

ОСНОВЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Н. Д. Вертинская, д. т. н., профессор

Иркутский государственный технический университет,

г. Иркутск, ул. Лермонтова, 83

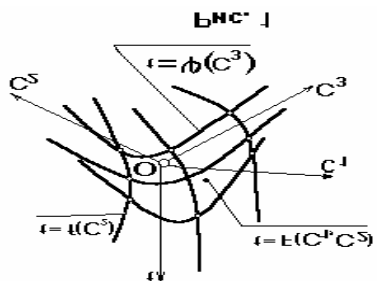
stevia@mail.ru

Введение

В последние годы математическое моделирование на базе конструктивной начертательной геометрии было распространено на технологические процессы, факторы, параметры и компоненты которых могут быть представлены в виде многомерных многообразий [1]. Такие задачи, которые возникают на практике в процессах химических реакций, физических явлений, социально-экономических событий и т. п., невозможно решать традиционными методами математического моделирования, так как число переменных величин, отображающих соответствующие многомерные функциональные зависимости, превышает размерность реального физического пространства, в котором протекают эти процессы. Вместе с тем, начертательная геометрия имеет возможность рассматривать многомерные многообразия в качестве функциональных пространств многих переменных, что и позволяет ей наглядно представить такие процессы в виде уравнений поверхностей и их геометрических моделей, из которых с помощью современной компьютерной техники возможно оперативно прогнозировать оптимальные режимы, параметры исследуемых процессов. Теоретическими основами современной начертательной геометрии являются проективные преобразования прямой и коник, коллинеации и корреляции, в том числе поляритеты и нуль-системы, проективные преобразования коник, норм-кривых и квадрик и т. д. Как известно [2], кремоновы преобразования пространства классифицируются по виду их ассоциированных комплексов, т. е. множества прямых, соединяющих точки одного пространства с соответствующими точками второго. С точки зрения начертательной геометрии для моделирования не реагирующих и реагирующих химических реакций существует две методики математического моделирования.

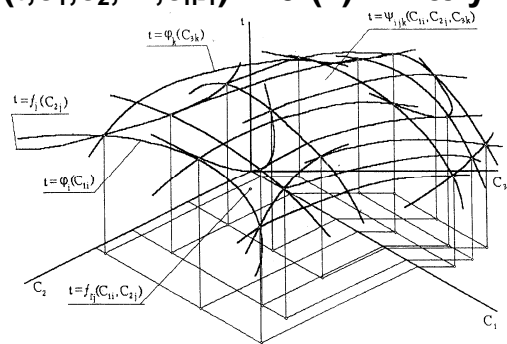
Первая методика. Моделируются не реагирующие химические вещества – в этом случае моделируется гиперповерхность, натянутая на связку сечений, т. е. сечений проходящих через общую точку (рис. 1).

Вторая методика. Моделируются реагирующие химические вещества – в этом случае мы получаем гиперповерхность, натянутую на пучок сечений с несобственной осью, т. е. сечений, расположенных параллельно координатным плоскостям (рис.2). Здесь сечения $t=j(C_1)$ располагаются параллельно координатной плоскости tOC_1 и получают новые сечения $t = f(C_2)$, которые параллельны координатной плоскости tOC_2 и т.д.



Применение этих методик позволяет оптимизировать изучаемый процесс, планировать исследования в нужном направлении, снижать трудоемкость, создавать наглядность изучаемого процесса. Для математического моделирования на базе начертательной геометрии необходимо иметь

Рис. 1 табличные данные, полученные в результате измерений, наблюдений или вычислений. При наличии табличных данных мы можем их построить на плоскости, выбрав соответственные оси координат. В общем виде задачу многомерного математического моделирования многофакторных и многопараметрических процессов в многокомпонентных системах представим в следующем геометрическом виде: в результате экспериментальных исследований, или статистических данных имеем дискретные значения параметров, зависящих от $n-1$ независимых или независимых друг от друга аргументов (компонентов) C_1, C_2, \dots, C_{n-1} . Необходимо смоделировать гиперповерхность $F(t, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}) = 0$ (1) и получить ее уравнение. Геометрическая



интерпретация поставленной задачи заключается в следующем: в n -мерном пространстве имеем набор фиксированных точек, на которые необходимо натянуть гиперповерхность и получить ее уравнение. Эта моделируемая гиперповерхность должна

