ИСПОЛНЕНИЕ КЛАССИФИКАЦИЙ ПРЯМЫХ ПЛОСКОСТЕЙ В НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ, С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЦВЕТНЫХ РИСУНКОВ

Вертинская Н.Д.
Иркутский государственный технический университет
stevia@mail.ru

Типовые программы по начертательной геометрии в отечественных ВУЗ,ах рассчитаны на студентов с определенной начальной подготовкой, которой они по ряду объективных причин в действительности не обладают. Данное обстоятельство значительно затрудняет у них формирование пространственного воображения. Эту задачу, как это автор обнаружила на собственном опыте работы, значительно облегчает применение в процессе обучения цветных чертежей.

В докладе рассмотрен вопрос классификация прямых и плоскостей с применением цветных чертежей и выполнена компактная классификация прямых и плоскостей, фактически являющаяся справочником для дальнейшего изучения курса начертательной геометрии.

Предмет начертательная геометрия

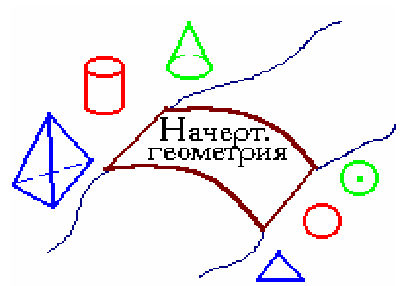
Начертательная геометрия, что это такое?

Название этой науки состоит из двух слов. Слово геометрия связано с математикой, поэтому начертательная геометрия относится к математическим наукам. Определение н а ч е р т а т е л ь н а я роднит ее с древне - русским словом «черта», породившем в последствии термин «чертеж» - основной графический документ, используемый в различных областях техники для изготовления машин и приборов, при возведении зданий и сооружений.

Предметом изучения начертательной геометрии являются не реальные представители живой природы или объектов неорганического мира, а условные модели - геометрические фигуры.

Большинство геометрических фигур имеют три измерения. Для отображения трехмерных образов на плоскость необходимо иметь способы, позволяющие преобразовывать трехмерные фигуры в однозначно соответствующие им фигуры, имеющие два измерения, для воспроизводства по чертежу пространственных объектов.

В связи с этим появилась необходимость в создании новой науки, перебрасывающей мост между трехмерным пространством (стереометрией) (R^3) и плоскостью чертежа (планиметрией) (R^2). Такой наукой явилась начертательная геометрия. Наведения моста между (R^3) и (R^2) осуществляет начертательная геометрия с помощью метода проецирования, составляющего теоретическую основу начертательной геометрии



Плакат 1.

(плакат 1). Официальной датой рождения проективного метода в его основном виде считается 1795 г. Место рождения – столица Франции Париж. Отец – французский ученый Гаспар Монж.

В процессе проецирования участвуют:

-оригинал,

- аппарат проецирования,

- модель,

- носитель модели.

Начертательная геометрия решает две задачи:

прямую задачу– по оригиналу и аппарату проецирования получить модель, **обратную задачу**–по модели и аппарату проецирования воспроизвести оригинал.

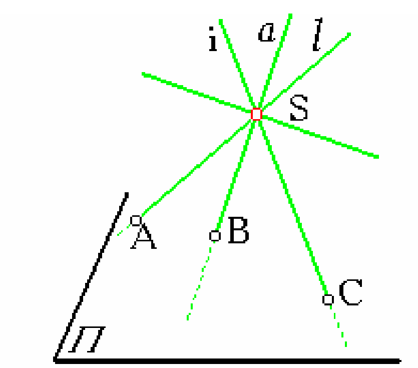
В качестве оригинала в начертательной геометрии, в основном, используется точка, реже прямая.

В качестве аппарата проецирования используются проецирующие многообразия, позволяющие через точку пространства проводить один элемент многообразия:

-одномерные многообразия (кривые, в частном случае, прямые);

-двумерные многообразия (поверхности, в частном случае, плоскости).

В начертательной геометрии используются в качестве аппарата проецирования одномерные многообразия прямых линий, которыми являются конгруэнции прямых К*г*(n,k) и комплексы прямых Km(n). Конгруэнция прямых К*г*(n, k) характеризуется порядком n число прямых конгруэнции, инцидентных (прохода-щих через произвольную точку пространства) и классом k (число прямых конгруэнции, инцидентных произвольной плоскости пространства). В качестве аппарата проецирования целесообразно использовать конгруэнции прямых первого порядка К*г*(1,k), чтобы через точку пространства проходила единственная проецирующая прямая. Частным случаем конгруэнции прямых К*г*(1,k) являются конгруэнции первого класса К*г*(1,1), которая может распадаться на связку прямых К*г*(1,0) (множество прямых пространства инцидентных одной точке, например, (S) –обозначение связки прямых) (рис. 1) и на плоское поле прямых К*г*(0,1) (множество прямых плоскости).



$i, a, l, \ldots \subset (S), i \cap \Pi = C$

$a \cap \Pi = B$

Рис. 1

Через произвольную точку P пространства проходит множество прямых пространства, Km(n)-определяется порядком конической поверхности, которые образуют конус комплекса с вершиной P Km(n). Каждый комплекс характеризуется его степенью n. Степень комплекса, выделяемой из комплекса произвольной точкой P. Частным случаем комплекса прямых Km(n) является комплекс Km(1), когда направляющая b^n конуса - прямая.

