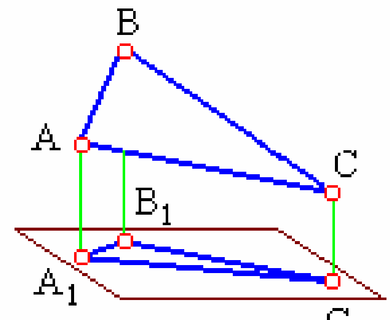
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЙ В НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЦВЕТНЫХ РИСУНКОВ

Вертинская Н.Д.
Иркутский государственный технический университет

Две ортогональные проекции геометрической фигуры определяют ее положение в пространстве. Однако произвольное положение такой геометрической фигуры относительно плоскостей проекций не всегда удобно для решения ряда позиционных и метрических задач.

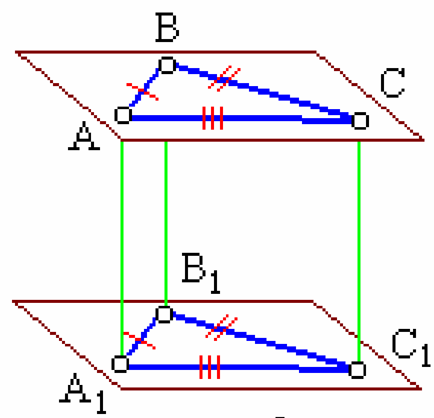
Проекции геометрической фигуры, произвольно расположенной по отношению к плоскостям проекций, как правило, не сохраняют формы и размеров оригинала.

На плакате 1 видно, что если плоскость треугольника ABC общего положения, то проекция треугольника ABC по форме и размерам отличается от его проекций.



Плакат 1

Определение величины углов при вершинах, длины сторон, величины площади и других метрических характеристик треугольника требуют дополнительных графических построений. Наряду с этим, есть частные случаи взаимного расположения объекта проецирования и плоскости проецирования позво-ляющие получение ортогональных проекций, удобных для решения задач.



Плакат 2

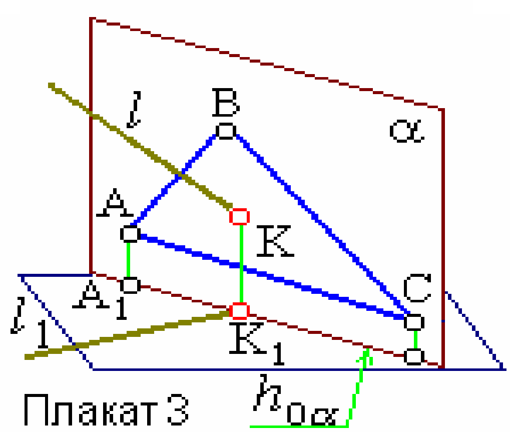
Далее приведем примеры:

1) Если требуется определить форму и размеры плоской фигуры необходимо, чтобы она была параллельна плоскости проекций. В этом случае ее проекция конгруэнтна самой фигуре (плакат 2).

2). При решении задач на принадлежность или пересечение геометрических фигур целесообразно, чтобы одна из них занимала проецирующее положение, так как в этом случае мы получаем вырожденную проекцию удобную для решения задачи.

Форма и размеры проекций, при ортогональном проецировании, всецело зависят от взаимного расположения проецируемой фигуры и плоскости проекций (плакат 3).

При этом, объект проецирования может занимать, по отношению к плоскости проекций, «удобное» и «неудобное» положение. В случае «удобного» расположения получаются проекции, обеспечивающие простое решение.



Плакат 3

«Удобным» (выгодным) положением проецируемой фигуры считаются:

1) параллельное плоскости проекций;

2) перпендикулярное плоскости проекций.

