

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЦВЕТНЫХ РИСУНКОВ ПРИ КОНСТРУИРОВАНИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ В НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Вертинская Н. Д. профессор, доктор технических наук
Иркутский государственный технический университет, Россия
stevia@mail.ru

Определитель поверхности

Как известно, поверхность – **двупараметрическое множество точек [1]**.
Например, плоскость несет множество точек, имеющих две координаты.
Поверхность можно образовать движением линии g_i по некоторой линии d_i .

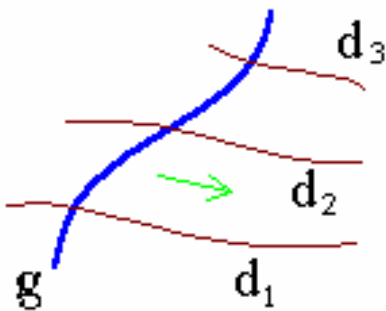


Рис. 1

Такой способ образования поверхности называется **кинематическим**. Линия g_i называется **образующей**, линия d_i – **направляющей** (рис.1).
Говоря о кинематическом способе образования поверхности вводится понятие **определителя** поверхности, как **совокупности независимых условий, однозначно определяющих поверхность**.

Определитель поверхности состоит из двух частей: **геометрической** и **алгоритмической**.

Например, сфера Φ однозначно определяется центром и радиусом, что записывается – $\Phi(O,R)$. Центр O и радиус составляют геометрическую часть определителя, а алгоритмическая часть формулируется словами: сфера это множество точек пространства, удаленных от точки O на расстоянии R .

Такие поверхности, как поверхности фюзеляжа самолета, кузова автомобиля, лопатки турбины и т.д. имеют сложные законы образования. Их определители сложны и разнообразны. Поэтому выработали универсальный определитель, геометрическую часть которого составляет дискретный каркас (множество) образующих, а алгоритмическую часть – алгоритм уплотнения каркаса (переход от дискретного каркаса к непрерывному).

Например, в топографии рельеф земной поверхности задается семейством горизонталей – сечений поверхности плоскостями уровня (рис.2).

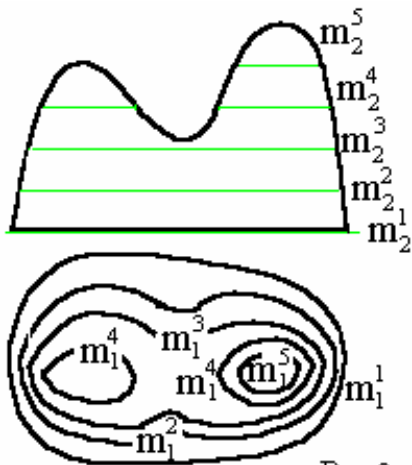


Рис. 2

Построение проекционных изображений поверхностей вызывает определенные трудности. Поэтому кинематические поверхности задаются проекциями элементов геометрической части определителя. Для того, чтобы определить одна поверхность нами задана или семейство поверхностей, нужно выяснить является ли чертеж поверхности полным. Критерием полноты чертежа является: по одной проекции точки, можно ли построить единственную вторую ее проекцию.

Некоторые поверхности можно описать алгебраическими уравнениями в декартовой прямоугольной системе координат. В этом случае поверхность будет **алгебраической**, в противном - **трансцендентной**.

Порядок поверхности определяется количеством точек ее пересечения с любой прямой. Это определение для алгебраических поверхностей, если же точек пересечения поверхности с прямой бесконечно много, то такая поверхность трансцендентная.

Порядок поверхности определяется и порядком плоской кривой, полученной в пересечении поверхности с любой плоскостью.

Многообразие поверхностей требует их систематизации. При рассмотрении кинематического способа образования поверхностей в основе систематизации лежат два признака: вид образующих и закон их перемещения.

По виду образующей все поверхности можно разделить на **линейчатые** (образующая прямая) и **нелинейчатые** (образующая кривая пространственная или плоская), а по закону перемещения образующей – поверхности параллельного переноса, вращения и винтовые.

Линейчатые поверхности

Поверхности, образованные движением прямой по заданному закону называются линейчатыми. Линейчатые поверхности широко используются в технике. Это покрытия и ограждения архитектурных сооружений, поверхности крыльев и оперения, отсеков фюзеляжей, пилонов самолета, поверхностей цилиндрических и конических передач и т.д. Закон движения прямой линии обычно задается направляющими. Таких направляющих может быть не более трех.

Действительно, пусть даны три направляющие пространственные кривые $\tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \tilde{d}_3$ (рис. 3).

Возьмем, например, точку $M \in \tilde{d}_3$, и примем ее за вершину конической поверхности $\Sigma(M, \tilde{d}_1)$, у которой кривая \tilde{d}_1 будет направляющей, тогда кривая \tilde{d}_2 пересечет коническую поверхность $\Sigma(M, \tilde{d}_1)$ хотя бы в одной точке, например, N. Прямая $(MN)=g \subset \Sigma$ обязательно пересечет кривую \tilde{d}_1 хотя бы в одной точке, например, L. Перемещая точку M по кривой \tilde{d}_3 мы получим множество прямых, которые выделяют в пространстве единственную линейчатую поверхность Ф. Одну из направляющих кривых, например, \tilde{d}_3 можно заменить поверхностью (плоскостью) Δ . Тогда линейчатая поверхность будет называться поверхностью Каталана.

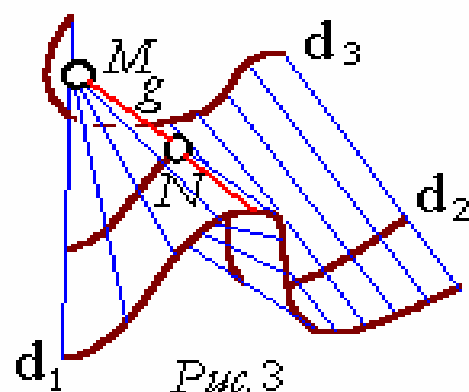


Рис. 3

Образующие g этой поверхности отвечают трем условиям: они пересекают кривые \tilde{d}_1 и \tilde{d}_2 и параллельны поверхности (плоскости) Δ . Если в качестве поверхности Δ мы выберем плоскость, то получаемые поверхности будут называться **поверхности с плоскостью параллелизма**.

В зависимости от вида направляющих \tilde{d}_1 и \tilde{d}_2 линейчатые поверхности с плоскостью параллелизма называются **цилиндром, коноидом и кривой плоскостью**.

Поверхности с плоскостью параллелизма

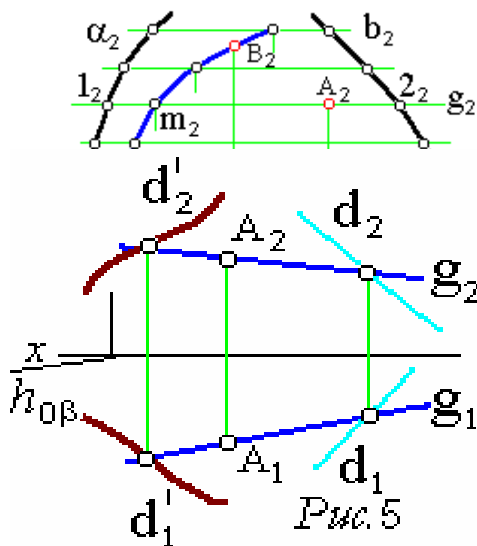
Цилиндром называется линейчатая поверхность с плоскостью параллелизма, у которой направляющими $a(\tilde{d}_1), b(\tilde{d}_2)$ являются пространственные или плоские кривые.