Рис. 2 пересекать, например, вертикальную ось данной системы координат в одной точке для обеспечения однозначного соответствия между значением функции и значениями аргументов C_1, C_2, \dots, C_{n-1} . Поэтому зависимость (1) должна моделировать моноидальную

гиперповерхность с вершиной в несобственной точке вертикальной оси ot . Моделируемая гиперповерхность (1) должна нести дискретный каркас одномерных образующих (рис. 2.) $t=f(c_{1i})$, (2) где $i = 1, 2 \dots n-1$, двумерных образующих (2-поверхностей) другого параметра c_{2j} ; $t=j(c_{1i}, c_{2j})$, (3) где $i=1, 2 \dots n-1$; $j=1, 2 \dots n-1$, трехмерных образующих (3-поверхностей) параметров c_{1i}, c_{2j}, c_{3k} ; $t=y(c_{1i}, c_{2j}, c_{3k})$, (4) где $i=1, 2 \dots n-1$; $j=1, 2 \dots n-1$; $k = 1, 2 \dots n-1$ и т.д.. Обычно в качестве аппроксимирующих и интерполирующих кривых линий одномерных образующих и параметроносителей двумерных, трехмерных и т. д. образующих моделируемых гиперповерхностей используют обводы или куски кривых линий, позволяющие устанавливать однозначное соответствие между моделируемыми переменными. При этом необходимо, чтобы в одном направлении, например, оси ординат, сохранялось взаимно однозначное соответствие, необходимое требование для конструирования единственной поверхности. Общеизвестно, что единственная поверхность определяется тремя ее сечениями. Три сечения могут принадлежать пучку плоскостей с собственной или несобственной осью или связке плоскостей. Можно высказать следующую теорему (синтетический способ вывода уравнения поверхности второго порядка), которая доказана автором: сумма уравнений трех ортогональных сечений, инцидентных точке данной поверхности, дает уравнение этой поверхности [2].

Для пояснения высказанных положений детально рассмотрим две особенности геометрического моделирования многомерных функциональных зависимостей:

1. Моделирование гиперповерхностей, инцидентных трем сечениям связки гиперплоскостей

При использовании первой методики моделирования гиперповерхности $F(t, C_{1i}, C_{2i}, C_{3i})=0$ в R^4 берем экспериментальную точку $A(t, C_1, C_2, C_3)$ (рис. 3), через которую проводим три взаимно перпендикулярные плоскости a_i ($i=1, 2, 3$), в каждой из которых лежат точки данных массивов точек. В каждой из плоскостей a_i ($i=1, 2, 3$) моделируется аппроксимирующие или интерполирующие одномерные образующие и параметроносители моделируемой гиперповерхности. В

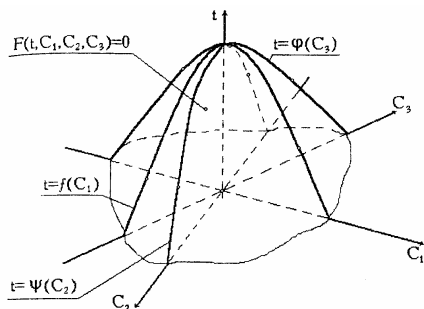


Рис. 3

качестве одномерных образующих возьмем интерполируемые

параболы второго порядка, для чего в каждой плоскости a_i ($i = 1, 2, 3$) выбираем по три узла инцидентности, например [1]:

$A_1(t_1, C_{11}, C_{12}, C_{13}), A_1(t_1, C_{11}, C_{12}, C_{13}), A_1(t_1, C_{11}, C_{12}, C_{13})$ – в плоскости a_1 ,

$A_2(t_2, C_{21}, C_{22}, C_{23}), A_2(t_2, C_{21}, C_{22}, C_{23}), A_2(t_2, C_{21}, C_{22}, C_{23})$ – в плоскости a_2 ,

$A_3(t_3, C_{31}, C_{32}, C_{33}), A_3(t_3, C_{31}, C_{32}, C_{33}), A_3(t_3, C_{31}, C_{32}, C_{33})$ – в плоскости a_3 .