Носителем модели может быть:

- кривая (прямая);
- поверхность (плоскость).

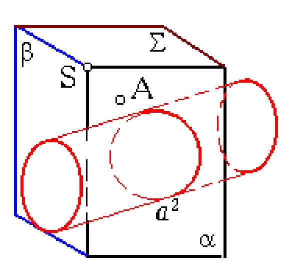
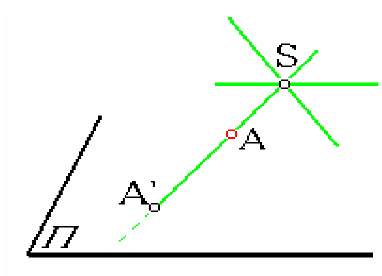


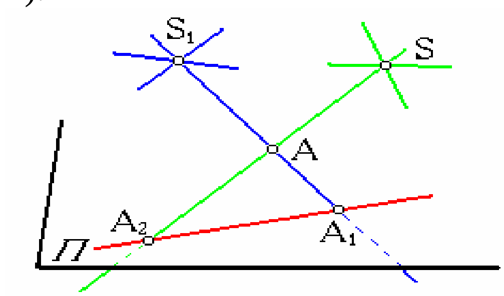
Рис. 2

Моделью точки может быть одна точка, две точки, три точки и т. д. в зависимости от аппарата проецирования и носителя модели, например, если аппарат проецирования будет состоять из связки плоскостей (S) (множество плоскостей пространства инцидентных одной точке), а носителем модели–цилиндрическая поверхность второго порядка, то моделью точки A будет окружность a^2 (рис. 2). Рассмотрим процесс проецирования, например, при проецировании точки A на плоскость П связкой (S) прямых (рис.3), точка A (оригинал) из связки (S) прямых выделяет один луч, который спроецирует точку A на плоскость П в точку A* (модель). При этом получается, одной точке A пространства R^3, имеющего мощность ∞^3, (т.к. точка пространства определяется тремя координатами), ставится в соответствие одна точка A* плоскости R^2, имеющей мощность ∞^2, (т.к. точка на плоскости определяется двумя координатами), (прямая задача), однако обратная задача неразрешимая, т.к. одной точке A* плоскости П (R^2) соответствует множество точек пространства, принадлежащих лучу (AS]. Это противоречие возникает из-за неравенства мощностей оригинала A-∞^3 и модели A*-∞^2. Таким образом возникает необходимость проецирования точки A пространства из двух центров двумя связками (S_1) и (S_2) прямых (рис. 4).



$A \to \infty^3;\ A' \to \infty^2$

Рис.3



$A \to \infty^3;\ \left.\begin{matrix} A_1 \to \infty^2 \\ A_2 \to \infty^1 \end{matrix}\right\} \infty^3$

Рис.4

Получаем, что мощность оригинала A - ∞^3 равна мощности модели ∞^3. Так как при определении одной точки точек A_1 расходуется ∞^2, а точка A_2 определяется на прямой (A_1A_2), что соответствует -∞^1.

Признак (критерий) обратимости:

изображение является обратимым, если равны мощности оригинала и модели (изображения).

Основными элементами начертательной геометрии являются: точка, прямая и плоскость.

В начертательной геометрии проецирование оригинала выполняется на две или три взаимно перпендикулярные плоскости ортогонально (перпендикулярно) им (рис.5а).

Плоскости $П_1$, $П_2$, $П_3$ называются плоскостями проекций;

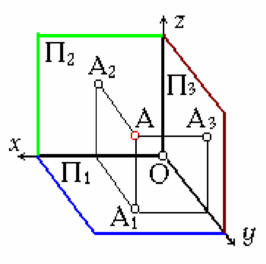


Рис. 5а

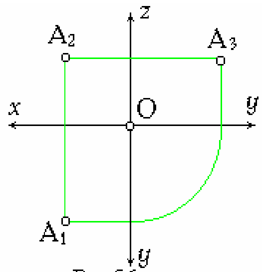


Рис.5б

$П_1$-горизонтальная плоскость проекций,

$П_2$ -фронтальная плоскость проекций,

$П_3$ –профильная плоскость проекций. Этот пространственный рисунок изобразим на плоскости (рис.5 б). Это изображение называется комплексным чертежом или эпюром Монжа точки А, где $А_1$ – горизонтальная проекция точки А, $А_2$ – фронтальная проекция точки А, $А_3$ – профильная проекция точки А.

В инженерной практике также широко применяется другой тип обратимого чертежа, называемый **аксонометрией**. Отличительной особенностью аксонометрического изображения является наглядность. Аксонометрическое изображение получится в результате проецирования фигуры (в нашем примере – точки А), отнесенной к натуральной системе координат Oxyz, на аксонометрическую плоскость проекций $П'$. Точка А связывается с системой координат Oxyz посредством натуральной координатной ломанной AA_1A_xO, где $|OA_x| = x_A$, $|A_x A_1| = y_A$, $|A_1A| = z_A$ суть координаты точки А, измеренные натуральными единицами (масштабными) отрезками.

