Опубликовано по п.40 Приложения № 1

ЕСТЕСТВЕННЫЕ МОДЕЛИ РАЗМЕРОВ И РАЗМЕРНОСТЕЙ В КАТЕГОРИЯХ ТОПОЛОГИИ

Вертинский П.А г. Усолье – Сибирское
pavel-35@mail.ru

(Продолжение статьи автора «Естественные модели содержания категорий топологии // Сб. м. IX МНС-2006, КГУ, Красноярск, 2006)

1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОНЯТИЯ РАЗМЕРНОСТИ.

Итак, обратившись в своём аналитическом обзоре[1] к фундаментальным категориям топологии, которые характеризуются размерностью, мы не смогли обнаружить даже однозначное определение самих категорий топологии, поэтому были вынуждены просто принять к сведению предложенную иерархию категорий, помня, что любая другая будет так же условной. Вместе с тем, вспомним, что свои поиски мы предприняли в связи с намерением выяснить обнаруженные [2] механизмы влияния природы процессов на размерность мира, в котором они протекают. При этом мы в работе [1] смогли сформулировать некоторые выводы относительно свойств самих категорий, которые здесь необходимо кратко вспомнить:

I. *Привлекая знания не только топологии, но и естественных наук, здесь с учётом корневых смысловых значений слов приходится отметить всего ПЯТЬ уровней иерархии категорий:*

I. Континуумы (множеств)
II. Множества (многообразий)
III.Многообразия (пространств)
IV.Пространства (миров конкретной природы)
V. Миры (взаимодействий конкретной природы):

1.Физические миры.
2.Химические миры.
3.Биологические миры.
4.Психические миры.
5.Социальные миры.

II. *S – образный закон эволюции систем (ПЯТЬ этапов):*

1. самозарождение системы
2. самостановление « _»
3. самоутверждение « _»
4. самосовершенствование « _»
5. самовырождение « _»

III. В сущности, система в процессе своей S – образной эволюции на каждом уровне постепенно (!) приобретает новые свойства, способности, качества, увеличивая свою эффективность, число свобод поведения, направлений своих возможностей.

Сопоставление S – образной эволюции с нашей иерархией систем категорий топологии по n. **I** ***одновременно отображает и способность категорий - систем к этой S – образной эволюции.***

IV. Из последнего нашего вывода об эволюции систем приходится отметить корреляцию иерархии систем и этапов их S – образного закона эволюции, то есть соответствующее усложнение системы с достижением определенного этапа развития.

Другими словами, более совершенная система является более сложной, включает в себя больше под-систем, или каждая над-система является более развитой по отношению своих под-систем.

V. При этом периодичность свойств материальных объектов (частиц, атомов, молекул, кристаллов, растений, животных, социумов…) порождается очередным распространением аналогий форм связей на всех ступенях иерархии.

Законы - выражения связей, сохраняясь по форме, наполняются в каждой ступени своим конкретным (физическим, химическим, биологическим, психологическим, социологическим) содержанием.

При этом теперь ясно, что нам также необходимо обратиться к тем определениям размерности, которые применяются не только в топологии, но и в других областях знания. Обширный исторический анализ основных этапов развития этой фундаментальной категории содержится в монографии Горелика Г.Е. [3], где автор свои предпочтения отдаёт топологическим определениям размерности.

Обратимся и мы к этим работам по топологии за справкой о таком определении. Так, например, Хирцебрух Ф. в своей фундаментальной монографии [4] разъясняет:

«…мы используем следующее определение размерности: пространство X имеет размерность $\le n$ ***, если во всякое открытое покрытие U пространства X можно вписать покрытие B, такое, что каждая точка из X лежит не более чем в n+1 открытых подмножеств из B»***

Это определение в своей Общей теории гомологий Александров П.С. уточняет [5]:

«… Под покрытием множества A везде в этой работе понимается любая система $s = \{O_i\}$ **открытых в A множеств** O_i**, дающая в сумме всё множество A и удовлетворяющая следующему условию локальной конечности: каждый элемент покрытия** s **пересекается лишь с конечным числом элементов этого покрытия…**

Но ещё раньше в своей работе [6] Александров П.С. и Пасынков Б.А. обратили своё внимание на важное обстоятельство: (см. по [6] стр.7):

Или в более общей постановке: когда и каким топологическим пространствам естественно приписать данное целое число $n \geqslant 0$ в качестве их числа измерений, или «размерности»?

Однако вопрос, поставленный с такой широтой, мог и не иметь удовлетворительного, математически точного ответа: нельзя было исключить гипотезу, что только простейшие геометрические фигуры (полиэдры) допускают естественную классификацию по «числу их измерений», о чем в свою очередь стало возможным говорить лишь после того, как Брауэр в 1911 г. доказал [1] теорему об инвариантности числа измерений, утверждающую, что два гомеоморфных между собою полиэдра имеют одно и то же число измерений.