Чтобы решать задачи на поверхности цилиндриды необходимо задать его каркас прямолинейными образующими $g_i (g_{i1}, g_{i2})$. Пусть у нас дана плоскость параллелизма Π_1 , значит g_i будут горизонталями. Далее строим несколько прямолинейных образующих.

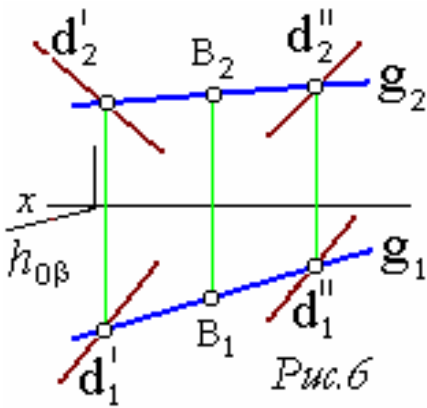
Для того, чтобы убедиться, что мы задали единственную поверхность цилиндриды, надо на его поверхности решить задачу (рис. 4):

если точка на поверхности задана ее одной проекцией, то необходимо найти вторую ее проекцию, если она будет единственной, то полученная поверхность будет единственной.

Решение. Пусть дана точка A задана фронтальной проекцией A_2 , то проведя через нее горизонтальную проекцию линейной образующей g_2 и по ней построим горизонтальную проекцию g_1 , на которую спроецируем точку A_2



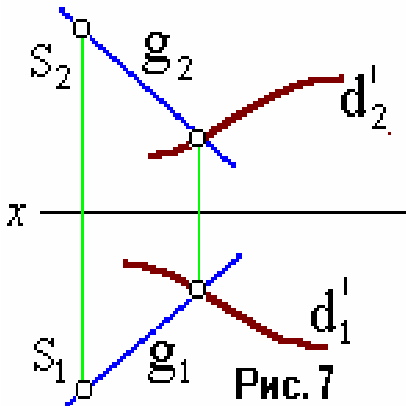
и получим точку A_1 . Если точка B задана своей горизонтальной проекцией B_1 , то чтобы найти фронтальную проекцию B_2 необходимо через провести горизонтально проецирующую плоскость, например, $B_1 = \Delta_1 = m_1$, где $m(m_1, m_2)$ – кривая по которой пересекает плоскость Δ_1 с цилиндридом. Построив фронтальную проекцию кривой m_2 и спроецировав точку B_2 , на m_1 получим проекцию B_1 . Отсюда делаем заключение, что поверхность цилиндриды единственная.



Коноидом называется линейчатая поверхность с плоскостью параллелизма, имеющая криволинейную и прямолинейную направляющие. Геометрическая часть определителя будет выглядеть так: $\Phi(\tilde{d}', \tilde{d}'')$ (рис. 5).

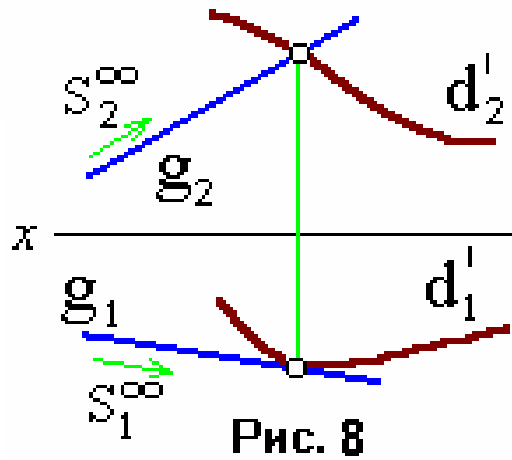
Косой плоскостью называется линейчатая поверхность с плоскостью параллелизма и прямолинейными образующими d', d'' (рис. 6).

Коническая поверхность общего вида образуется движением прямой g (образующей), проходящей через фиксированную точку S (вершину) и пересекающей направляющую кривую d' (рис. 7).



Коническая поверхность с несобственной вершиной $S^\infty(s)$ называется **цилиндрической** (рис. 8).

Линейчатая поверхность, образованная множеством касательных к пространственной кривой m , называется **торсовой** или поверхностью с ребром возврата. Направляющая кривая m поверхности Φ называется **ребром возврата** (рис. 9).



Поверхности вращения

Поверхность, образованная вращением некоторой линии (образующей) вокруг некоторой прямой i , называется **поверхностью вращения**. Геометрическая часть такой поверхности записывается так: $\Phi(i, g)$. На чертеже поверхность вращения $\Phi(i, g)$ задается осью i и образующей g (рис. 10).

Для построить точку $A \in \Phi$, необходимо определить окружность m -сечения поверхности Φ плоскостью $\Sigma_2 \perp i$. Окружность m определяется центром

$O(O_1, O_2) = i \cap \Sigma$ и радиусом $[OL]$, где $L = l \cap \Sigma$.

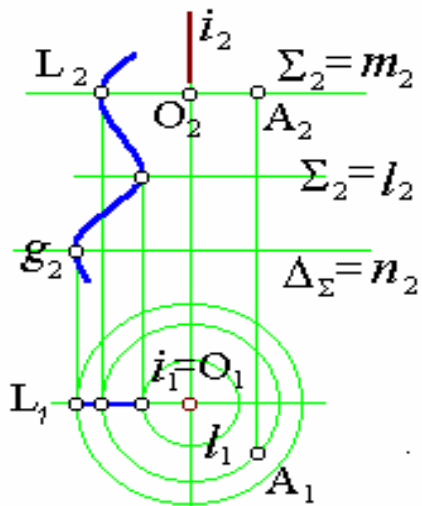


Рис. 10

Сечения поверхности Φ плоскостями, перпендикулярными оси i , называются **параллелями**.

Параллель, радиус которой больше радиуса смежных параллелей называется **экватором** n (n_1, n_2). Параллель, радиус которой меньше смежных радиусов, называется **горловой** l (l_1, l_2).

Сечения поверхности вращения плоскостями, проходящими через ее ось, называются **меридианами**. Меридиан, принадлежащий фронтальной плоскости уровня $\Gamma_1 = g_1$, называется **главным меридианом** g (g_1, g_2).

Семейства параллелей и меридианов образуют прямоугольный сетчатый каркас поверхности вращения. Через каждую точку

поверхности проходит одна параллель и один меридиан, пересекающиеся под прямым углом.

Далее рассмотрим поверхности вращения четвертого прядка, полученные вращением окружности g вокруг оси i , лежащей в плоскости окружности, которые называются **торами**. В зависимости от расположения оси i относительно центра окружности, тор может быть открытым ($d > r$) или закрытым ($d < r$) (рис. 11).

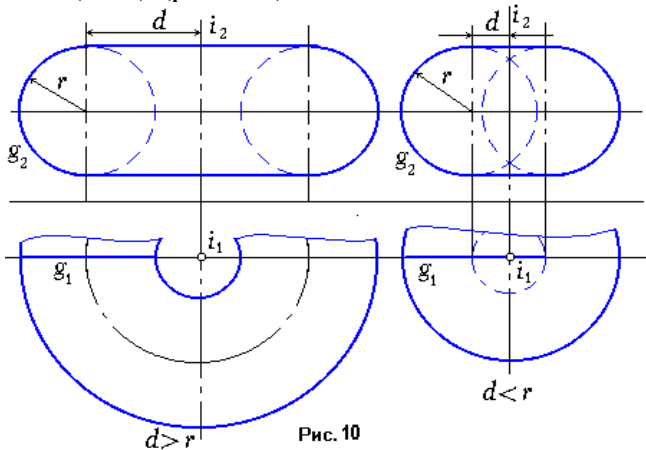


Рис. 11

Чертеж поверхности вращения, заданной проекциями элементов геометрической части определителя, не отличаются наглядностью, поэтому у таких поверхностей вращения строят очерковые линии поверхности.