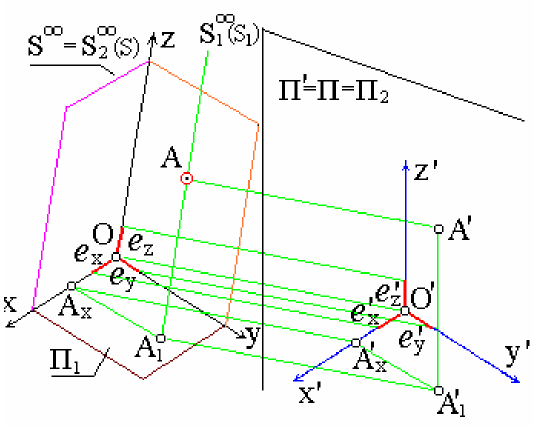


Рис. 5в

Проекция A' точки А называется аксонометрической проекцией (вторичной проекцией), проекция A_1' точки А – первичной проекцией (рис.5 в), проекция O‘x’y’z‘ - аксонометрической системы координат, $A'A'_1A'_xO'$–аксонометрической координатной ломаной, проекции e'_x, e'_y, e'_z – аксонометрическими единичными (масштабными) отрезками. Из свойств параллельного проецирования следует:

$$x_A = \frac{|OA_x|}{|e|} = \frac{|O'A'_x|}{|e'_x|};......y_A = \frac{|A_xA_1|}{|e|} = \frac{|A'_xA'_x|}{|e'_y|};.......z_A = \frac{|A_1A|}{|e|} = \frac{|A'_1A'|}{|e^{э}_{я}|},$$

что определяет обратимость аксонометрического чертежа.

Обращает на себя внимание то, что на аксонометрическом чертеже, как и на комплексном, точка А задается двумя своими проекциями (A'_1,A') (рис.5 г).

Искажения по аксонометрическим осям определяется **показателями искажения, равными отношениям аксонометриических единичных отрезков к натуральному:**

$$u=\frac{\mathrm{I}e'_x\mathrm{I}}{\mathrm{I}e\mathrm{I}};........v=\frac{\mathrm{I}e'_y\mathrm{I}}{\mathrm{I}e\mathrm{I}};.........w=\frac{\mathrm{I}e'_z\mathrm{I}}{\mathrm{I}e\mathrm{I}}.$$

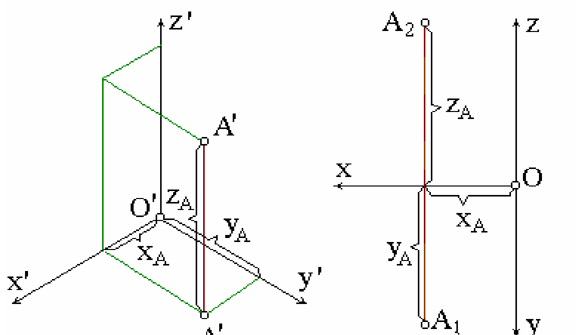


Рис. 5г

В зависимости от соотношения между показателями искажения аксонометрии бывают:

1) изометрическая (все показа-тели искажения $k_x = k_y = k_z = 1$, углы наклона между осями равны 120 ^{o}) (рис. 5 д);

2) диметрическая показатели искажения равны $k_x = k_y = 1$, $k_z = 0{,}5$ и угол наклона оси Ох к Oz равен 97,1^o и Oz к Oy – 131,25^o) (рис. 5 е);

3) фронтально изометрическая проекция (показатели искажения $k_x = k_y = 1$, $k_z = 0{,}5$ и углы наклона оси Ох к Oz равен90^0 осей Оy и Ох к Oz 135^0)(рис. 5 ж).

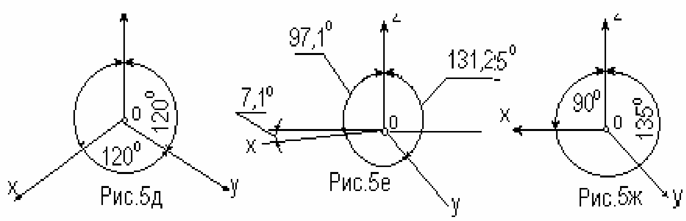


Рис.5д Рис.5е Рис.5ж

Прямая линия

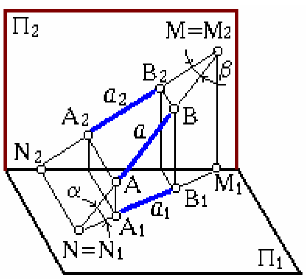


Рис.6

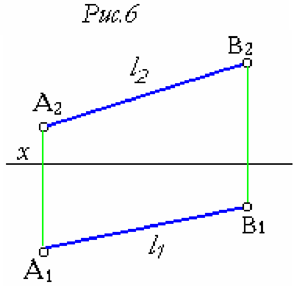


Рис.7

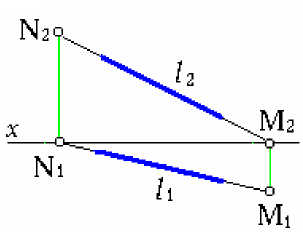


Рис.8

Прямая в пространстве определяется двумя точками, например, отрезок [AB], определяющий прямую a (рис.6), занимает произвольное положение относительно плоскостей проекций и углы α; β наклона его к плоскостям проекций произвольные, т.е. отличны от 0^0 и 90^0. Такая прямая называется **прямой общего положения.** На комплексном чертеже прямая общего положения составляет с осью Ох углы различные, но отличные от α и β. Прямая общего положения пересекает все плоскости проекций. Точки пересечения прямой с плоскостями проекций называются ее **следами**. Так как точка N= $a \cap \Pi_1$, то точка N – горизонтальный след прямой a, значит N=N$_1$, а фронтальная проекция точки N – N$_2$ лежит на оси Ох. М - фронтальный след прямой a, значит M=M$_2$, а горизонтальная проекция M$_1$ точки M=M$_2$ будет лежать на оси Ох.