Естественно возникает вопрос, как можно перейти от заданных «неудобных» для решения задач проекций к новым более «удобным» проекциям? Переход от общего, по отношению к плоскости проекций, положения геометрической фигуры к частному, при ортогональном проецировании, в частности, можно осуществить двумя путями:

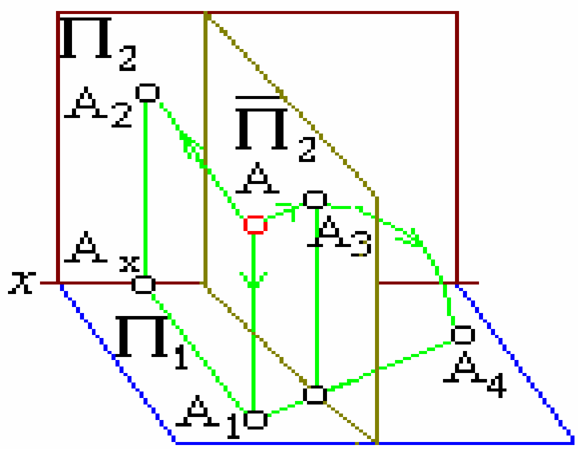
во - первых, заменой плоскости проекций новой плоскостью, по отношению к которой проецируемая фигура, которая не меняет своего положения в пространстве, окажется в частном положении;

во - вторых, перемещением в пространстве проецируемой фигуры так, чтобы она заняла частное положение относительно плоскости проекций, которая не меняет положения в пространстве.

Первый путь лежит в основе способа **замены плоскостей проекций**; второй - способа **плоскопараллельного перемещения и вращения.**

Способ замены плоскостей проекций

Рассмотрим плакат 4, который даёт наглядное представление о том как реализуются идеи этого способа.



Плакат 4

Для использования способа замены плоскостей проекций при решении задач необходимо помнить:

1) если плоскость Π_2 заменена плоскостью $\overline{\Pi}_2$, то плоскость $\overline{\Pi}_2$ (как и плоскость, которую она заменила), должна быть перпендикулярна плоскости Π_1;

2) при замене фронтальной плоскости плоскость Π_2, положение горизонтальной плоскости проекций остаётся без изменений, что обеспечивает неизменность вида горизонтальной проекции;

3) при переходе от пространственной модели к комплексному чертежу, новая фронтальная плоскость $\overline{\Pi}_2$ совмещается со старой горизонтальной плоскостью Π_1;

4) линия связи, соединяющие новую фронтальную проекцию со старой горизонтальной проекцией, перпендикулярна к новой оси $x_{1\,\bar{2}}$;

5) расстояние между новой фронтальной проекцией точки $\overline{A}_2$ и новой

осью $x_{1\bar{2}}$ равно расстоянию между старой фронтальной проекцией точки A_2 и старой осью x_{12} (рис.1).

$$|A_2A_{x12}| = |\bar{A}_2 \bar{A}_{x1\bar{2}}|.$$

Зная правила построения проекции одной точки в ой системе плоскостей сказанное в п. 1–5 остается в силе и в случае замены горизонтальной плоскости Π_1 новой плоскостью $\bar{\Pi}_1$ (с соответствующей редакционной корректировкой этих пунктов).

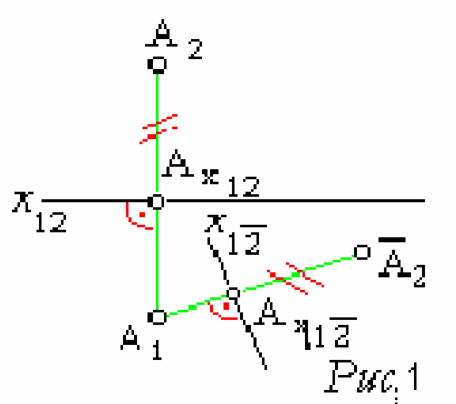


Рис. 1

Задача 1. Отрезок [AB], задающий прямую общего положения, преобразовать в отрезок [$\bar{A}\bar{B}$], определяющий прямую, параллельную фронтальной плоскости проекций. Иными словами сделать отрезок [AB] фронталью (рис. 2).

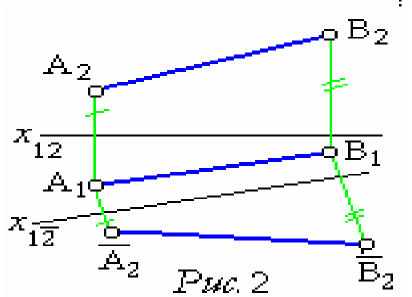


Рис. 2

Поэтому выбираем новую ось параллельную горизонтальной проекции отрезка [AB], т.е. $x_{1\bar{2}} \parallel [A_1B_1]$, а новую фронтальную проекцию $\bar{A}_{\bar{2}}\bar{B}_{\bar{2}}$ строим по тем же размерам, что и данная фронтальная проекция.