И далее они уточняют (см. по [6] на стр. 8):

Первый из этих подходов — это «индуктивный подход», ведущий от самых первых, еще очень неопределенных, высказываний Пуанкаре к точным определениям большой и малой индуктивных размерностей $\operatorname{Ind} X$ и $\operatorname{ind} X$ Брауэра, Урысона и Менгера. Второй подход принадлежит Лебегу: размерность $\dim X$ фигуры X определяется наименьшей кратностью, которую необходимо должны иметь делающиеся сколь угодно мелкими покрытия («замощения») данной фигуры: кусок плоскости, например квадрат, имеет размерность 2, потому что его можно покрыть («замостить») сколь угодно мелкими «кирпичами» с кратностью *) три (рис. 1) и нельзя достаточно мелко замостить с кратностью два.

Эта теорема в ее общем виде **) — подлинная жемчужина геометрической мысли и геометрической фантазии; бессмертной заслугой Лебега является уже самая ее формулировка.

В своих последующих работах Александров П. С. эти свои разъяснения конкретизирует, например [7]:

Принцип Брауэра (общий принцип инвариантности). ***Пусть F — замкнутое подмножество в E^n или в E^ω. Существует положительное число $\varepsilon_0(F)$, обладающее следующим свойством: если Φ — непрерывный образ F такой, что все точки F находятся на расстояниях, меньших чем $\varepsilon_0(F)$, от своих образов в Φ, то Φ не может иметь размерность, меньшую, чем имеет F.***

3. В этой общей форме принцип Брауэра получается из следующей теоремы, принадлежащей Урысону ([4], с. 301):

Размерность всякого замкнутого множества равна наименьшему такому числу λ, что существует для любого $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon, \lambda + 1)$-система замкнутых множеств *), объединение элементов которой совпадает с F.

или ещё [7. стр.54]:

Определение. Назовем размерностью $\Delta^m(F)$ множества F по модулю m наибольшее целое число r такое, что в F имеется существенный истинный цикл по модулю m размерности $r-1$, гомологичный нулю по модулю m на F.

Отметим следующие свойства так определенной размерности:

А. Два гомеоморфных множества имеют одну и ту же размерность по любому модулю.

В. Для n-мерного куба Q^n имеем $\Delta^m(Q)=n$.

С. Если $\Delta^m(F)=n$, то нельзя получить F объединением конечного числа или счетного числа замкнутых множеств размерности mod m, меньшей n.

Действительно, приведём из указанного первоисточника [6] упомянутую формулировку упомянутой теоремы Лебега:

Предложение 2 (Лебег)*). *Пусть $\bar{T}^n$ — замкнутый симплекс. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что всякое замкнутое ε-покрытие симплекса $\bar{T}^n$ имеет кратность $\geqslant n+1$.*

За доказательством этой теоремы отошлём читателя к первоисточнику (см. по [6] на стр. 212 и далее), а здесь лишь приведём доступные в нашем мире 1-мерную, 2-мерную и 3-мерную иллюстрации справедливости указанного утверждения:

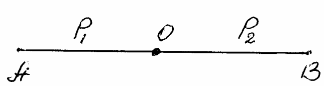


Рис.1

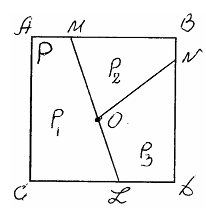


Рис. 2

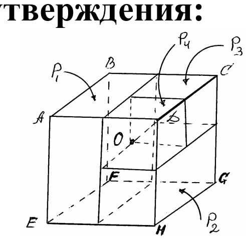


Рис. 3

На рис.1, рис.2 и рис.3 показаны прямолинейный отрезок AB, плоская фигура ABСД и объёмная призма ABCDEFGH, на которых обозначена общая для всех покрытий: P_1 и P_2 – на отрезке AB; P_1, P_2 и P_3 - на плоской фигуре ABСД; P_1, P_2, P_3 и P_4 - на призме ABCDEFGH точка O, а число этих покрытий на единицу больше размерности показанных объектов. Именно в силу справедливости теоремы Лебега для этих конкретных примеров теперь можно не только узнать размерность каждой из фигур, но и вычислить их размеры, зная размеры покрытий. Действительно, по определению не вызывают сомнения равенства: $P_1 + P_2 = L_{AB}$ **(1),**

$$P_1 + P_2 + P_3 = S_{ABCD} \qquad \textbf{(2)}$$

и $$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = V_{ABCDEFGH} \qquad \textbf{(3),}$$

где обозначены: L_{AB} **- длина отрезка AB,** S_{ABCD} **- площадь фигуры ABСД и** $V_{ABCDEFGH}$ **- объём призмы ABCDEFGH. В продолжение этих**