Комплексный чертеж отрезка АВ изображен на рис.7. Далее построим следы прямой **l** на комплексном чертеже. Для чего находим точку пересечения фронтальной проекции прямой **l**$_2$ с осью Ох это будет фронтальная проекция фронтального следа - M$_2$ прямой **l** и по ней строим горизонтальную проекцию M_1 точки M. Аналогично строим горизонтальную проекцию горизонтального следа N_1 прямой **l** и на фронтальной проекции N_2 прямой **l** находим фронтальную проекцию горизонтального следа прямой **l**. (рис. 8).

Частные случаи расположения прямой

Кроме прямых общего положения существуют прямые частного положения относительно плоскостей проекций.

а. **Прямые уровня**

Прямые параллельные какой-либо плоскости проекций называются прямыми уровня (в этом случае углы $\alpha=0^0$, или $\beta=0^0$).

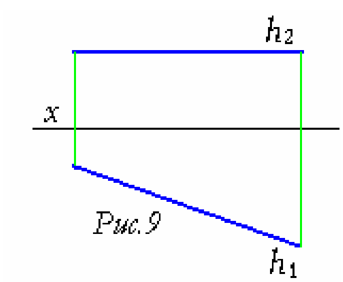


Рис.9

Прямые параллельные горизонтальной плоскости проекций называются **горизонталями** и обозначаются $h(h_1, h_2)$ (рис.9), ($h \parallel \Pi_1$). Все точки горизонтали отстоят от плоскости Π_2 на одинаковом расстоянии, поэтому фронтальная проекция горизонтали (h_2) всегда параллельна оси Ox, а горизонтальная проекция горизонтали (h_1) занимает произвольное положение относительно оси Ox.

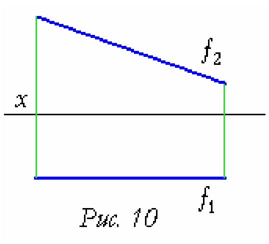


Рис. 10

Прямая параллельная фронтальной плоскости проекций называются **фронталью** и обозначается $f(f_1,f_2)$, ($f \parallel \Pi_2$) (рис.10). Все точки фронтали отстоят от плоскости Π_1 на одинаковом расстоянии – поэтому горизонтальная проекция фронтали (f_1) параллельна оси Ox, а фронтальная проекция фронтали (f_2) занимает произвольное положение относительно оси Ox.

б. Проецирующие прямые

Прямые перпендикулярные какой-либо плоскости проекций называются **проецирующими** они образуют угол $\alpha=90^0$ или $\beta=90^0$.

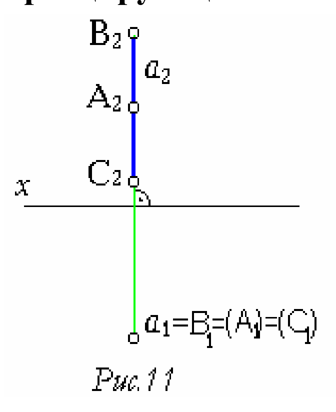


Рис.11

Прямая перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций называется **горизонтально проецирующей прямой** $a \perp \Pi_1$ (рис.11). Такая прямая a проецируется на Π_1 в точку a_1, а на плоскость Π_2 в прямую a_2 перпендикулярную оси Ox ($a_2 \perp Ox$). Эта прямая на горизонтальной проекции обладает собирательным свойством, т.к. все точки прямой A, B, $C \in a$ совпадут, т.е. $a_1=B_1=(A_1)=(C_1)$.(Т.к. здесь справедливо определение - геометрическая фигура называется проецирующей, если мерность ее проекции на единицу меньше мерности самой фигуры в нашем случае мерность прямой равна 1, а точки – 0.

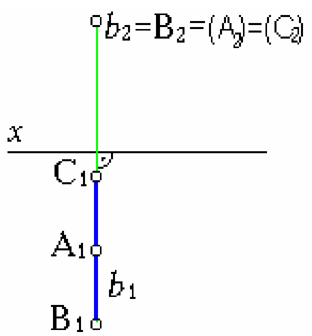


Рис.12

Для того, чтобы определить какую точку писать первой на горизонтальной плоскости проекций, мы должны посмотреть на фронтальную проекцию прямой **сверху**.

Прямая перпендикулярная фронтальной плоскости проекций называется **фронтально проецирующей прямой** $b \perp \Pi_2$ (рис.12). Такая прямая b проецируется на фронтальную проекцию в точку b_2, а на горизонтальную плоскость проекций в прямую b_1 перпендикулярную оси Ox, на фронтальной плоскости проекций она обладает собирательным свойством, т.е. $b_2=B_2=(A_2)=(C_2)$ (на горизонтальную проекцию - b_1 смотрим **снизу**).