Задача 2. Отрезок CD прямой общего положения преобразовать в отрезок [$\bar{C}\bar{D}$], горизонтально проецирующий (рис. 3).

В начале [CD] сделаем фронталью, а затем, выбрав новую ось ось $x_{\bar{1}\bar{2}} \perp [\bar{C}_1\bar{D}_1]$, сделаем [$\bar{C}\bar{D}$] горизонтально проецирующим.

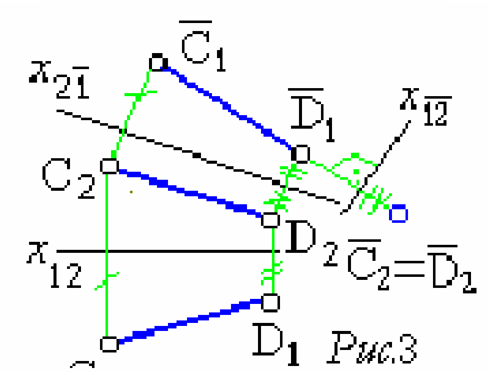


Рис.3

Задач 3. Плоскость общего положения α, заданную следами с помощью способа замены плоскостей проекций, преобразовать в горизонтально проецирующую плоскость (рис. 4).

Искомая плоскость должна иметь фронтальный след перпендикулярный новой оси $x_{2\bar{1}}$.

Строим ось $x_{2\bar{1}} \perp f_2$ и соответственно строим новое положение $h_{0\alpha\bar{1}}$.

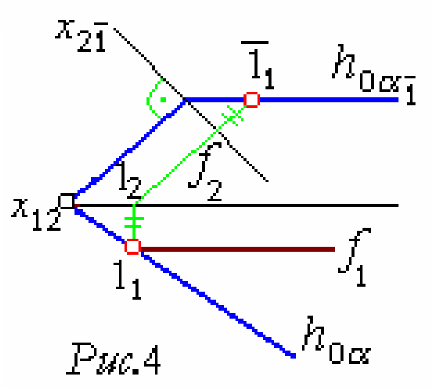


Рис.4

Способ плоскопараллельного перемещения

В отличие от способа замены плоскостей проекций, которым данная фигура преобразовывается в фигуру частного положения путем изменения системы отнесения, способом плоскопараллельного движения фигура приводится в частное положение в результате ее перемещения в пространстве относительно неподвижной системы отнесения. В этом способе преобразования справедлива теорема: **при плоскопараллельном движении фигуры одна ее проекция перемещается по прямым параллельным оси Ox, а другая проекция остается конгруэнтной самой себе.**

Задача 1. Преобразовать отрезок [AB] общего положения во фронталь (рис. 5).

Так как отрезок [AB] должен стать фронталью, то его горизонтальная проекция [A_1B_1] параллельна оси Ox. При этом согласно сформулированной теорем отрезки [AB] и [A_1B_1] должны быть конгруэнтны. Фронтальные проек-ции A_2 и B_2 перемещаются параллельно оси Ox.

Задача 2. Преобразовать отрезок [AB] общего положения в горизонтально проецирующий отрезок [$\bar{A}$ $\bar{B}$].

Эта задача решается двумя преобразованиями.

Сначала плоскопа-раллельным движе-нием отрезок [AB] преобразуем во фро-нталь [$\bar{A}$ $\bar{B}$] (см. зада-чу 1). Затем плоско-параллельным движе-нием относительно $П_2$ отрезок [$\bar{A}$ $\bar{B}$] прео-бразуем в горизон-тально проецирующий отрезок [$\bar{\bar{A}}\bar{\bar{B}}$].