В каждой плоскости a_i ($i = 1, 2, 3$) плоские массивы данных точек моделируем параболой второго порядка:

$$t_{0i} = f_1(C_{1i}) = a_{0i} + a_{1i}C_{1i} + a_{2i}C_{1i}^2; (5)$$

$$t_{1i} = f_2(C_{2i}) = b_{0i} + b_{1i}C_{2i} + b_{2i}C_{2i}^2; (6)$$

$$t_{2i} = f_3(C_{3i}) = d_{0i} + d_{1i}C_{3i} + d_{2i}C_{3i}^2; (7)$$

коэффициенты для которых вычисляем решением трех систем трех уравнений с тремя неизвестными, получаемых при подстановке в уравнения (5), (6), (7) координат точек A_{1i}, A_{2i}, A_{3i} ($i = 1, 2, 3$). Для вывода уравнения моделируемой поверхности суммируем уравнения (2), (3), (4) и получаем уравнение поверхности второго порядка, натянутой на девять экспериментальных (данных) точки:

$$t = \frac{1}{3} ((a_2 C_1^2 + b_2 C_2^2 + d_2 C_3^2) + (a_1 C_1 + b_1 C_2 + d_1 C_3) + (a_0 + b_0 + d_0)). (8)$$

Моделируемая поверхность (8) будет эллиптическим параболоидом. По индукции эта методика распространяется на моделирование 5-ти, 6-ти ...n параметрических зависимостей. Таким образом, имея небольшое число экспериментальных точек в небольшой окрестности исследования, мы получим модели гиперповерхности второго порядка, которые будут натянуты на девять экспериментальных точек, гиперповерхности тем точнее будут моделировать исследуемый процесс, чем меньше будет окрестность исследования. Это значит, что, для построения всей исследуемой гиперповерхности с заданной точностью необходимо провести экспериментальные исследования по всему пространству исследования. Ясно, что эта моделируемая составная гиперповерхность (обвод нулевого порядка гладкости), совпадает с исследуемой гиперповерхностью при увеличении экспериментальных точек до ∞ . Из выше изложенного следует, что моделируемая гиперповерхность не может отобразить всей исследуемой гиперповерхности, но для моделирования небольшой окрестности исследуемой гиперповерхности достаточно девяти экспериментальных точек.

2. Моделирование гиперповерхностей,
инцидентных трем сечениям пучка
гиперплоскостей с несобственной осью

Рассмотрим моделирование гиперповерхности $F(t_i, C_{1i}, C_{2i}, C_{3i})=0$, для чего в R^3 (четырёхмерном пространстве) зададим четыре взаимно перпендикулярные оси Ot , OC_1 , OC_2 , OC_3 (см. рис. 2). Параллельно одной из координатных осей, например, оси OC_2 проводим три параллельные плоскости $a_i (i=1,2, 3)$, каждая из которых содержит по массиву экспериментальных (данных) точек. Через данный массив точек каждой плоскости $a_i (i=1, 2, 3)$ моделируются аппроксимирующие или интерполирующие кривые линии - одномерные образующие гиперповерхности и т.д. Для конкретизации поставленной задачи возьмем в качестве одномерных образующих и параметроносителей двумерных, трехмерных образующих интерполирующие параболы второго порядка. Тогда в каждой плоскости $a_i (i=1,2,3)$ будем выбирать по три узла интерполирования:

$$A_{i1}(t_{jp1}, C_{ij1}, C_{ij2}, C_{ij3}), A_{i2}(t_{jp2}, C_{ij1}, C_{ij2}, C_{ij3}), A_{i3}(t_{jp3}, C_{ij1}, C_{ij2}, C_{ij3}),$$

через которые в каждой плоскости $a_i (i=1, 2, 3)$ проводим интерполирующие параболы второго порядка

$$t_{jp} = a_{0k} + a_{1k}C_{ij} + a_{2k}C_{ij}^2, \quad (9) \text{ где } j=1,2,3; i=0,1,2; k=1,2,3; p=1,2,\dots$$