При вращении прямой g вокруг оси образуется линейчатые поверхности вращения второго порядка: если $g \cap i$ – коническая поверхность вращения;

если $g \parallel i$ – цилиндрическая поверхность вращения;

если $g \cdot i$ – однополостный гиперболоид вращения.

При вращении кривой второго порядка \tilde{g}^2 вокруг своей оси образуется поверхность второго порядка:

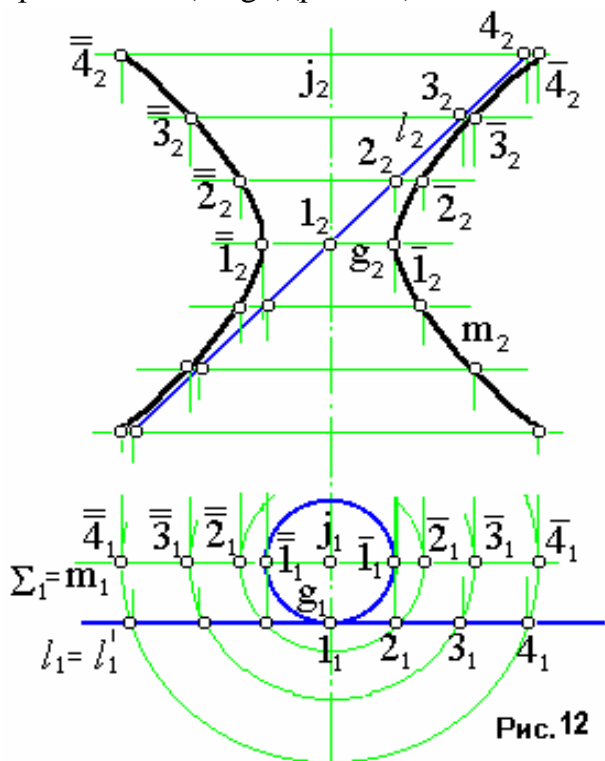
окружность вокруг любого диаметра – **сфера**,

дуга окружности вокруг оси i , принадлежащая плоскости дуги – **глобонд**,

эллипс вокруг малой оси – **сжатый эллипсоид вращения**,

эллипс вокруг большой оси – **вытянутый эллипсоид вращения**,
 парабола вокруг оси – **параболоид вращения**,
 гипербола вокруг мнимой оси – **однополостный гиперboloид вращения**,
 гипербола вокруг действительной оси – **двуполостный гиперboloид вращения**.

Задача 1. Построить главный меридиан однополостного гиперboloида вращения $\Phi(i, \bar{g})$ (рис. 12).



Для построения главного меридиана на образующей $g(g_1, g_2)$ берем несколько точек $\bar{1}(\bar{1}_1, \bar{1}_2), \bar{2}(\bar{2}_1, \bar{2}_2), \bar{3}(\bar{3}_1, \bar{3}_2), \bar{4}(\bar{4}_1, \bar{4}_2)$. В результате вращения вокруг оси i они опишут окружности (точка $\bar{1}(\bar{1}_1, \bar{1}_2)$ - ближайшая к оси вращения i опишет горловую окружность $g(g_1, g_2)$), которые пересекутся с фронтальной плоскостью уровня $\Sigma_1 = m_1$ по главному меридиану $m(m_1, m_2)$. Построив фронтальные проекции точек $\bar{1}_1, \bar{2}_1, \bar{3}_1, \bar{4}_1$ и соединив их получим фронтальную проекцию m_2 главного меридиана.

Однополостный гиперboloид содержит два семейства прямолинейных образующих – последовательных

положений образующей $\mathbf{I}(\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2)$ и симметричной ей $\mathbf{I}'(\mathbf{I}'_1, \mathbf{I}'_2)$.

Очевидно, образующие одного семейства между собой не пересекаются, а образующие разных семейств пересекаются между собой. Эти свойства образующих однополостного гиперboloида были использованы талантливым русским инженером Шуховым В.Г. для проектирования легких и жестких конструкций радиомачт, башен, градирен и т.д. (рис. 13).

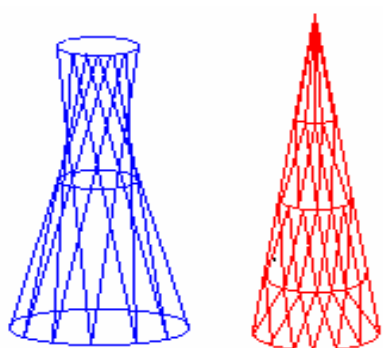


Рис. 13

Винтовые поверхности

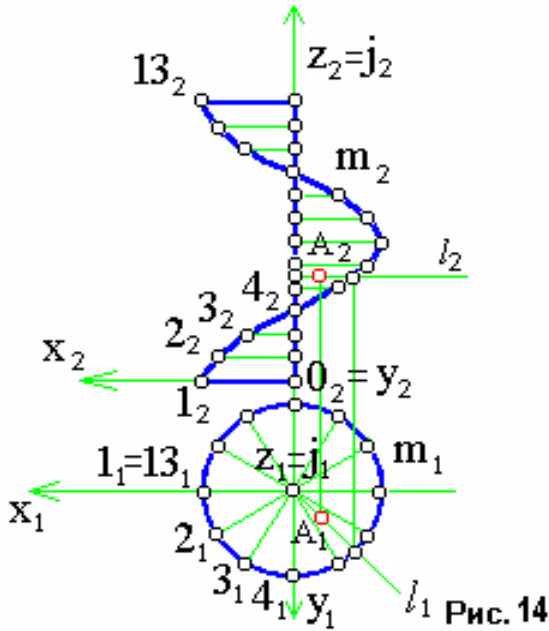
Поверхности, образованные винтовым движением некоторой линии, называется винтовой.

Это поверхности деталей резьбовых соединений (гаек, болтов, винтов и т.д.), винтовых зубчатых колес, детали червячных передач, шнеков, гребных и

воздушных винтов и т.д.

Движение линии называется винтовым, если каждая точка этой линии описывает цилиндрическую винтовую линию.

Винтовая поверхность образуется винтовым перемещением образующей g вокруг оси i . Образующая g может быть прямой или кривой.



Если при своем движении образующая \bar{g} пересекает ось i , то образованная поверхность называется закрытой, в противном случае – открытой.

Если образующая \bar{g} прямая, то винтовая поверхность называется **геликоидом**.

Геликоид называется **прямым**, если g перпендикулярна оси i , в противном случае – **наклонным**.

Винтовые поверхности являются трансцендентными, т.к. они пересекаются любой прямой в бесконечном числе точек.

Рассмотрим задание на черте-

же прямого закрытого геликоида.

Этот геликоид Φ образуется винтовым движением прямолинейной образующей \bar{g} под прямым углом к оси j винтового движения. Условие перпендикулярности g и j равносильно параллельности образующей g какой-либо плоскости проекций, например, $\Pi_1 \perp j$.

Винтовое движение на чертеже удобно задавать направляющей цилиндрической винтовой линии m , поэтому определитель прямого геликоида запишется так: $\Phi(j, m, \Pi_1)$.