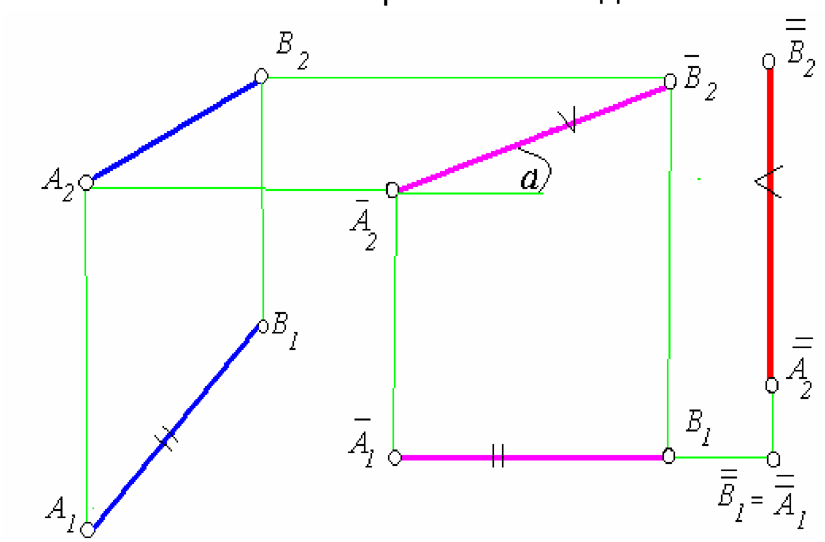


Рис.5

Задача 3.Найти натуральную величину тре-угольника ABC общего положения (рис. 6).

Очевидно, одним плоскопараллельным движением плоскость общего положения нельзя преоб-разовать в плоскость уровня. Выполним последовательно два плоскопараллель-ных перемещения треугольника ABC:

сначала относительно, например, фронтальной плоскости проекций, а затем относительно горизонтальной плоскости $П_1$. При первом плоскопараллель-ном движении плоскость треугольника ABC преобразуем в проецирующую плоскость. Для этого фронтальную проекцию $\bar{A}_2$ $\bar{B}_2$ $\bar{C}_2$ расположим так, чтобы фронталь $\bar{f}$ ($\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$) стала горизонтально проецирующей. При этом согласно сформулированной теореме фронтальные проекции треугольников – ABC и $\bar{A}$ $\bar{B}$ $\bar{C}$ должны быть конгруэнтными (рис. 6).Вторым плоскопаралле-льным движением относительно $П_1$ треугольник $\bar{A}$ $\bar{B}$ $\bar{C}$ преобразуем в треу-гольник $\bar{\bar{A}}\bar{\bar{B}}\bar{\bar{C}}$, рас- положенного в горизонтальной плоскости уровня. При этом отрезки [$\bar{B}_1$ $\bar{C}_1$], [$\bar{\bar{B}}_1$ $\bar{\bar{C}}_1$] конгруэнтны и последний расположен парал-