в. Прямые, принадлежащие плоскостям проекций

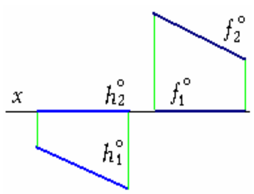


Рис.13а,б

Эти прямые будут или горизонтали или фронтали, т.к. одна из их проекций будет совпадать с осью Ox, такие прямые называются **нулевой горизонталью** $h^0(h^0{}_1,h^0{}_2)$ или **нулевой фронталью** $f^0(f^0{}_1, f^0{}_2)$, (рис.13 а, б).

Все рассмотренные прямые сведены в таблицу, названную классификацией прямых (рис. 14)

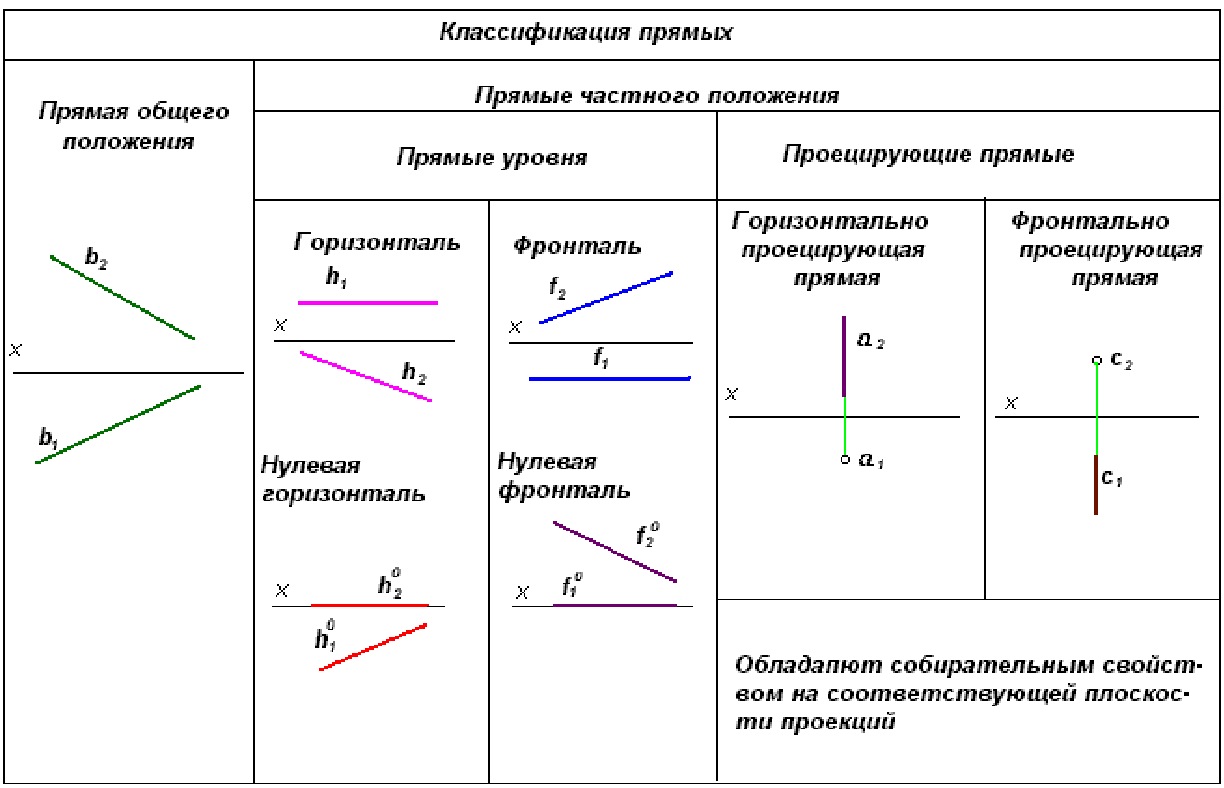


Рис. 14

Плоскость

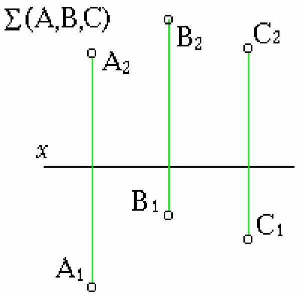


Рис.15

Плоскость в пространстве определяется тремя точками, не лежащими на одной прямой (рис.15). Это самое общее задание плоскости. Но для решения задач часто плоскость перезадается, например, точкой А и прямой α (рис. 16), двумя пересекающимися прямыми $\alpha \cap b$ (рис. 17), двумя параллельными прямыми $m \cap n$ (рис. 18) и плоской фигурой, например треугольником ABC (рис. 19). Линии пересечения плоскости с плоскостями проекций называются ее **с л е д а м и**, при этом $\Sigma \cap \Pi_1 = h^0 = h^0_1$ – горизонтальный след плоскости Σ, $\Sigma \cap \Pi_2 = f^0 = f^0_2$ -фронтальный след плоскости Σ, точка $X_\Sigma = Ox \cap \Sigma$ называется точкой схода следов плоскости (рис. 20).