рассуждений представим для упрощения наши фигуры прямоугольными и построенными на единичных отрезках l_o, тогда эти размеры можно выразить:

$$L = l_o^1 \qquad (4),$$

$$S = l_o^2 \qquad (5)$$

и $$V = l^3 \qquad (6),$$

из которых однозначно вытекает следствие, что размер единичной фигуры всегда равен единичному отрезку в степени размерности пространства, в котором находится эта фигура: $V_n = a^n$ (7). Разумеется, при изменении единицы измерения в масштабе $l_o = ka$ выражение (7) $V_n = a^n$ просто перепишется: $V_n = (ka)^n$ (8) при непременном условии, что размеры фигур по всем направлениям одинаковы. В связи с этим обстоятельством примем вслед за Г. Кантором [8], что бесконечности в различных направлениях не отличаются между собой, поэтому можно в общем случае выражение (8) записать: $M_n = m^n$ (9), если обозначить через M_n - размер n -мерной фигуры со стороной-ребром m. Тогда размерность пространства представляет собой показатель степени (см. по [9] в нашем выражении (9), так как:

$$\ln M_n = n \ln m \quad (10), \quad \text{то} \quad n = \frac{\ln M_n}{\ln m} \quad (11).$$

Так как в различных обстоятельствах упомянутые топологические размерности оказываются взаимосвязаны по разному [3], например:

$$\dim X = indX = IndX \qquad (12)$$

или $$\dim X \neq indX \neq IndX \qquad (13),$$ то обратим внимание на общее замечание [6]:

На протяжении всей этой книги мы будем иметь много поводов убедиться в том, что в основе всей теории размерности лежат два понятия, применяемые в различной обстановке и в различных вариантах, а именно понятие перегородки и понятие покрытия. Мы будем по большей части рассматривать конечные

При этом вспомним определения большой $IndX$ и малой $indX$ индуктивных размерностей в топологии, например, по [6]: стр.160:

Предположим, что класс пространств X, для которых $\operatorname{Ind} X \leqslant n-1$, уже определен.

Для данного пространства $X \neq \Lambda$ полагаем $\operatorname{Ind} X \leqslant n$, если между любыми двумя дизъюнктными замкнутыми множествами P и Q пространства X имеется перегородка B, для которой $\operatorname{Ind} B \leqslant n-1$.

И далее на стр. 160:

Переходим к определению малой индуктивной размерности $\operatorname{ind} X$ (оно аналогично определению $\operatorname{Ind} X$): полагаем $\operatorname{ind} X = -1$ в том и только том случае, когда $X = \Lambda$. Полагаем $\operatorname{ind} X \leqslant n$, если для любой точки p пространства X и для любого не содержащего эту точку замкнутого множества Q существует перегородка B между p и Q, удовлетворяющая условию $\operatorname{ind} B \leqslant n-1$; полагаем $\operatorname{ind} X = n$, если $\operatorname{ind} X \leqslant n$ и если при этом точку p и замкнутое множество $Q \subseteq X \setminus p$ можно выбрать так, что между p и Q не существует никакой перегородки B, для которой было бы $\operatorname{ind} B \leqslant n-2$. Если же неравенство $\operatorname{ind} X \leqslant n$ не имеет места ни при каком натуральном n, то полагаем $\operatorname{ind} X = \infty$.

И ещё на стр.161-162:

4. Другая форма определения Ind X и ind X. Можно придать определениям инвариантов $\operatorname{Ind} X$ и $\operatorname{ind} X$ следующую форму:

1. Для пустого пространства $X = \Lambda$ и только для него полагаем $\operatorname{Ind} X = -1$, $\operatorname{ind} X = -1$,

2. Полагаем $\operatorname{Ind} X \leqslant n$, если для любого замкнутого $F \subset X$ и любой его окрестности OF имеется окрестность O_1F, для которой $[O_1F] \subseteq OF$ и $\operatorname{Ind} \operatorname{гр} O_1F \leqslant n-1$.

Аналогично полагаем $\operatorname{ind}_p X \leqslant n$, если для каждой окрестности Op точки $p \in X$ найдется окрестность O_1p, для которой $[O_1p] \subseteq Op$ и $\operatorname{ind} \operatorname{гр} O_1p \leqslant n-1$. Как и раньше, полагаем

$$\operatorname{ind} X = \sup_{p \in X} \operatorname{ind}_p X.$$

Другими словами, с естественнонаучной точки зрения определения размерностей $\dim X$ **,** *IndX* **и** *indX* **, изложенные выше по первоисточникам, в сущности сводятся к следующим выражениям, придерживаясь терминологии и символики первоисточников [6] и др.:**

1.Малая индуктивная размерность *indX* **пространства X равна n, если у каждой точки x есть сколь угодно малые окрестности, границы которых имеют размерность n-1 (в смысле** *ind* **). Размерность пустого множества** *ind* **Ǿ = 0.**

2.Большая индуктивная размерность $IndX$ пространства X равна n, если для любых его двух не пересекающихся множеств найдётся n-1- мерное замкнутое множество, разделяющее их. Также $Ind\ \acute{\varnothing}$=0.

3.Размерность $\dim X$ пространства X, определяемая с помощью покрытий пространства X, равна n, если минимальная кратность сколь угодно малых покрытий пространства X равна n+1.