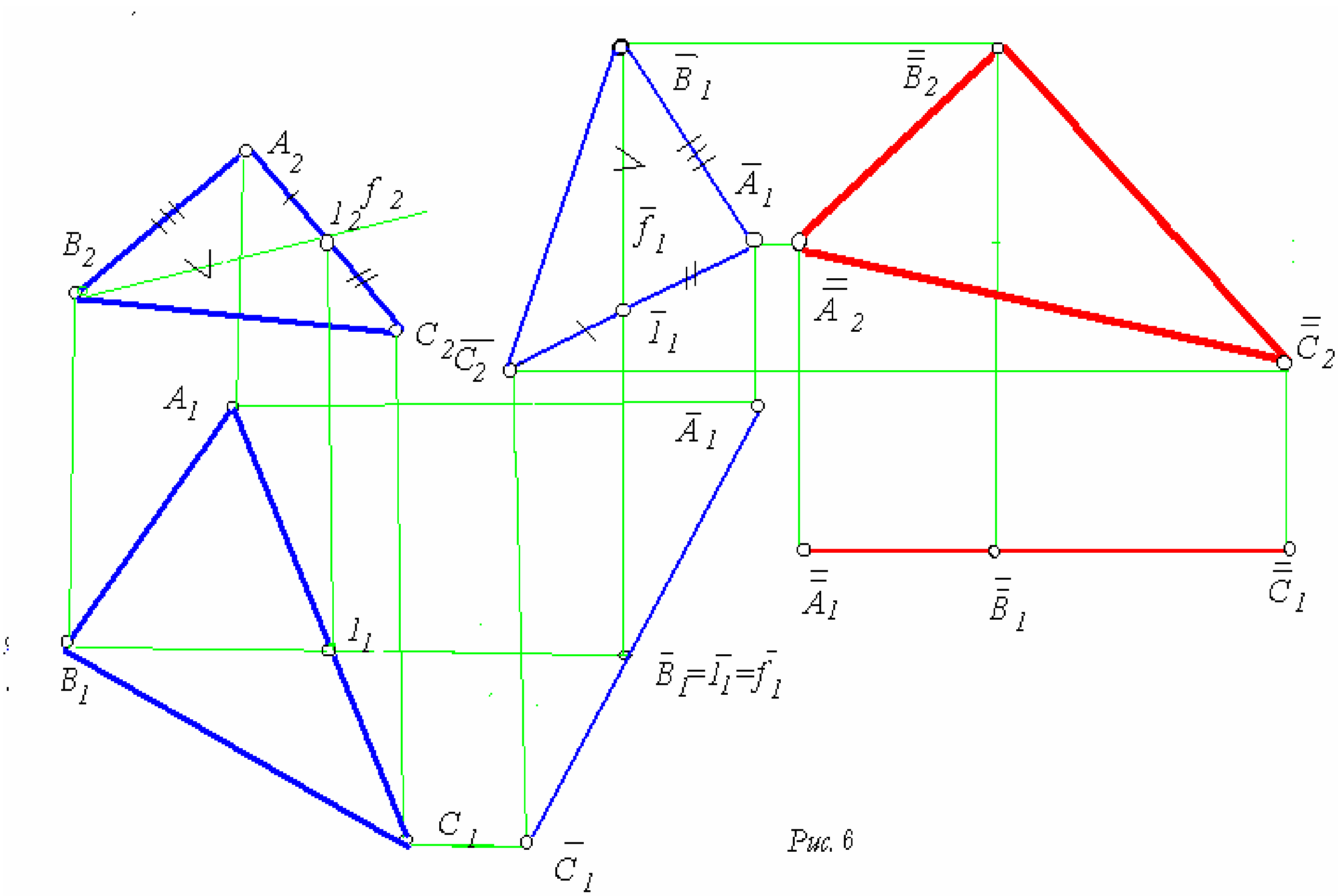


Рис. 6

лельно оси Ох. Поэтому фронтальная проекция треугольника $^{=}A_2{}^{=}B_2{}^{=}C_2$ определяет натуральную величину треугольника АВС.

Способы вращения

Сущность этого способа состоит в том, что перемещение геометрической фигуры в новое положение осуществляется путём её вращения вокруг какой-либо прямой. Траектория перемещения всех точек фигуры представляют дуги окружностей, центры которых принадлежат одной прямой - оси вращения.

В зависимости от положения оси, по отношению к плоскости проекций, способы вращения подразделяют:

1) способ вращения вокруг оси, перпендикулярной плоскости проекций;

2) способ вращения вокруг оси параллельной плоскости проекций. Этот способ называют также способом вращения вокруг линии уровня.

Рассмотрите каждый из отмеченных способов.

1) <u>Вращение вокруг оси, перпендикулярной плоскости проекций</u>

Пользуясь плакатом 8 рассмотрим способ вращения вокруг проецирующей

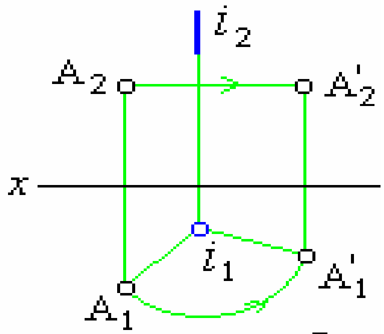
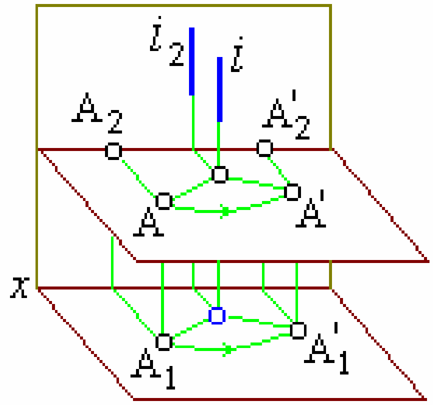