На рис.14 построен каркас образующих, пересекающих ось j , направляющую винтовой поверхности $m(m_1, m_2)$ и параллельных плоскости Π_1 . Здесь же показано построение фронтальной проекции A_2 точки A (A_1, A_2), принадлежащей поверхности Φ прямого геликоида, по заданной горизонтальной проекции A_1 . Для этого через точку A проведена образующая $l(l_1, l_2)$.

Многогранники

Многогранником называется пространственная фигура, ограниченная замкнутой поверхностью, состоящей из отсеков плоскостей, имеющих форму многоугольников.

Задача 2. Найти пересечение пирамиды $SABC$ плоскостью $\Sigma(h^0 \cap f^0)$ (рис. 15).

Решение. Чтобы построить линию пересечения пирамиды $SABC$ плоскость $\Sigma(h^0 \cap f^0)$, необходимо найти точки пересечения каждого ребра $[SA]$, $[SB]$, $[SC]$ с плоскостью Σ . Для этого через каждое ребро пирамиды проведем вспомогательные проецирующие плоскости, например, через $[SA]=\Delta_2$ – фронтально проецирующую плоскость, пересекающая плоскость Σ по прямой l .

1. Строим ее горизонтальную проекцию $l_1(1_1 2_1)$ и находим пересечение с горизонтальной проекцией ребра $[S_1 A_1]$. $L_1 \cap [S_1 A_1] = \{K_1\}$.

Аналогично строим точку $N_1 = n_1 \cap [S_1 B_1]$, где $n_1 = (3_1 4_1)$, $n_2 = \Delta_2 \cap \Sigma$. Точка $F_1 = (A_1 C_1) \cap h^0_1$ и $P_1 = (B_1 C_1) \cap h^0_1$, принадлежат искомой линии пересечения. Соединяем найденные точки K , N , F и P и определяем видимость. На горизонтальной плоскости проекций отрезок $[F_1 P_1]$ будет невидимым, т.к. он принадлежит основанию. На фронтальной плоскости проекций отрезки $[K_2 N_2]$, $[N_2 P_2]$, $[P_2 F_2]$ будут невидимыми.

Решение задач на пересечение прямой или плоской кривой с поверхностью сводится к решению задачи пересечения поверхности с вспомогательной плоскостью, в которую помещают данную линию, вспомогательную плоскость желательно выбирать проецирующую.

Развертка поверхности

Если математическую поверхность представить в виде тонкой, гибкой и напряженной пленки, то некоторые из поверхностей можно путем изгибания совместить с плоскостью без разрывов и складок. Поверхности обладающие этими свойствами, называются **развертывающимися**, а фигура, полученная в результате совмещения поверхности с плоскостью, называется **разверткой**.

Построение развертки представляет важную техническую задачу, так как множество изделий различных отраслей промышленности изготавливаются из листового материала путем изгибания. Это - обшивки самолетов и судов, всевозможные резервуары и трубопроводы нефтяной и газовой промышленности, изделия швейной и кожевенной промышленности и т.д. Одним из основных этапов проектирования таких изделий является построение разверток.

Развертки бывают точные (пирамид, призм), приближенные (конических, цилиндрических и торсовых поверхностей), условные (для остальных поверхностей).

а) Алгоритм построения точной развертки многогранников.

Развертка многогранной поверхности называется совокупность конгруэнтных ее граням многоугольников, расположенных в одной плоскости.

Рассмотрим построение развертки пирамид (рис. 15).

Так как у данной пирамиды грани треугольники, то построение ее развертки сводится к построению натуральных величин этих треугольников, для чего необходимо найти натуральные величины его боковых ребер. Для определения натуральных величин боковых ребер воспользуемся способом прямоуго-

льных треугольников. Так как разности высот всех боковых ребер равны, то построим прямоугольные треугольники с общим катетом $\overline{S S_0}$. Вторые катеты этих треугольников равны длинам горизонтальных проекций этих ребер. Для удобства построения натуральных величин боковых ребер вынесем их на свободное поле чертежа. Совокупность треугольников $\overline{S S_0 A}, \overline{S S_0 B}, \overline{S S_0 C}$ с S_0 , $\overline{A},$

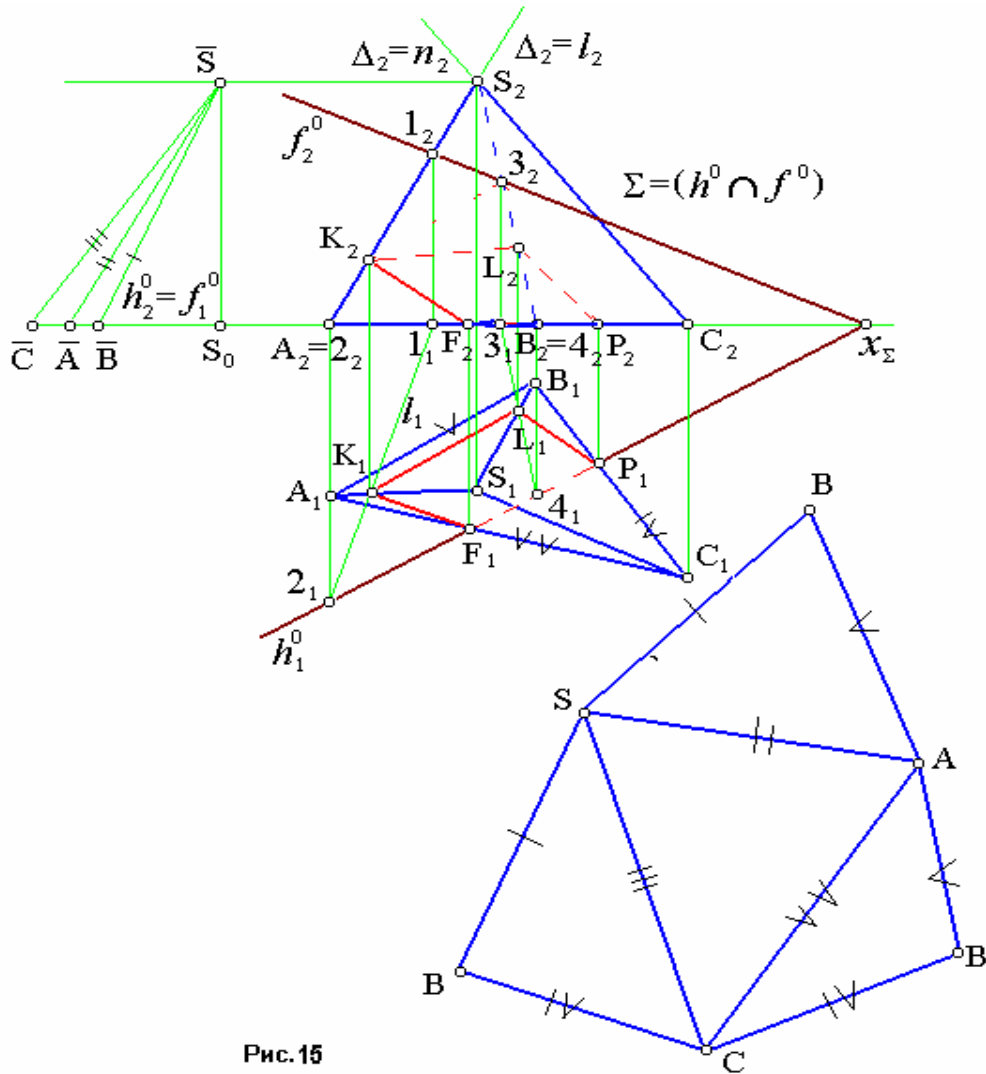


Рис. 15

с общим катетом $\overline{S S_0}$ называется **диаграммой натуральных величин**.