Таким образом, ни одно из этих утверждений, справедливых по существу нахождения величины размерности соответствующих пространств, не может являться определением размерности **в логическом смысле, так как логически строгое определение категории, как это мы уже видели на примере определений категорий топологии [1] континуума, множества, многообразия, пространства, требует подведения определяемой категории под более широкое понятие, такую категорию, которая является более общей по отношению к определяемой, отличающейся от боле общего своими частными особенностями.**

В приведенных выше топологических определениях размерности указывается на принадлежность этой категории к числу, но не указывается нигде на особенности этого числа от других чисел, не являющихся размерностью (числом линий, поверхностей, точек…)

2. ФРАКТАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ПРИРОДЫ И АНИЗОТРОПИЯ МИРОВ.

Как известно, полученное нами выражение (11) используется в фрактальной геометрии природы Р. Мандельброта [10], [11] и др. в качестве одного из способов вычисления фрактальной размерности.

В сущности, фрактальная геометрия природы по Р. Мандельброту вводит в употребление объекты с дробной размерностью, о существовании которых говорили еще Г. Кантор по [8] и Ф. Хаусдорф [12].

В реальной действительности фрактальные объекты распространены гораздо шире по сравнению с объектами целочисленной размерности - одномерными сплошными непрерывными линиями, двумерными поверхностными фигурами и трёхмерными объёмными телами. Границы раздела двух фаз (береговые линии), дендриты в кристаллографии, «липкие пальцы» в технологических процессах смачивания, образование пористых тел и порошковых материалов, крона деревьев и морские волны - это лишь несколько типичных примеров из мира фрактальных объектов. На практике фрактальная размерность определяется из соотношения параметров объектов различной размерности [10], [11].

Для иллюстрации этого утверждения приведём здесь несколько экспериментальных примеров из таблиц 14.1 и 14.2 на стр.234-237 [11]:

ТАБЛИЦА 1.

№№ пп	Наименование объекта, материала, образца	Фрактальная размерность
1	Содержание камней в почве	1,1
2	Железная руда	1,4
3	Растительный покров	1,6
4	Дождевые осадки	1,7
5	Содержание песка в почве	1,8
6	Графит	2,07
7	Пигмент	2,57
8	Активированный уголь	2,71
9	Почва	2,94

А наглядной иллюстрацией всех перечисленных и других многочисленных процессов, характеризующихся фрактальной размерностью, можно использовать так называемые «липкие пальцы» - типичные результаты, описанные в монографии [11] по вытеснению нефти водой в пористых средах, представленные на фотоснимках рис.4-а, рис.4-б и рис. 4-в (рис. 4.15 на стр. 65 по [11]), отображающих возрастающее заполнение водой пористого тела.

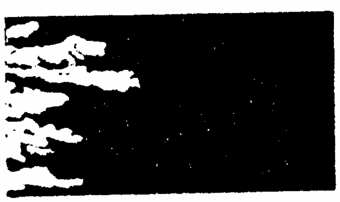


Рис.4-а

Рис. 4-б

Рис.4-в

Действительно, проследим по - Мандельброту: [10], придерживаясь его символики, за вычислением размерности подобия для некоторого куба Лебега из соотношения:

$$D_s = -\frac{\ln N}{\ln r(N)}, \qquad (14)$$

где $r(N) = \left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{1}{D}}$ - масштабный множитель по условию задачи.

Положим в нашем случае:

$N(d)$ - число покрытий куба Лебега размером M,

d - элемент масштабной единицы,

d - размерность нашего куба Лебега,

d^d - размер масштабной единицы.

Тогда по условию $\frac{M}{d^d} = N(d)$, то есть $M = N(d)d^d$, что после логарифмирования : $\ln M = \ln N(d) + d \ln d$ приводит к выражению:

$$d = \frac{\ln M - \ln N(d)}{\ln d}. \qquad (15)$$

В случае единичного куба Лебега, то есть при $M = 1$: $\ln M = 0$,

что даёт непосредственно: $d = -\frac{\ln N(d)}{\ln d}$. **(16)**

Таким образом, мы можем применять фрактальные размерности для процессов изменения размерности куба Лебега. Действительно, процесс образования линии из точки протекает при изменении размерности от 0 до 1, процесс образования поверхности из линии протекает при изменении размерности от 1 до 2, а процесс образования объёмного тела из поверхности протекает при изменении размерности от 2 до 3. Другими словами, все те многочисленные примеры в таблицах монографии [11] Е. Федера, из которых мы выборочно взяли всего несколько случаев, являются фиксированными, то есть мгновенно остановленными процессами.

Таким образом, на основании нашего экскурса в историю изучения размерности приходится признать, что в топологии отсутствует строгое определение понятия размерности, за которое иные авторы принимают формулировку способа нахождения величины этой **размерности, метод её вычисления (Лебег, Урысон и др.). Так как мы выяснили в работе [1], что и строгого логического определения категорий в силу их предельности невозможно дать, то в этом свете понятна и невозможность логического определения размерности категории… Действительно, невозможно строго логически определить атрибут категории, которая сама тоже не определена строго логически.**

3. ИЗМЕНЕНИЯ ВЕЛИЧИН РАЗМЕРНОСТЕЙ В ПРОЦЕССАХ.