Рис. 7

прямой, в данном случае вокруг горизонтально проецирующей прямой i. Как видно на плакате горизонтальная проекция точки А (A_1) перемещается по окружности радиуса ОА, а на фронтальной проекции по прямой параллельной оси Ох. Значит комплексный чертеж вращения точки А вокруг горизонтально проецирующей прямой i, будет выглядеть как на рис. 7.



Плакат 8

Задача 4. Перевести отрезок АВ в положение параллельное фронтальной плоскости проекций (рис. 8).

Вначале сделаем горизонтальную проекцию отрезка [A_1 B_1] горизонтальной проекцией фронтали, т. е. [A_1 B'_1] || Ох, а затем построим фронтальную проекцию отрезка АВ’- $A_2B'_2$.

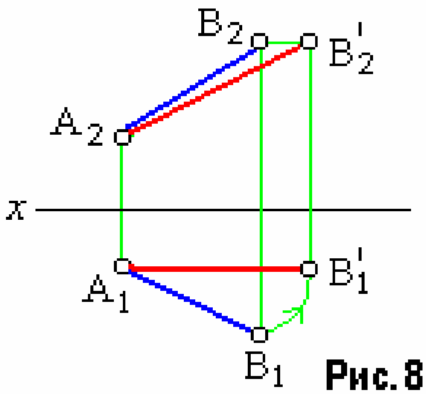
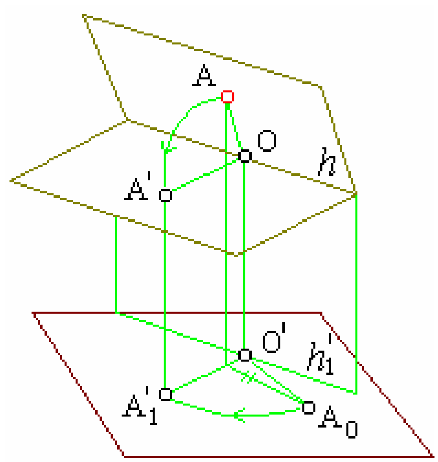


Рис.8

2) Вращение вокруг оси, параллельной плоскости проекций

Смысл способа вращения вокруг оси, параллельной плоскости проекций (вращения вокруг горизонтали и фронтали) состоит в переводе плоскости, произвольно расположенной относительно плоскостей проекций в положение параллельное горизонтальной или фронтальной плоскости проекции (плакат 9).



Плакат 9

Т.к. вращение плоскости осуществляется вокруг прямой, принадлежащей плоскости, то для перевода её в новое положение достаточно осуществить поворот только одной точки плоскости не принадлежащей оси вращения.

И так, мы установили, что перевод плоскости из исходного положения в новое путём её вращения вокруг линии уровня, сводится к нахождению нового положения одной точки, принадлежащей плоскости и не лежащей на оси вращения.

Для решения этой задачи необходимо и достаточно:

во-первых, определить положение центра вращения,

во-вторых, найти величину радиуса вращения.

Задача 5. Вращение вокруг горизонтали найти новое положение точки А. По алгоритму решения задачи определяем центр О вращения, который находится на перпендикуляре проведенным из точки A_1 к горизонтальной проекции горизонтали (h_1). Затем находим натуральную величину радиуса вращения (например, способом прямоугольного треугольника) и определяем новое положение A'_1 точки А (рис. 9).При вращении плоскости Σ вокруг ее фронтали до положения Σ_1 параллельно плоскости Π_2 характер графических построений не отличается от только что рассмотренных (рис.10).