8

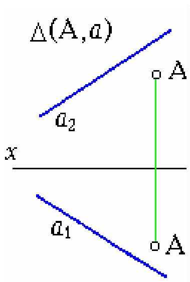


Рис. 16

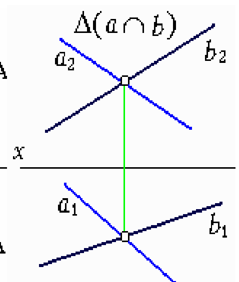


Рис.17

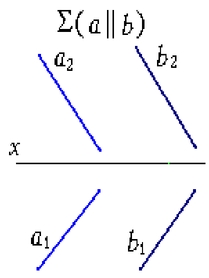


Рис.18

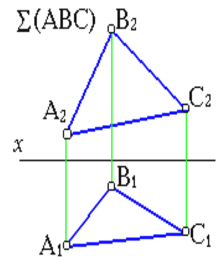


Рис.19

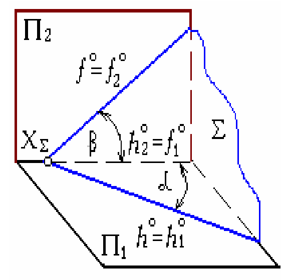


Рис.20

Комплексный чертеж плоскости Σ (h^0,f^0) показан на рис. 21.

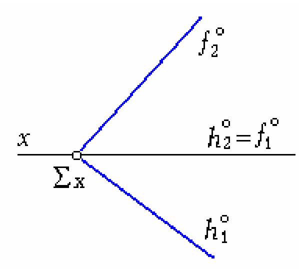


Рис.21

Рассматриваемая плоскость Σ составляет с плоскостями проекций углы отличные от 0^0 и 90^0 и называется **плоскостью общего положения**.

Частные случаи расположения плоскостей

Кроме рассмотренного общего случая расположения плоскости относительно плоскостей проекций возможны частные их расположения:

а. Перпендикулярно плоскостям проекций (угол $\alpha = 90^0$ или $\beta = 90^0$).

б. Параллельно плоскостям проекций (угол $\alpha = 0^0$ или $\beta = 0^0$).

а. Плоскости, перпендикулярные плоскостям проекций.

Такие **плоскости называются проецирующими.**

1. Плоскость перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций называется **горизонтально проецирующей** ($\beta = 90^0$) (рис.22,23). Все что находится в этой плоскости проецируется на горизонтальной проекции в ее след, т.е. $h^0_1 = l_1$.

2. Плоскость перпендикулярная фронтальной плоскости проекций называется **фронтально проецирующей** ($\alpha = 90^0$) (рис.24).

б. Плоскости параллельные плоскостям проекций называются плоскостями уровня

1. Плоскость параллельная плоскости $П_1$ называется **горизонтальной плоскостью уровня** (рис.25).

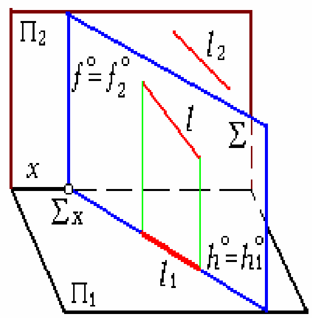


Рис.22

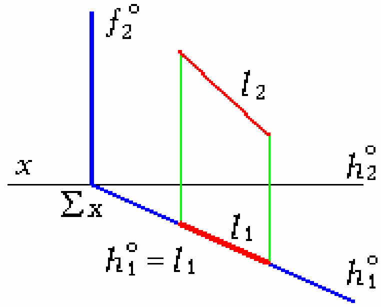


Рис.23

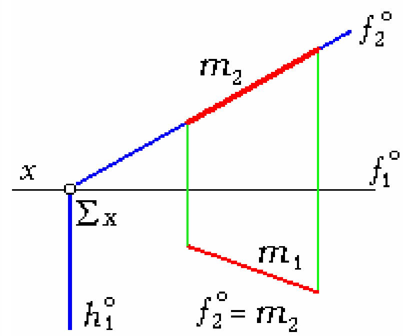


Рис.24

2. Плоскости параллельные плоскости $П_2$ называется **фронтальной плоскостью уровня** (рис. 26).

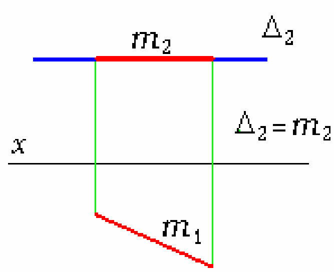


Рис.25

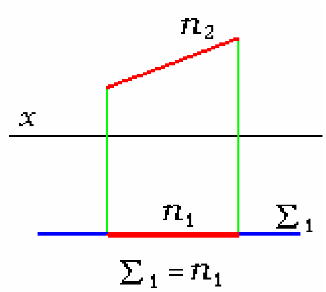


Рис.26

Все плоскости частного положения обладают собирательным свойством на соответствующей плоскости проекций. На рис. 27 помещена классификация плоскостей.