Кроме того, так как механизмы влияния природы процессов на размерности миров, в котором они протекают, непременно должны быть отражены в самом понятии размерности, то размерность по - Лебегу $\dim M_n = n = \frac{\ln M_n}{\ln m}$ **(11), численное значение которого мы выразили по (11), не позволяет нам решить поставленную задачу.**

Вместе с этим, так как полный дифференциал функции $z = x^y$ **(см. по [9] стр. 109 др.):**

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy \qquad (17),$$

то для нашего куба Лебега M_n **дифференциал можно выразить:**

$$dM_n = dm^n = nm^{n-1}dm + m^n \ln m dn \quad \textbf{(18)},$$

то есть изменение n-мерного объекта M_n представляется возможным в общем случае и при изменении единичного масштаба:

$$\frac{dM_n}{dm} = \frac{dm^n}{dm} = nm^{n-1} + m^n \ln m \frac{dn}{dm} \quad \textbf{(19)},$$

и при изменении размерности этого n - мерного пространства:

$$\frac{dM_n}{dn} = \frac{dm^n}{dn} = nm^{n-1}\frac{dm}{dn} + m^n \ln m \quad \textbf{(20)}.$$

В первом случае при финитной размерности, то есть при изменении масштаба, так как при $n = Const$ $\frac{dn}{dm} = 0$ **, то очевидно**

$$\frac{dM_n}{dm} = \frac{dm^n}{dm} = nm^{n-1} \quad \textbf{(21)}.$$

Во втором случае, то есть при неизменном масштабе, так как при

$m = Const$ $\frac{dm}{dn} = 0$ **, то очевидно** $\frac{dM_n}{dn} = m^n \ln m$ **(22).**

Как мы видели выше по (11): $n = \frac{\ln M_n}{\ln m}$ **, то** $\ln m = \frac{\ln M_n}{n}$ **, что**

позволяет выражение (20) переписать: $\frac{dM_n}{dn} = m^n \frac{\ln M_n}{n}$ **(23)**

или $\underline{\frac{dM_n}{dn} = M_n \frac{\ln M_n}{n}}$ **(24).**

Другими словами, на основании фрактальности геометрии многочисленных процессов мы вправе распространить самый общий топологический принцип непрерывности и на размерность тех категорий топологии, для которых этот принцип является фундаментальным [6] и др.

Так как функциональные связи имеют одну, общую для всех миров , форму, то вследствие различного естественного содержания

различных миров возможен «дефект размера» - суть дефект того «естественного содержания» при переходе от одного мира в другой !

В частности, переходом от одного мира с размерностью n_1 к другому миру с размерностью n_2 (или наоборот от мира с n_2 к миру с n_1) может быть сам процесс изменения размерности $\frac{dM}{dn}$, что в естественных условиях подтверждается фрактальными процессами. Фрактальные (дробные) размерности являются свидетельством перехода мира от размерности n_1 к размерности n_2 - «липкие пальцы» по Р. Мандельброту и т.п.

Другим примером является распад или синтез атомных ядер - тоже изменение размерности, фактически подтверждая возможности переходов миров от размерности n_1 к размерности n_2 или наоборот от мира с n_2 к миру с n_1. Такие возможности переходов внутри атомных ядер в кластерах от одного состояния к другому - пример фрактальности, порождающей «холодный термояд».

Так как в общем случае по (18) мы выше видели :

$$dM_n = dm^n = nm^{n-1}dm + m^n \ln m dn \quad \textbf{(18)},$$

то при неизменном масштабе, когда $m = Const$

$$dM = m^n \ln m dn \quad \textbf{(25)}$$

В этом случае такой «дефект размера» можно вычислить как определенный интеграл в пределах от n_1 до n_2 :

$$M = \int_{n_1}^{n_2} dM_n = \int_{n_1}^{n_2} m^n \ln m dn \quad \textbf{(26)}$$

Снова обращаясь за справкой к [9], вычислим выражение (26):

$$M = \ln m \int_{n_1}^{n_2} m^n dn = \ln m \frac{m^n}{\ln m} = m^n = m^{n_2} - m^{n_1} \quad \textbf{(27)}$$

Другими словами, изменение размеров объекта при его переходе из мира одной размерности n_1 в мир другой размерности n_2 можно вычислить как разницу размеров этого объекта в этих мирах.

К сожалению, этот вывод мы пока не сможем применить на практике, так как в разных мирах мы имеем дело не только с различными размерностями, но и с различными единицами измерения

4. РАЗМЕРЫ И РАЗМЕРНОСТИ В АНИЗОТРОПЫХ СРЕДАХ.

Кроме того, к тем методам нахождения величины размерности, которые разработаны в топологии [6] и др., при глубоком внимании тоже есть принципиальные вопросы. Действительно, современному естествознанию известны лишь два вида материи : вещество и поле.

В связи этим обстоятельством достаточно вспомнить лишь по одному из многочисленных примеров анизотропии обоих этих видов материи, например, известную анизотропию жидкокристаллических веществ [13] и центрально-осевую симметрию поля магнитного натяжения [14] вокруг электрических токов.