Подставляя в уравнение (9) координаты узлов интерполирования $A_i (i=1,2,3)$, получим три системы уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} t_{01} = a_{01} + a_{02}C_{101} + a_{03}C_{101}^2, \\ t_{02} = a_{01} + a_{02}C_{102} + a_{03}C_{111}^2, \dots \\ t_{03} = a_{01} + a_{02}C_{121} + a_{03}C_{121}^2; \end{array} \right. \quad (10) \quad \left\{ \begin{array}{l} t_{11} = a_{11} + a_{12}C_{102} + a_{13}C_{102}^2, \\ t_{12} = a_{11} + a_{12}C_{112} + a_{13}C_{112}^2, \dots \\ t_{13} = a_{11} + a_{12}C_{122} + a_{13}C_{122}^2; \end{array} \right. \quad (11) \quad \left\{ \begin{array}{l} t_{21} = a_{21} + a_{22}C_{103} + a_{23}C_{103}^2, \\ t_{22} = a_{21} + a_{22}C_{113} + a_{23}C_{113}^2, \\ t_{23} = a_{21} + a_{22}C_{123} + a_{23}C_{123}^2; \end{array} \right. \quad (12)$$

решая которые вычислим значения коэффициентов $a_{ik} (k=1,2,3; i=0,1,2)$. Далее на полученные три параболы второго порядка где $i=1,2,3$, натягиваем двумерную поверхность $t = F(C_{1i}, C_{2i})$, для чего дискретные значения коэффициентов $a_{0k}, a_{1k}, a_{2i} (k=1,2,3)$ интерполируем параболами второго порядка

$$a_{0i} = b_{01} + b_{02}C_{2j1} + b_{03}C_{2j1}^2, \quad (13)$$

$$a_{1i} = b_{11} + b_{12}C_{2j2} + b_{13}C_{2j2}^2, \quad (14)$$

$$a_{2i} = b_{21} + b_{22}C_{2j3} + b_{23}C_{2j3}^2. \quad (15)$$

Для этого, например, в уравнение (9) подставляем вычисленные значения коэффициентов $a_{jk} (k=1,2,3)$ и координаты трех точек, решая полученную систему уравнений с тремя неизвестными b_{0i}, b_{1i}, b_{2i} в результате вычислим значения коэффициентов $b_{0i} (i=1,2,3)$. Аналогично вычислим значения коэффициентов $b_{1i}, b_{2i} (i=1,2,3)$ остальных двух систем уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{01} = b_{01} + b_{02}C_{201} + b_{03}C_{201}^2, \\ a_{02} = b_{01} + b_{02}C_{211} + b_{03}C_{211}^2, \\ a_{03} = b_{01} + b_{02}C_{221} + b_{03}C_{221}^2; \end{array} \right. \quad (16) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{11} = b_{11} + b_{12}C_{202} + b_{13}C_{202}^2, \\ a_{12} = b_{11} + b_{12}C_{212} + b_{13}C_{212}^2, \\ a_{13} = b_{11} + b_{12}C_{222} + b_{13}C_{222}^2; \end{array} \right. \quad (17) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{21} = b_{21} + b_{22}C_{203} + b_{23}C_{203}^2, \\ a_{22} = b_{21} + b_{22}C_{213} + b_{23}C_{213}^2, \\ a_{23} = b_{21} + b_{22}C_{223} + b_{23}C_{223}^2. \end{array} \right. \quad (18)$$

коэффициентов b_{ij} ($i = 1,2,3$ и $j=0, 1,2,$) в уравнения (13), (14) и (15) получим непрерывные функции $a_{0i}=f_0(C_{2i})$, (19) $a_{1i}=f_1(C_{2i})$, (20) $a_{2i}=f_2(C_{2i})$, (21) где ($i=1,2,3$). Далее, подставив вычисленные значения коэффициентов a_{0i} , a_{1i} , a_{2i} , из (19)- (21) в уравнение параболы второго порядка, получим уравнение двумерной (2-поверхности) образующей моделируемой гиперповерхности $y(t, C_{1i}, C_{2i}) = 0$. (22) Полученное уравнение (14) имеет девять коэффициентов b_{ij} ($j=0,1,2$ и $i=1,2,3$), которые в свою очередь являются функциями аргумента C_{3i} , где $i=1,2,3$, $b_{ij}=y_{ij}(C_{3i})$. (23)