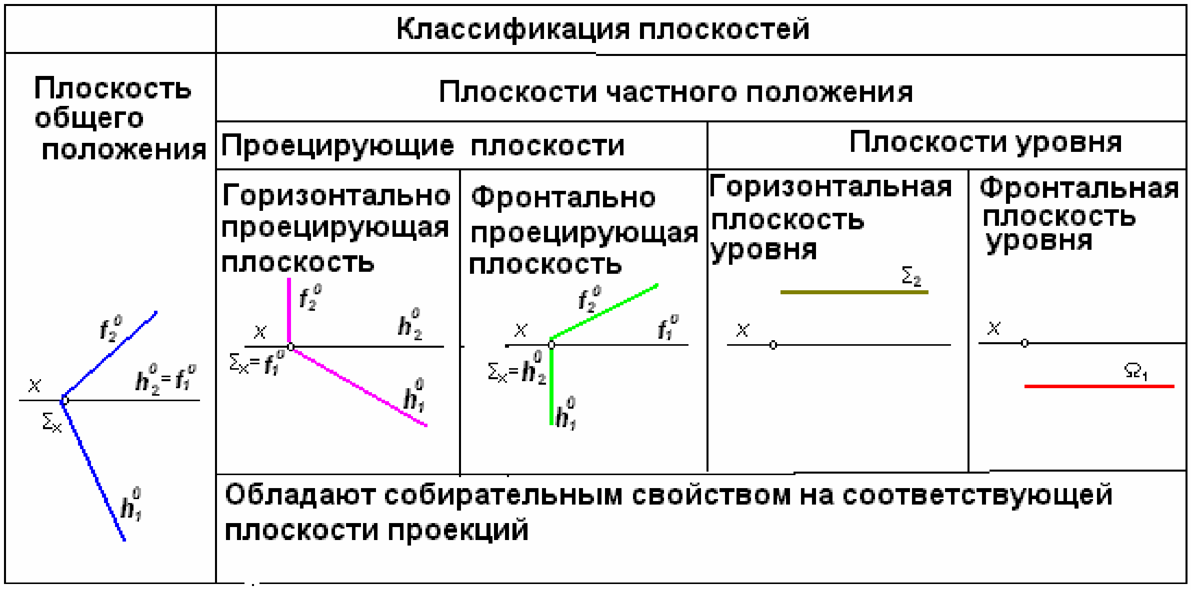


Рис.27

Взаимное положение прямых в пространстве

Две прямые в пространстве могут быть:

а) параллельными (рис.28);

б) пересекающимися (рис.29), когда точка их пересечения лежит на линии проекционной связи;

в) скрещивающимися, в точке $P_1 = (M_1)$ спроецированы две точки, которые называются **конкурирующими** (рис.30).

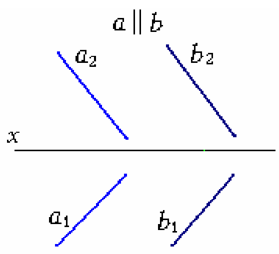


Рис.28

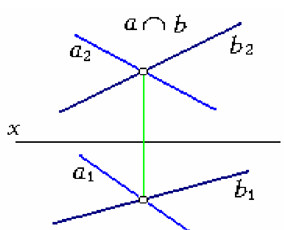


Рис.29

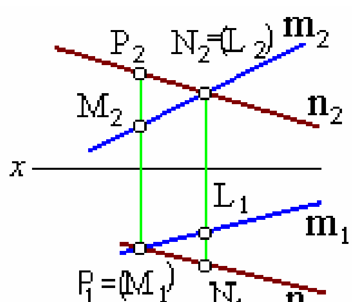


Рис.30

На рис.30 решим задачу, какой прямой n или m принадлежат точки P и M?

Для определения какой прямой принадлежат точки P и M, проецируем конкурирующие точки P_1 и M_1 на фронтальную плоскость проекций, т.к. P_1 точка первая в записи на горизонтальной плоскости проекций, то она проецируется на прямую n_2, а M_1 - вторая, значит она проецируется на прямую m_2. $P \in n$, $M \in m$. На комплексном чертеже мы смотрим на фронтальную проекцию сверху, а на горизонтальную - снизу, поэтому из точек $N_2 = (L_2)$, точка $N \in n$, $L \in m$.

Взаимная принадлежность

а. Через прямую общего положения можно провести множество плоскостей общего положения, которые образуют пучок плоско-стей (m), одну горизонтально проецирующую плоскость и одну фронтально проецирующую плоскость (рис. 30’).

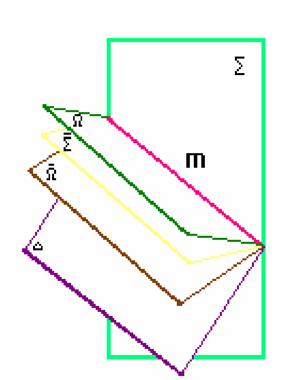
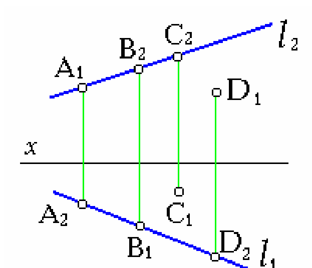


Рис. 30'

б. Точка принадлежит прямой, если ее проекции принадлежат одноименным проекциям прямой (рис. 31).

в. Прямая принадлежит плоскости, если принадлежат плоскости две ее точки (рис.32) ($\Sigma(a \parallel b)$, $\mathbf{l} \subset \Sigma$).