В том и другом случаях становится ясным невозможность выполнения требований изотропности наших миров уже при взгляде на их структуры, как это показано на рис. 5 и рис. 6.

Действительно, к настоящему времени физика и химия ЖКВ установили существование термотропных , лиотропных и полимерных жидкокриствsituallических веществ, в которых типы упорядочения структур подчиняются трем большим группам: нематики , смектики и холестерики, наглядное представление о которых можно иллюстрировать как на рис.1, рис.2 и рис.3 . При этом обнаруживается отчетливая зависимость типа упорядочения от химической структуры ЖКВ, как это иллюстрируется на рисунках: рис.5-б, рис.5-б и рис.5-б. (рис.1-б, рис.2-б и рис.3-б. по [13]) соответственно.

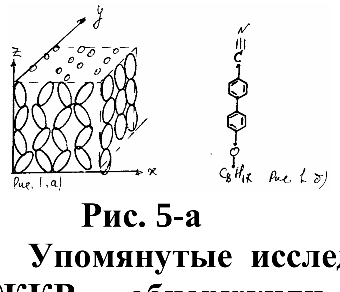


Рис. 5-а

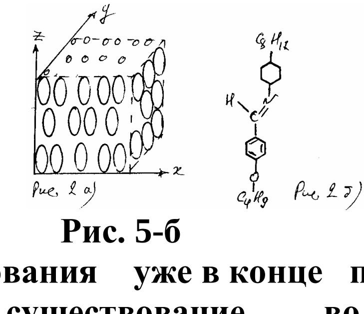


Рис. 5-б

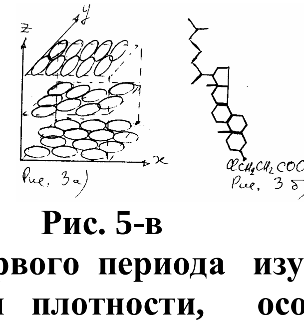


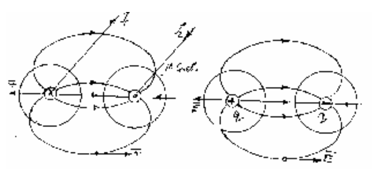
Рис. 5-в

Упомянутые исследования уже в конце первого периода изучения ЖКВ обнаружили существование волн плотности, особенно отчетливых для А - фазы смектического типа упорядочения

по направлению оси OZ вдоль директора ЖКВ. Одновременно с открытием ЖКВ обнаружилась и анизотропия упругих свойств, которая характеризуется тремя модулями упругости K_{ii}**, посредством которых можно выразить плотность свободной энергии, обусловленной произвольной деформацией [13]:**

$$W = \frac{1}{2}\left[K_{11}(a_1 + a_5)^2 + K_{22}(a_2 - a_4)^2 + K_{33}\left(a_3{}^2 + a_6^2\right)\right] \qquad \textbf{(28),}$$

где a_i **- элементарная деформация в ЖКВ. Из этих обстоятельств ясно, что направления осей координат в анизатропном веществе не могут быть гомогенными, так как по каждой координатной оси отображаются различные свойства не только количественно, но и качественно. В случае электромагнитного поля «анизотропию» можно иллюстрировать примером магнитного натяжения вокруг электрического тока по [14]. Ясно, что имея два провода с токами противоположного направления, получим геометрическую картину общего для них магнитного поля натяжением** $\bar{T}$ **как на рис.6.(рис.1, рис.2 и рис.3 по [14]) : Здесь отчетливо видно, что роль**



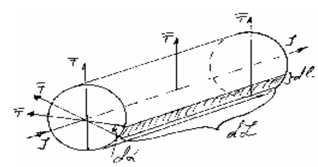


Рис. 6-а Рис. 6-б Рис. 6 - в

магнитного «монополя» в действительности выполняет электрический ток, создающий данное поле, а известная геометрическая картина электростатического поля как на рис.6-б представляется теперь мгновенным значением в результате сечения магнитного поля натяжением $\bar{T}$ **плоскостью , перпендикулярной токам, при соответствующей замене линий** $\bar{T}$ **на линии** $\bar{E}$ **, а линий** H **на линии** j **. Определяя величину потока магнитного натяжения** $\bar{T}$ **вокруг провода с током через замкнутую поверхность вокруг этого провода, представим элементарный поток :**

$$d\bar{N} = \bar{T}\, dS \ , \qquad \textbf{(29)}$$

где dS - элемент поверхности около провода с током как на рис.6-в: Так как dS = dL dl (11) и dl = r da **(12) , то вычисления дают:**

$$N_T = \int_o^L dL \int_o^{2p} n_o \frac{I}{2pr} r da = m_o IL \ \mathbf{f}\ 0 \qquad \textbf{(30)}$$

Таким образом, поле магнитного натяжения $\bar{T}$ вокруг провода с током есть поле потенциальное, его силовая характеристика $\bar{T}$ направлена по силам взаимодействия токов, создающих данное поле $\bar{T}$.