Построение развертки поверхности пирамиды выполняется последовательным построением натуральных величин треугольников SAB, SAC, SBC и ABC , где $[SA]=[S A]$; $[SB]=[S B]$; $[AB]=[A_1 B_1]$ и т.д.

Для построения развертки призмы (рис. 16), каждую боковую ее грань разбиваем диагональю на два треугольника, затем строим диаграмму натуральных величин боковых ребер $|A A'|=|B B'|=|C C'|$ и диагоналей $|A B'|, |B C'|, |A C'|$. Основание призмы - горизонтальная плоскость уровня, поэтому она проецируется на Π_1 в натуральную величину.

Имея натуральные величины всех ребер и диагоналей, строим развертку поверхности призмы как совокупности треугольников определяемых своими сторонами. Этот способ построения развертки призмы называется **способ триангуляции**.

Существуют другие способы построения разверток многогранников:
способ нормальных сечений (для призматических поверхностей, если их боковые ребра являются прямыми уровнями);

способ раскатки (для призматических поверхностей, если их боковые ребра и плоскости оснований являются соответственно прямыми и плоскостями уровня).

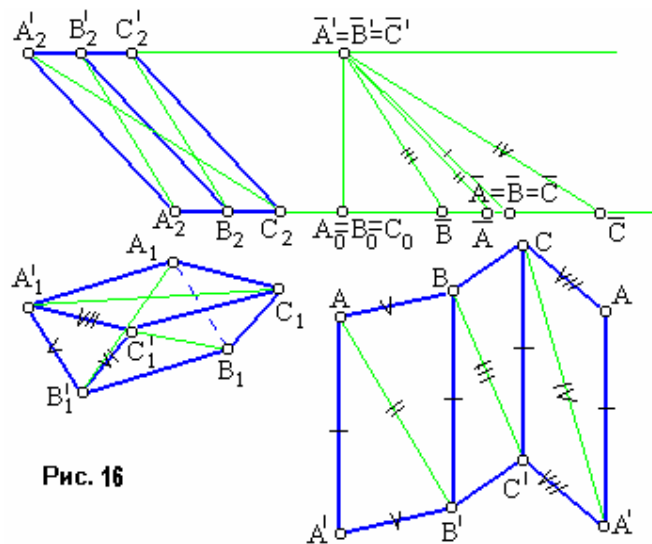


Рис. 16

б) Алгоритм построения приближенных разверток развертывающихся поверхностей.

Построение приближенных разверток развертывающихся поверхностей (конических, цилиндрических и торсовых) сводится к построению точных разверток многогранных поверхностей, вписанных или описанных около данных поверхностей.

Данную поверхность Φ заменяем (аппроксимирующей) многогранной поверхностью $\bar{\Phi}$ и точную развертку поверхности $\bar{\Phi}$ принимаем за развертку поверхности Φ .

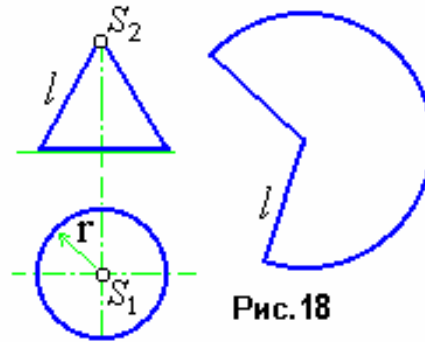
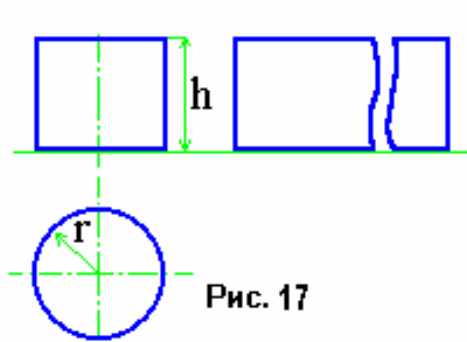
Чтобы построить развертку кругового цилиндра и конуса, возьмем $1/12$ часть окружности основания и отложим ее первый раз на стороне прямоугольника, одна из сторон которого равна длине образующей h , а у конуса - на дуге сектора радиуса равного длине образующей конуса l , 12 раз (рис. 17, 18).

в) Алгоритм построения условных разверток **неразвертывающихся** поверхностей.

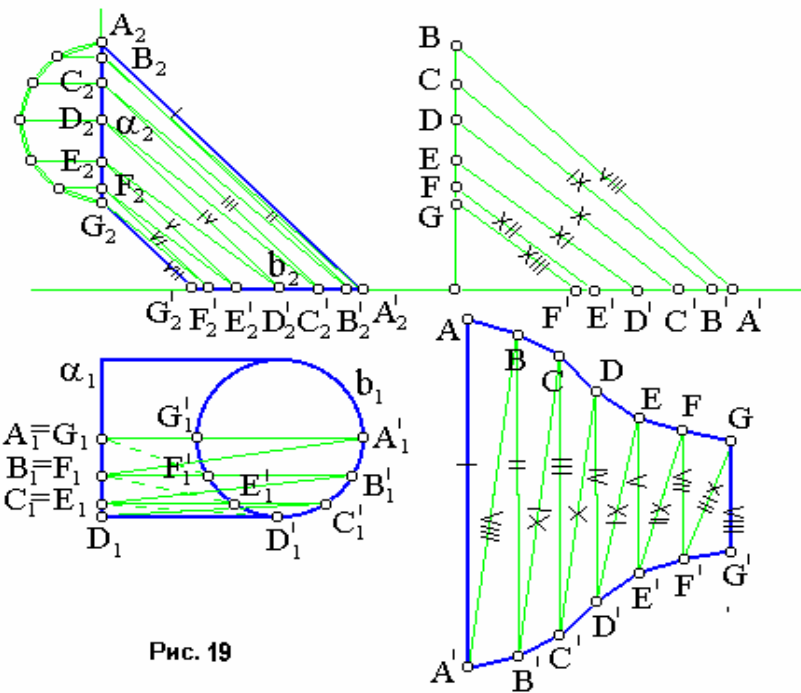
Для неразвертывающихся поверхностей строятся условные развертки.

Построение условной развертки $\tilde{\Phi}$ данной поверхности Φ выполняется в такой последовательности:

- 1) исходя из требования точности построения развертки данная поверхность Φ разделяется на несколько равных или примерно равных частей Φ^i ;
- 2) отсеки Φ^i аппроксимируются отсеками разворачивающихся поверхностей $\bar{\Phi}^i$;
- 3) строятся развертки отсеков поверхностей $\bar{\Phi}^i$, совокупность которых принимаем за условную развертку данной поверхности Φ .



Пример 3. Построить условную развертку отсека цилиндрида $\Phi((a, b, \Pi_2))$ (рис. 19). Отсек цилиндрида применяется для соединения двух цилиндрических трубопроводов с пересекающимися осями. Так как поверхность Φ имеет плоскость симметрии Γ , то построим развертку одной ее половины. Направляющие окружности α , в цилиндрида конгруэнтны, поэтому цилиндрида Φ плоскостями Γ^i разбивается на равные по ширине части Φ^i , ограниченные двумя образующими и дугами направляющих α, b . Например, между



плоскостями Γ_1, Γ_1' расположены два отсека цилиндрида, ограниченные соответственно образующими AA', BB' и GG', FF' , дугами $AB, A'B'$ и $GF, G'F'$ окружностей α, b . Каждый отсек Φ^i цилиндрида аппроксимируется отсеками двух конических поверхностей $\bar{\Phi}^i, \Phi^i$. Для этого соединяем любые две противоположные вершины криволинейных четырехугольников, ограничивающих отсек Φ^i . Так как направляющие конических поверхностей $\bar{\Phi}^i$ и Φ^i -

дуги окружностей α, b – сопрягающими их хордами. Таким образом, по существу развертка данного цилиндрида выполняется способом триангуляции.

