. В модели содержатся объекты: Ахиллес и Черепаха. Заданы их существенные свойства: скорость Ахиллеса выше скорости Черепахи в произвольно задаваемое число раз. Установлены отношения между ними: в начале забега Черепаха находится впереди Ахиллеса на произвольно задаваемой дистанции – имеет фору. Парадокс возникает из-за того, что, казалось бы, логичные (даже "безупречные" [2]) рассуждения Зенона приводят к неверному выводу.

Однако, системный анализ показал, что на деле здесь имеет место подмена целей. Зенон описывал не процесс полной ликвидации разрыва между Ахиллесом и Черепахой, а бесконечный процесс приближения к этому событию. Тем самым, он пытался доказать, что, если представлять пространство бесконечно делимым, то самый элементарный процесс (ликвидация разрыва между догоняющим и беглянкой) никогда не придет к завершению. И выход из этой парадоксальной ситуации, по его мнению, заключался в признании дискретности пространства. В известной мере он в этом преуспел. По правилам опровержения парадоксов необходимо доказать, в чем состоит ошибочность рассуждений Зенона. При этом следует по возможности ближе оставаться в канве этих рассуждений, безусловно сохраняя при этом предпосылку о бесконечной делимости. Представляется, что этого удалось достигнуть, добавив в бесконечную последовательность приближений ещё один элемент, превращающий бесконечный процесс приближения в процесс полной ликвидации разрыва.

Похожая ситуация выявилась и при анализе апории "Дихотомия". Однако, при анализе апории "Стрела" обычные процедуры СА оказались не приложимы. Здесь нет ни совокупности объектов, ни их свойств, ни отношении между ними. И, конечно, нет никаких причинно следственных связей. Есть только словесное утверждение –" в *каждый момент полета* стрела *занимает* определенное место и *покоится* в нем; *стало быть*, *движение* стрелы есть *сумма состояний покоя*, т. е. стрела не движется". Попытаемся ещё вникнуть, что же здесь написано, разбирая это утверждение по частям.

1. "в *каждый момент полета*". Ага, раз " *каждый* ", значит, этих *моментов* не один, а несколько. Теперь вопрос – что такое эти *моменты полета*. Логично предположить, что это координатные геометрические точки в пространстве, не имеющие размеров. Значит, они разнесены во времени на некоторые временные интервалы, пусть даже бесконечно малые. Потому, что если между ними нет интервалов времени, то они сливаются в единственный момент, и тогда прилагательное "*каждый*" становится бессмысленным. Итак, каждый из *моментов полета* отделен от соседних *моментов полета* временными интервалами.

2. " в *каждый момент полета* стрела *занимает* определенное место". Ну и пусть занимает. Но это *определённое место* соотносится с *каждым* из моментов. То есть, каждому из моментов соответствует своё *определенное место*, занимаемое стрелой. И, в течение временных интервалов, разделяющих моменты полета, стрела перемещается от одного определённого места к другому. Что ей мешает?

3. "… стрела *занимает* определенное место и ***покоится*** в нем". Ага, добираемся до сути – раз *покоится*, значит, *не перемещается*. Возражение здесь может быть только одно: раз *перемещается*, значит – *не покоится*. "Нет! раз *покоится*, значит, *не перемещается*". Всё. Здесь логическая цепочка обрывается. Дальше тупик - "Сказка про белого бычка".

Почему *покоится*, откуда это следует, какими аргументами это подкрепляется – на все эти вопросы нет ответа, и системный анализ здесь становится бессильным. Тем более, что далее следует совершенно "броне-непробиваемый" термин: "*сумма состояний покоя*". Что это такое, как это можно трактовать, как можно суммировать категорийное понятие – здесь остаётся только развести руками. Как говорится – "Против лома нет приёма". Можно лишь полюбопытствовать - а *состояние покоя* и *состояние движения* тоже можно суммировать? Если так, то нет никаких проблем. Побыв некоторое время в одном определенном месте в состоянии *покоя*, стрела переходит в состояние *движения* и перемещается в другое определённое место и т. д. Тогда путь стрелы есть *сумма состояний покоя и состояний движения* и теперь ничто не мешает ей добраться до намеченной цели.

Конечно, заключительная фраза предыдущего абзаца не соответствует принципам СА. Системный анализ не всесилен и, тем более, не всеяден. Его применение эффективно в таких ситуация, когда речь идет об объектах, свойствах этих объектов, отношениях между ними, причинно-следственным связям. Ситуации, в которых всё это отсутствует, не входят в компетенцию системного анализа. Системный анализ неприменим, для разрешения схоластически богословских споров, например, такого типа: "Если Господь Бог всемогущ, то может ли он создать камень такой величины, что сам потом не сможет его поднять" или "Сколько ангелов поместится на кончике иглы" и т. п. На наш взгляд, апория "Стрела" очень смахивает на такие "парадоксы".

Но, в тех ситуациях, когда проводится анализ системы, или процесса, или логической проблемы, где налицо имеются необходимые атрибуты реальности, инструментарий и методология системного анализа, несомненно, повысят эффективность разрешения все возникших проблем.

Литература

1. Бескровный И. М. Системный анализ и информационные технологии в социальной сфере и здравоохранении. Научный электронный архив при академии естествознания. 13.04.10. **Монография**, 254 с. URL:http://www.econf.rae.ru/article/5287.

2. Руслан Хазарзар. Апории Зенона. URL:http://zenoon.narod.ru/aporia.htm

3. Howard DeLong. Unsolved Problems in Arithmetic. Scientific American 224, №3 (March 1971) pp. 60 - 64