Аналогично примеру анизотропии ЖКВ, из этих обстоятельств также ясно, что направления осей координат в поле магнитного натяжения вокруг электрического тока не могут быть гомогенными, так как по каждой координатной оси отображаются различные свойства не только количественно, но и качественно.

Число подобных примеров можно увеличивать неопределенно долго, достаточно вспомнить любой факт из упомянутой выше фрактальной геометрии природы [10], [11] и др. На данное обстоятельство связи размерности объектов с их свойствами мне уже приходилось обращать внимание читателей [15], но мизерный тираж этого издания не позволил ознакомиться с ним широкому кругу специалистов. Поэтому я здесь снова прибегну не только к цитированию указанной работы, но и к тем физическим примерам, наглядно иллюстрирующих указанные соображения.

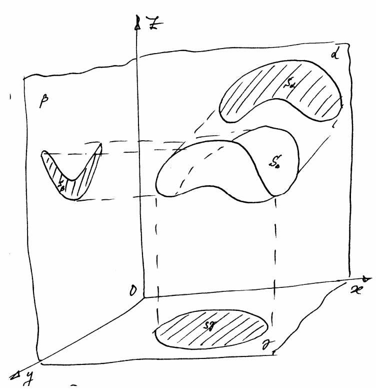


Рис. 7

Как мне уже приходилось отмечать, данное обстоятельство можно выразить обобщенно: при отображении объекта размерностью n_1 в координатной системе n_2, когда n_1 f n_2 модель объекта теряет ряд своих признаков или свойств, а когда n_1 p n_2, то модель объекта приобретает несуществующие у самого объекта признаки или свойства (см. рис 7.). Прекрасной иллюстрацией этого обстоятельства являются многочисленные функциональные зависимости в естественных науках, например, в физике отображение законов газового состояния в системе координат P, V, T (давление, объём, температура). Так, известный закон Клайперона – Клаузиуса - Менделеева: выражается:

$$PV = \frac{m}{m} RT \quad (31).$$

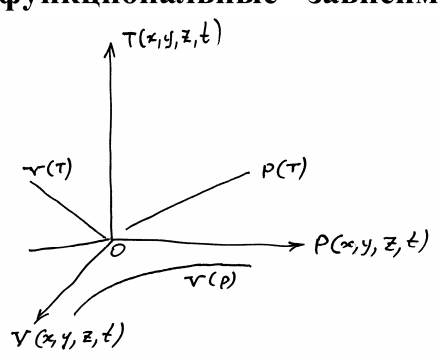


Рис. 8

Но если эту закономерность рассматривать в частных сечениях изотермического(закон Бойля-Мариотта), изохорического (закон Шарля) или изобарического (закон Гей-Люссака) процессов, то каждый из них может быть

представлен линейным графиком на плоской системе координат (см. рис. 8).

Таким образом, на основании всего выше изложенного мы вправе сформулировать вывод:

в процессе изменения размерности система приобретает или утрачивает часть своих свойств (при увеличении размерности - число свойств возрастает, а при уменьшении размерности - их число уменьшается соответственно).

При этом необходимо здесь подчеркнуть, что немонотонность размерности [2] снимается с учётом гетерогенности - (негомогенности) и гомогенности направлений базиса размерности, позволяя понять различие размерностей в природах миров ядерной физики, химии, биологии, геологии [16] и др.

Таким образом, с учётом всех изложенных выше обстоятельств по анизотропии реальных миров, из выражения (27) ясно видно, что, преследуя нашу цель наполнения естественнонаучным содержанием категорий топологии, мы не сможем выполнить требования к полученному выше по (9) n – мерному кубу Лебега по [6], так как в реальной действительности известны лишь два вида материи – вещество и поле.

ВЫВОДЫ:

А. С естественнонаучной точки зрения определения размерностей $\dim X$ **,** $IndX$ **и** $indX$**, изложенные выше по первоисточникам, в сущности сводятся к следующим выражениям:**

1.Малая индуктивная размерность $indX$ **пространства X равна n, если у каждой точки x есть сколь угодно малые окрестности, границы которых имеют размерность n-1 (в смысле** ind**). Размерность пустого множества** ind **Ǿ = 0.**

2.Большая индуктивная размерность $IndX$ **пространства X равна n, если для любых его двух не пересекающихся множеств найдётся n-1- мерное замкнутое множество, разделяющее их. Также** Ind **Ǿ=0.**

3.Размерность $\dim X$ **пространства X, определяемая с помощью покрытий пространства X, равна n, если минимальная кратность сколь угодно малых покрытий пространства X равна n+1.**

Таким образом, ни одно из этих утверждений, справедливых по существу нахождения величины размерности соответствующих пространств, не может являться определением размерности **в логическом смысле, так как логически строгое определение категории, как это мы уже видели на примере определений категорий топологи континуума, множества, многообразия, пространства, требует подведения определяемой категории под более широкое понятие, такую категорию, которая является более общей по отношению**

к определяемой, отличающейся от боле общего своими частными особенностями.