В нашем случае образующие AA', BB' , цилиндрида – фронталы. Натуральные величины диагоналей AB', BC' , определяется способом прямоугольного треугольного треугольника путем построения диаграмм натуральных величин. Развертка Φ^- цилиндрида Φ представляет собой фигуру, состоящую из треугольников $ABA', A'BV'$, натуральные величины которых построены по трем сторонам и состыкованы вдоль смежных сторон.

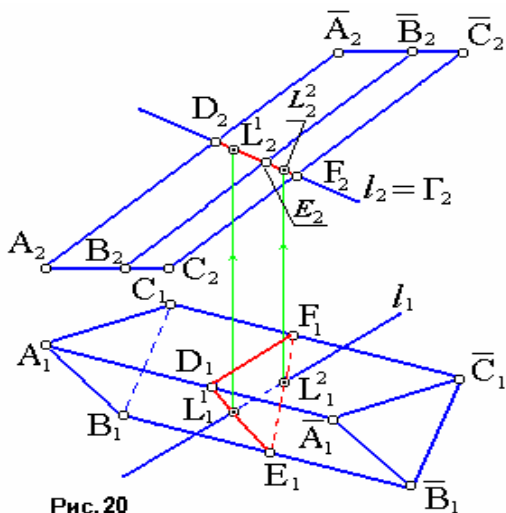


Рис. 20

Построение точек пересечения линии с поверхностью

Построение точек пересечения линии с поверхностью выполняется по общему алгоритму. Покажем это на примере построения точек пересечения прямой $l(l_1, l_2)$ с трехгранной призмой. Реализация этого алгоритма выполнена на рис.20. Прямая $l(l_1, l_2)$ заключена во вспомогательную фронтально проецирующую плоскость Γ_2 , которая пересекает призму $ABC \bar{A} \bar{B} \bar{C}$ по треугольнику DEF , с которым прямая $l(l_1, l_2)$ пересекается в искомых точках L_1, L_2 .

Пример 4. Построить точки пересечения прямой $l(l_1, l_2)$ со сферой $\Phi(O, R)$ (рис.21).

Прямая $l(l_1, l_2)$ заключается в горизонтально проецирующую плоскость Γ_1 , которая пересекает сферу по окружности m . Чтобы не строить фронтальную проекцию m_2 окружности m , являющуюся эллипсом, выполним замену плоскостей проекций Π_2 на $\bar{\Pi}_2$, где $\bar{\Pi}_2 \parallel \Gamma$. Тогда на новую плоскость $\bar{\Pi}_2$ окружность m проецируется в натуральную величину \bar{m}_2 ;

новая проекция \bar{l}_2 прямой $l(l_1, l_2)$ пересекается с \bar{m}_2 в проекциях \bar{L}_2^1, \bar{L}_2^2 искомых точек L^1, L^2 . По линиям связи строим их проекции на исходных плоскостях проекций.

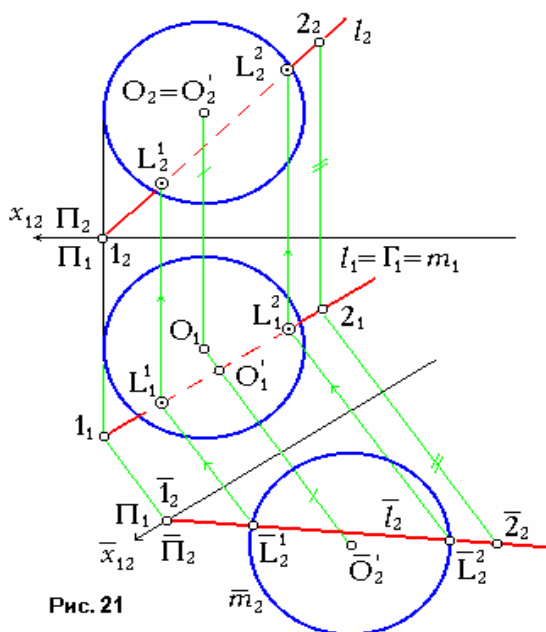


Рис. 21

Сечение поверхности плоскостью

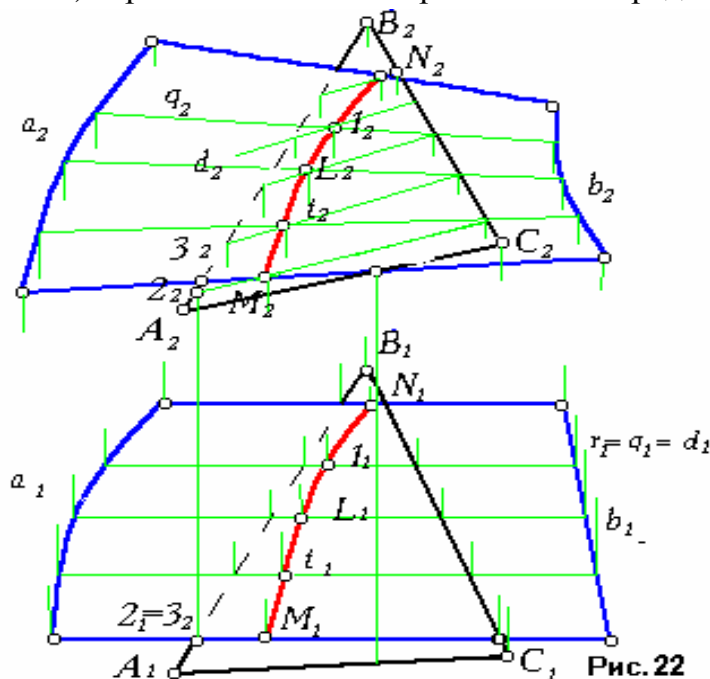
Построение линии пересечения поверхностей является наиболее Интересной и часто встречающейся в инженерной практике позиционной задачей. Она решается введением вспомогательных поверхностей (плоскостей) Γ^i , которые называются **посредниками**. При выборе посредников исходят из того, чтобы они **пересекали данные поверхности по графически простым линиям - прямым и окружностям**. Правильный выбор вспомогательных поверхностей определяет рациональность последующих графических построений. В качестве посредников могут использоваться различные поверхности. Для построения линии пересечения простейших поверхностей в качестве посредников обычно используют плоскости и сферы. Поэтому различают **способ плоскостей** и **способ сфер**.

Если даны две поверхности Δ, Σ и надо найти линию их пересечения, то, используя алгоритм решения позиционных задач: (см. доклад 3, плакат 2):

1) строится линия m^i пересечения посредника γ^i с поверхностью α ;

2) строится линия n^i пересечения посредника γ^i с поверхностью β ;

3) отмечаются точки L^i пересечения линий m^i, n^i между собой, которые принадлежат линии пересечения $\mathbf{I}(\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2)$ данных поверхностей. Эти операции выполняются со всеми посредниками; множество проекций полученных точек определяют проекции l_1, l_2 искомой линии пересечения.



Способ вспомогательных плоскостей

Способ вспомогательных плоскостей применяется для построения линии пересечения таких пар поверхностей, которые пересекаются с семейством посредников по простым линиям (прямым и окружностям).