Непрерывные законы изменения параметров $y(C_3)$ зададим также параболлами второго порядка, инцидентными трем узлам интерполирования

$$b_{0i}=d_{01}+d_{11}C_{3i}+d_{21}C_{3i}^2; \quad (24)$$

$$b_{1i}=d_{02}+d_{12}C_{3i}+d_{22}C_{3i}^2; \quad (25)$$

$$b_{2i}=d_{03}+d_{13}C_{3i}+d_{23}C_{3i}^2. \quad (26)$$

Как и раньше, значения коэффициентов d_{ij} ($i=1,2,3$ и $j= 0,1,2$) вычисляем решением трех систем из трех уравнений с тремя неизвестными. Подставив вычисленные значения коэффициентов d_{ij} ($i=1,2,3$ и $j=0,1, 2$) в уравнения (24), (25) и (26), получим уравнения непрерывных законов изменения коэффициентов b_{ij} . Значения вычисленных коэффициентов b_{ij} подставим в уравнение, например, (24) и получим непрерывные законы изменения коэффициентов a_{0i} , a_{1i} , a_{2i} , подставив значения которых в уравнение параболлы второго порядка, получим уравнение моделируемой гиперповерхности $F(t_i, C_{1i}, C_{2i}, C_{3i})=0$. В итоге, в качестве модели изучаемого процесса получим уравнение гиперповерхности моноидального типа шестого порядка с пятикратной несобственной точкой оси O_t , натянутой на 27 данных точек. Эту методику по индукции можно распространить на моделирование 5-ти, 6-ти,....., переменных, что и позволяет ей наглядно представить такие процессы в виде уравнений поверхностей и их геометрических моделей, из которых с помощью современной компьютерной техники возможно оперативно прогнозировать оптимальные режимы, параметры исследуемых процессов [2].

Необходимо отметить, что для получения модели и написания ее уравнения, по рассмотренной методике, необходимо иметь в распоряжении не менее 27-ми экспериментальных (данных) точек для моделирования гиперповерхностей в четырехмерном пространстве. Существенным обстоятельством применения этой методики моделирования и вывода уравнения гиперповерхности

является равномерное распределение экспериментальных (данных) точек по всему моделируемому пространству. Другими словами, описанная методика моделирования гиперповерхности требует большого числа экспериментов. Ясно, что, с увеличением числа экспериментальных точек повышается точность моделируемой гиперповерхности, то есть, совпадение исследуемой поверхности с моделью произойдет при числе экспериментальных точек, равном ∞ .

Так как математическое моделирование на базе конструктивной геометрии является эвристическим, то есть основано на способности выявлять функциональные зависимости по многомерным экспериментальным значениям, то это обстоятельство позволило разработать авторский спецкурс для факультативной подготовки технологов по второй специальности [3]. В спецкурс включены лабораторные исследования, позволяющие получение экспериментальными методами многомерных массивов точек и моделирования на их основе реальных электрохимических, биопараметрических и других технологических процессов [4].

Выводы:

1. Начертательная геометрия решает прямые и обратные задачи, которые заключаются в следующем: по данной поверхности на носителе (кривой (прямой)) линии, поверхности (плоскости)) с помощью аппарата проецирования получить модели; по данной модели и аппарату проецирования сконструировать поверхность. При решении прямой задачи данная поверхность расслаивается в пучке плоскостей с собственной или несобственной осью.

2. Геометрическое моделирование, решая обратную задачу – по данным моделям, которые расположены в пучке плоскостей с собственной или несобственной осью, конструирует поверхности или, с аналитической точки зрения, выводит уравнения поверхностей. В этом случае в качестве моделей выступают табличные данные, устанавливающие на осях системы координат определенные соотношения.

Литература:

- 1.Вертинская Н. Д. Математическое моделирование многофакторных и многопараметрических процессов в многокомпонентных системах. ИргТУ, 2001.- с. 289.
2. Вертинская Н.Д. Математическое моделирование многофакторных и многопараметрических процессов в многокомпонентных системах на базе конструктивной геометрии: Лекции. - Иркутск: Изд-во ИргТУ, 2009. - Ч. 1. - 230 с.
- 3.Вертинская Н. Д. Авторский факультативный спецкурс как способ подготовки в высшей школе творческой личности. Сб. статей. II Всесибирского Конгресса женщин – математиков. Красноярск. - 2002. - С. 13 – 19.
- 4.Вертинская Н. Д. и др. Математическое моделирование технологических процессов на базе конструктивной геометрии Часть 2-я. (лабораторный практикум), Иркутск: Изд. ИргТУ, 2007.–176 с.