В приведенных выше топологических определениях размерности указывается на принадлежность этой категории к числу, но не указывается нигде на особенности этого числа от других чисел, не являющихся размерностью (числом линий, поверхностей, точек…) Так как и строгого логического определения категорий в силу их предельности невозможно дать, то в этом свете понятна и невозможность логического определения размерности категории… Действительно, невозможно строго логически определить атрибут категории, которая сама тоже не определена строго логически.

Б. Учитывая, что бесконечности в различных направлениях не отличаются между собой, можно в общем случае можно записать:

$M_n = m^n$ **, если обозначить через** M_n **-размер** n **-мерной фигуры со стороной-ребром** m**. Тогда размерность пространства представляет собой показатель степени :**

$$\ln M_n = n \ln m \quad \textbf{(10), то} \quad n = \frac{\ln M_n}{\ln m} \quad \textbf{(11).}$$

В. В реальной действительности фрактальные объекты распространены гораздо шире по сравнению с объектами целочисленной размерности - одномерными сплошными непрерывными линиями, двумерными поверхностными фигурами и трёхмерными объёмными телами. В случае единичного куба Лебега, то есть при $M = 1$**:** $\ln M = 0$**, что даёт непосредственно:** $d = -\frac{\ln N(d)}{\ln d}$**.**

<u>Таким образом, мы можем применять фрактальные размерности для процессов изменения размерности куба Лебега.</u>

Г. При неизменном масштабе, так как при $m = Const$ $\frac{dm}{dn} = 0$ **,**

или $\frac{dM_n}{dn} = M_n \frac{\ln M_n}{n}$ **(24).**

<u>Другими словами, на основании фрактальности геометрии многочисленных процессов мы вправе распространить самый общий топологический принцип непрерывности и на размерность тех категорий топологии, для которых этот принцип является фундаментальным.</u>

Д. Так как функциональные связи имеют одну, общую для всех миров, форму, то вследствие различного естественного содержания

различных миров возможен «дефект размера» - суть дефект того «естественного содержания» при переходе от одного мира в другой !
В этом случае такой «дефект размера» можно вычислить как определенный интеграл в пределах от n_1 до n_2 :

$$M = \ln m \int_{n_1}^{n_2} m^n dn = \ln m \frac{m^n}{\ln m} = m^n = m^{n_2} - m^{n_1}$$

Другими словами, изменение размеров объекта при его переходе из мира одной размерности n_1 в мир другой размерности n_2 можно вычислит как разницу размеров этого объекта в этих мирах.

В процессе изменения размерности система приобретает или утрачивает часть своих свойств (при увеличении размерности - число свойств возрастает, а при уменьшении размерности - их число уменьшается соответственно).

При отображении объекта размерностью n_1 в координатной системе n_2 , когда n_1 f n_2 модель объекта теряет ряд своих признаков или свойств, а когда n_1 p n_2 , то модель объекта приобретает несуществующие у самого объекта признаки или свойства.

ЛИТЕРАТУРА :
1.Вертинский П.А. Естественные модели содержания категорий топологии // Сб. м. IX МНС-2006, КГУ, Красноярск, 2006
2. Вертинский П.А. Математическое моделирование финитности и сингулярности в понятии размерности пространства // Сб. матер.V МНС- 2002, КГУ, Красноярск, 2002, стр.32-35.
3.Горелик Г.Е. Размерность пространства. М., МГУ, 1983
4.Хирцебрух Ф. Топологические методы в алгебраической геометрии. М., «Мир», 1973, стр. 7.
5.Александров П.С. Общая теория г омологий. М.,«Мир», 1979, стр.286.
6.Александров П.С. и Пасынков Б.А. Введение в теорию топологических пространств и общую теорию размерности. М., Наука, 1973, 576 с.
7.Александров П.С. К теории размерности //Александров П.С. Теория размерности и смежные вопросы; статьи общего характера .- М.: Наука,1973. стр.6
8. Кантор Г. Учение о множествах//Новые идеи в математике, в.№ 6 С.-Пб., «ОБРАЗОВАНИЕ» , 1914
9. Корн Г. и Корн Т. Справочник по математике, М., «Наука», 1973
10.Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. М.: ИКИ, 2002, стр.46, 144, 326.
11.Федер Е. Фракталы : Пер. с англ. - М.; Мир,1991. 254с.
12. Хаусдорф Ф. Теория множеств , ГНТИ , 1937 г., 303 с.
13. Вертинский П.А. Решение задач микроминиатюризации электропривода на основе электромеханического эффекта в ЖКВ //Сб..м.«V Сибресурс-2002», Иркутск, ИГЭА, 2002
14. Вертинский П.А. Оптимизация электромеханических систем методами магнитодинамики //Сб..м.«V Сибресурс-2002», Иркутск, ИГЭА, 2002
15.Вертинский П. А. К вопросу диагностики физических теорий-
Сб. науч. тр. ИрГСХА, г. Иркутск,1999 г.,стр.193-203.
16. Пригожин И.Р. и Стенгерс И. Порядок из хаоса Новый диалог человека с природой.
М., «Прогресс», 1986

Автор П.А. Вертинский 10.10. 2006