Пример 5. Построить сечение $\mathbf{I}(\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2)$ отсека коноида $\Phi(a, b, \Pi_2)$ плоскостью общего положения Δ , ограниченной ΔABC (рис. 22).

В качестве посредников Σ выбираем фронтальные плоскости уровня, т. к. они, будучи параллельны плоскости параллелизма Π_2 коноида Φ , которые пересекают последний по образующим. Плоскость посредник Σ пересекает

коноид Φ по образующей $g(g_1, g_2)$, а секущую плоскость Δ - по прямой $d(d_1, d_2)$. Точка $l(1_1, 1_2)$ пересечения g и d принадлежит искомой линии $d(d_1, d_2)$. Точка $l(1_1, 1_2)$ пересечения g и d принадлежит искомой линии $l(1_1, 1_2)$. Экстремальные точки (в нашем случае самая высшая и самая низшая точки) M и N линии пересечения строятся проведением посредников проходящих через граничные образующие коноида.

Задача 6. Построить сечение $l(1_1, 1_2)$ конической поверхности вращения $\Phi(i, n)$ плоскостью общего положения $\Delta (h^\circ \cap f^\circ)$ (рис. 23)

Построение линии пересечения $l(1_1, 1_2)$ начнем с определения ее опорных точек (в нашем случае с определения точек большой и малой оси эллипса) для чего выполним замену плоскостей проекций Π_2 на Π'_2 , где $\Pi'_2 \perp h_1^\circ$. Относительно новой системы Π_1, Π'_2 данная плоскость Δ будет фронтально проецирующей и ее след в новой системе строится по точке $K(K_1, K_2)$. Поэтому ее вырожденная проекция $\bar{\Delta}$ совпадет с проекцией $\bar{l}(1_1, 1_2)$ линии сечения и на ней определятся точки A и B большой оси эллипса.

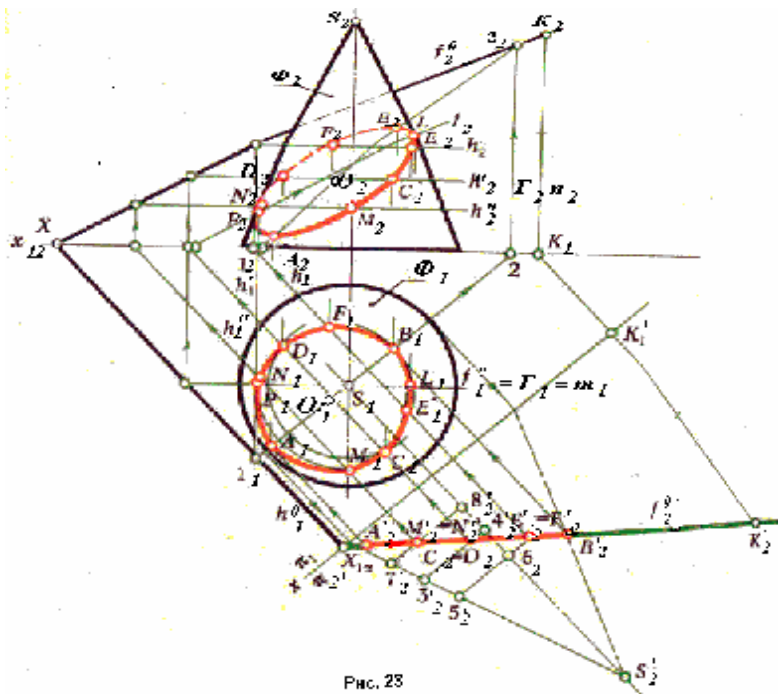


Рис. 23

Так как малая ось делит большую в ее середине, то определяем середину большой оси точку $O(O_1, O_2)$. Через точку O вводим горизонтальную плоскость уровня $\Gamma_2 = h'_2 = n_2$, где h - линия пересечения плоскости Γ_2 с Δ , а n - окружность, по которой пересекаются Γ_2 с Φ . Точки C и D есть точки малой оси эллипса, которые определяются пересечением n_1 и h'_1 . Для определения самой левой L и самой правой точек P вводим фронтальную плоскость уровня $\Gamma_1 = f''_1 = m$, где $f''(f''_1, f''_2)$, $f''_1 = \Delta \cap \Gamma_1$, $m = \Phi \cap \Gamma_1$, где m - очерковая линия конической поверхности Φ . Остальные точки строим, введением горизонтальных плоскостей уровня.

Построение линии пересечения двух поверхностей

Способ плоскостей уровня применяется для построения линии пересечения двух поверхностей, имеющие одноименные графически простые линии уровня (прямые и окружности). На рис.24 показано построение линии $l(I_1, I_2)$ пересечения конической поверхности β с поверхностью вращения $\alpha(i, O'')$. Обе поверхности в качестве горизонталей содержат семейства окружностей, поэтому посредниками возьмем горизонтальные плоскости уровня Γ_2^i . Экстремальные (высшая и низшая) точки L, K линии пересечения определяются проведением общей плоскости симметрии $\xi(i, S)$ данных поверхностей. Точками видимости на Π_2 будут эти же точки, так как они принадлежат очерковым линиям поверхности конуса и поверхности вращения на Π_2 . Точки видимости E_1 и F_1 на Π_1 определяются проведением посредника Γ_2'' , проходящего через центр поверхности вращения. Другие точки A, B, C, D и M линии пересечения $l(I_1, I_2)$ определяются проведением горизонтальных плоскостей уровня Γ_2^i . Так как общая плоскость симметрии ξ данных поверхностей не параллельна Π_2 , то на Π_2 видимая и невидимая ветви проекции линии l_2 линии пересечения не совпадут и проекция дуги $L_2 F_2 K_2$ линии пересечения будет видимой, а проекция дуги $L_2 E_2 K_2$ - невидимой. На Π_1 проекция дуги $E_1 L_1 F_1$ линии пересечения видима, а проекция дуги $E_1 K_1 F_1$ - невидимая.