A,D,C $\notin l$; B $\in l$;

Рис.31

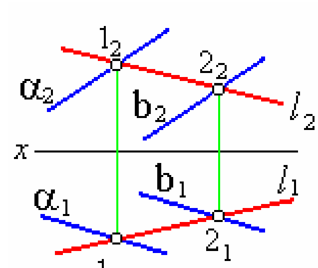


Рис.32

г. Прямая принадлежит плоскости и в том случае, если она проходит через точку, принадлежащую данной плоскости, и параллельна прямой, находящейся в этой плоскости (рис. 33).

д. Известно, что точка, принадлежащая плоскости, принадлежит какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости. Поэтому, для того чтобы указать проекции точки принадлежащей плоскости, предварительно указываются проекции прямой, лежащей в этой плоскости и на этой прямой берется точка (рис. 34).

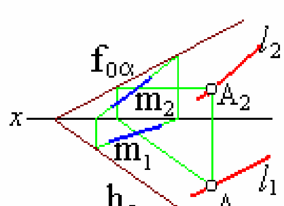


Рис.33

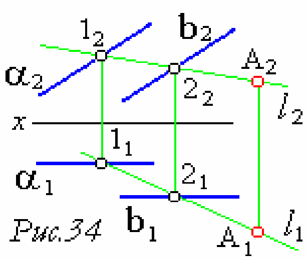


Рис.34

Параллельность.

а. Параллельность прямых

У параллельных прямых параллельны их одноимённые проекции (рис. 28).

б) Параллельность прямой и плоскости.

Из стереометрии нам известно, что прямая параллельна плоскости в том случае, если она параллельна прямой принадлежащей этой плоскости. Значит, для того чтобы через заданную точку А пространства провести прямую $\mathbf{l}$, параллельную данной плоскости Σ(BCD), необходимо:

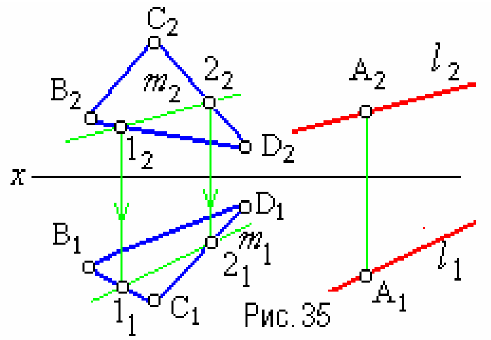


Рис. 35

1) провести в плоскости $\Sigma(ABC)$ произвольную прямую m;

2) через проекции A_1 и A_2 точки A провести проекции $\mathbf{l}_1$ и $\mathbf{l}_2$ прямой $\mathbf{l}$ соответственно параллельные одноимённым проекциям прямой m(m_1,m_2) (рис.35). Эта задача имеет бесчисленное число решений. Выбрав произвольное направление прямой m, получим одно из возможных решений.

в) Параллельность плоскостей

Из школьного курса геометрии мы наем, что плоскости параллельны, если одна из них содержит две пересекающиеся прямые, параллельные двум пересекающимся прямым другой плоскости. (Следует отметить, что точка пересечения должна быть собственной) (рис. 36).

Поэтому для построения плоскости $\Delta(a \cap b)$ параллельной плоскости Σ(m$\cap$n) необходимо провести проекции прямых a и b соответственно параллельные одноимённым проекциям прямых m и n. Если параллельные плоскости заданы следами, то будут параллельны их одноимённые следы (рис.37).

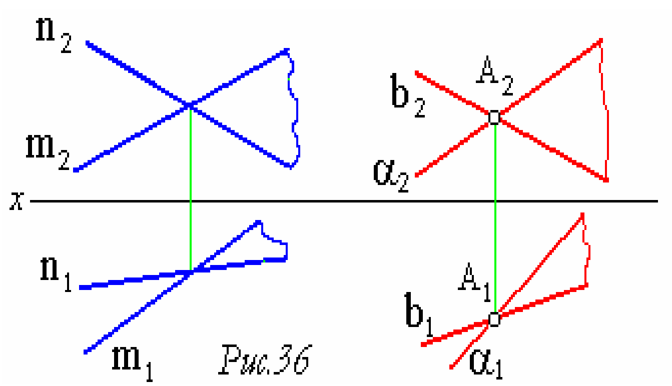


Рис.36

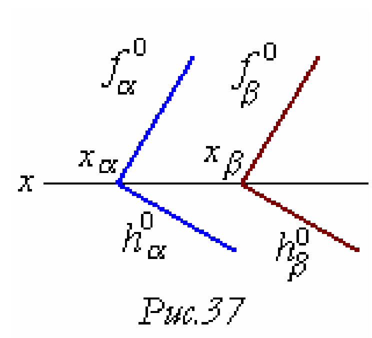


Рис.37

Выводы:

1. Метод проецирования является базой предмета начертательная геометрия.

2. Изложение метода проецирования базовых элементов начертательной геометрии с применением цветности на комплексном чертеже и в аксонометрических проекциях повышает прочность усвоения материала темы.

Литературные источники:

1. Фролов С.А. Начертательная геометрия. М.– Машиностроение. 1990.-247 с.
2. Иванов Г.С. Теоретические основы начертательной геометрии. М.: Машиностроение, 1998. 157 с.
3. Вертинская Н.Д. Лекции по начертательной геометрии. Иркутск, Изд-во ИрГТУ. 2008. 67 с.