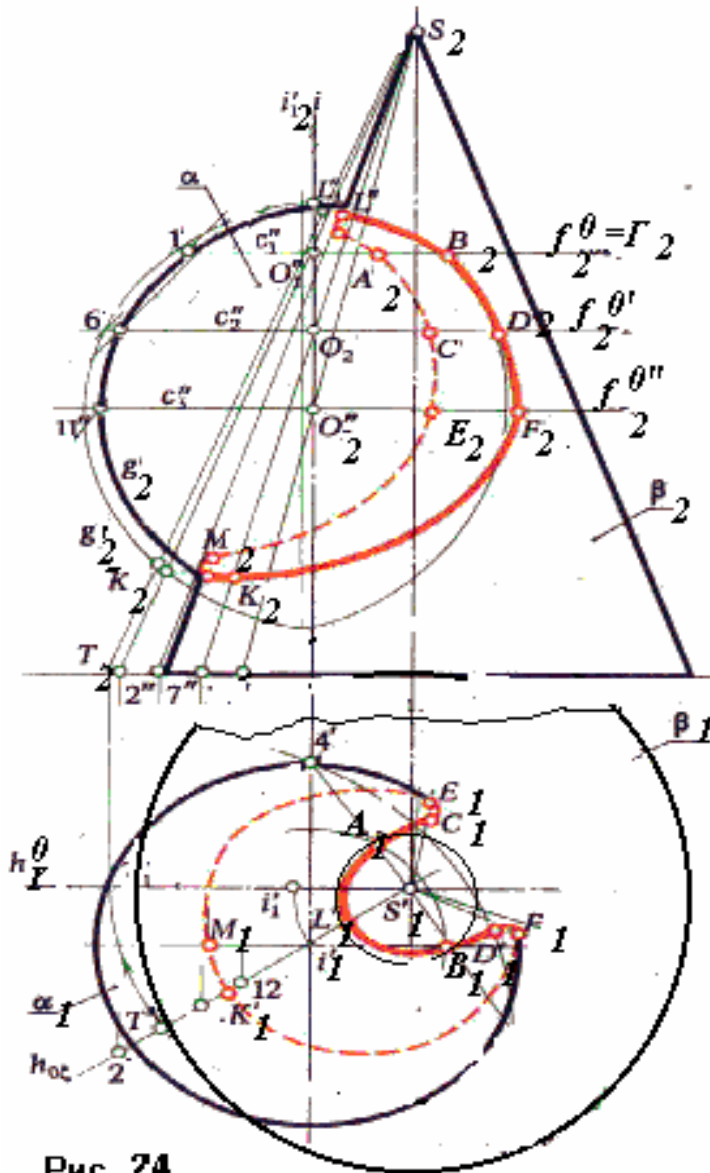


Рис. 24

Рис. 24

Способ концентрических сфер

Способ концентрических сфер применяется для построения линии пересечения двух поверхностей вращения, имеющих общую плоскость симметрии, которая должна быть плоскостью уровня.

В этом случае оси i, i' данных поверхностей a, b принадлежат общей

плоскости симметрии Σ и поэтому пересекаются в точке O - центре вспомогательных сфер Γ^{i*} . Вспомогательные сферы Γ^{i*} пересекаются с данными поверхностями a, b по окружностям. Если плоскость симметрии Σ является плоскостью уровня, то оси i, i' также будут прямыми уровня или проецирующими. Тогда указанные окружности, плоскости которых будут проецирующими на одну из плоскостей проекций в отрезке прямых (рис.25).

Алгоритм способа концентрических сфер рассмотрим на примере построения линии пересечения $\mathbf{l}(I_1, I_2)$ поверхности вращения a (i, a) с конической поверхностью вращения b (i', b).

Отмечаем точку O ($i \cap j$) - цент вспомогательных сфер - посредников Γ^i . Поверхности Φ, Δ имеют общую плоскость симметрии $\Sigma \parallel \Pi_2$, которая пересекает данные поверхности по очерковым линия на Π_2 , точки пересечения A, B, C, D которые принадлежат искомой линии $\mathbf{l}(I_1, I_2)$. Точка A наиболее

удаленная от точки O , поэтому отрезок OA определяет R_{\max} одной граничной сферы Γ (R_{\max} - верхний предел изменения параметра (радиуса) вспомогательных сфер).

Для определения R_{\min} другой граничной сферы $\bar{\Gamma}$ из точки O_2 строим нормали на очерковые линии данных поверхностей: больший из двух отрезков нормалей определяет R_{\min} , т.е. вспомогательная сфера $\bar{\Gamma}$ радиуса R_{\min} будет касаться одной из поверхностей и пересекать другую. Радиусы R_i вспомогательных сфер Γ^i должны удовлетворять неравенству

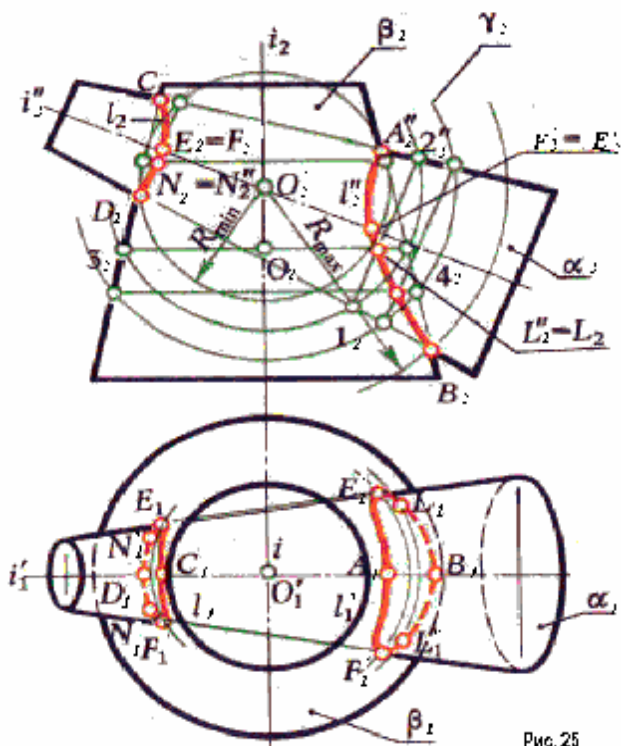


Рис. 25

$$R_{\min} < R^i \leq R_{\max} .$$

Здесь следует обратить внимание на один момент.

Ту из двух поверхностей a, b , которой касается вспомогательная сфера $\bar{\Gamma}$ минимального радиуса R_{\min} , назовем для наглядности «толстой», а другую - «тонкой». На нашем рисунке поверхность вращения b будет «толстой», а коническая поверхность a - «тонкой». Очевидно, «тонкая» поверхность a по одной замкнутой кривой «входит» в «толстую» поверхность b и по другой замкнутой кривой «выходит» из нее. Такое наглядное представление помогает

строить проекции линии пересечения после построения множества точек искомой линии пересечения.

На рис. 25 показаны все построения, выполненные для одного посредника Γ^i . Она пересекает поверхность b по окружностям g, g' , а поверхность a - по окружностям d, d' . Эти окружности, попарно пересекаясь, определяют действительные точки $2=2', 3=3'$ и мнимые точки искомой линии $\mathbf{I}(\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2)$. Горизонтальные проекции действительных точек построены по условию принадлежности поверхности $b: 2, 2', 3, 3' \in g$. В силу параллельности плоскости симметрии Σ фронтальной плоскости проекций видимая и невидимая ветви фронтальной проекции l_2 линии пересечения $\mathbf{I}(\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2)$ накладываются друг на друга. Поэтому на чертеже \mathbf{I}_2 изображается линией видимого контура.

Видимость на Π_1 ограничивается конической поверхностью a . Для определения точек видимости M_1, M_1', N_1, N_1' построены фронтальные проекции $m_2=m_2'$ очерковых образующих m_1, m_1' конической поверхности Δ . Горизонтальные проекции точек $M, N = l \cap m, m'$ ($\{M_2, N_2\} m_2 \cap l_2$) на Π_1 разделяют видимые и невидимые участки горизонтальной проекции l_1 искомой линии $\mathbf{I}(\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2)$.

Выводы:

1. Мир поверхностей простирается от элементарной, отличающейся простотой и математической строгостью плоскости до сложнейших, причудливых форм криволинейных поверхностей, не поддающихся точному математическому описанию. Поверхности, к которым нельзя применить математические закономерности, обычно задают достаточно плотной сетью линий, принадлежащих этой поверхности. Совокупность таких линий называется дискретным каркасом поверхности.

2. Одним из распространенных методов конструирования поверхностей является метод конструирования поверхностей с помощью непрерывного каркаса из плоских или пространственных линий. Применение цветных рисунков при конструировании поверхностей позволяет углубить восприятие и понимание их, способствуя прочности усвоения изучаемого материала.

Литература:

1. Фролов С.А. Начертательная геометрия. М.– Машиностроение. 1990.-247 с.
2. Иванов Г.С. Теоретические основы начертательной геометрии. М.: Машиностроение, 1998. - 157 с.
3. Вертинская Н.Д. Лекции по начертательной геометрии. Иркутск, Изд-во ИрГТУ. 2008. - 67 с.