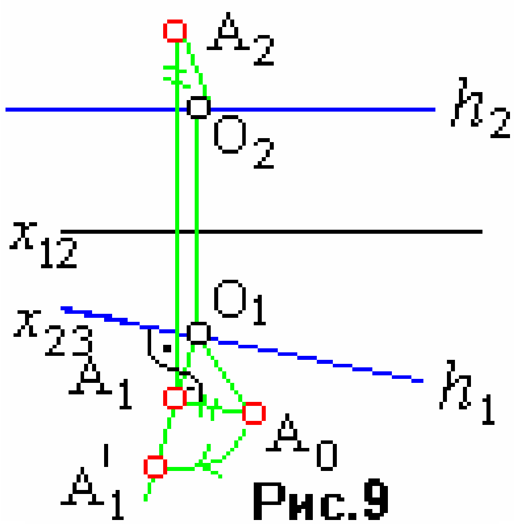


Рис.9

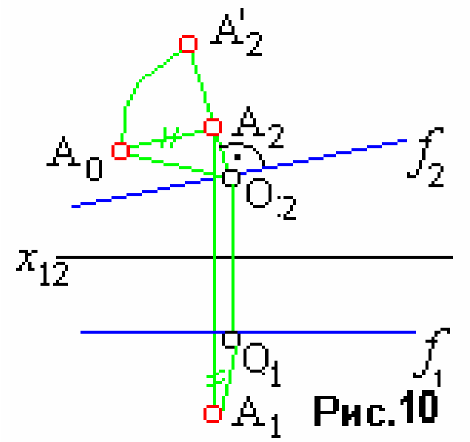


Рис.10

Задача 6. Определить натуральную величину треугольника АВС вращением вокруг его горизонтали.

Решение задачи начнем с построения горизонтали.

Заранее определим какую точку будем вращать вокруг горизонтали, пусть этой точкой будет точка В.

Далее применяя алгоритм решения задачи для поворота точки В вокруг горизонтали. Для определения повернутого положения точки С нет необходимости повторять все построения снова, т.к. точка C'_1 лежит на отрезке B'_1 C'_1, проходящем через неподвижную точку 1 горизонтали, то достаточно из точки C_1 провести перпендикуляр к h_1 до пересечения с лучом $[B'_1 1_1)$ (рис. 11).

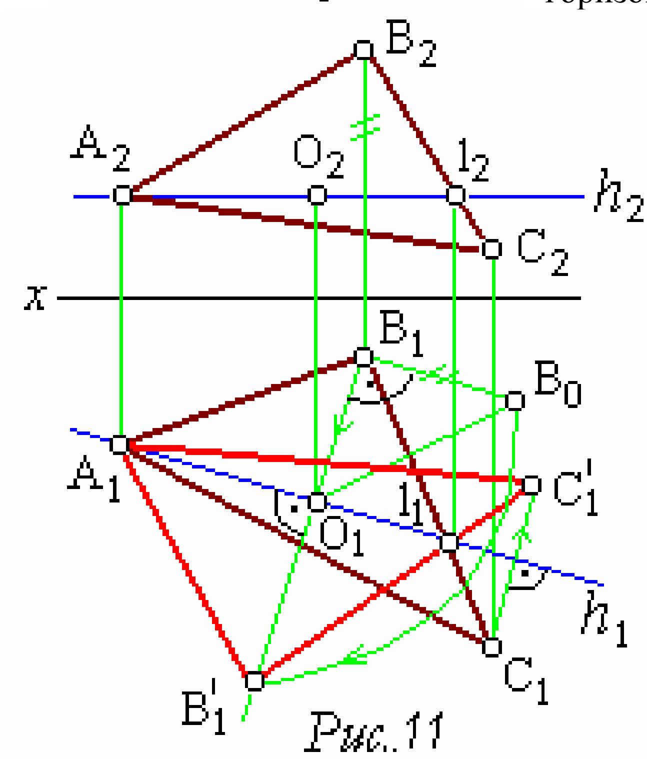


Рис.11

Кривые линии и обводы

Линия занимает особое положение среди геометрических фигур в курсе начертательной геометрии. Используя линию можно создать наглядные модели многих процессов и проследить их течение во времени.

Линии позволяют установить и исследовать функциональную зависимость между величинами. С помощью линий удаётся решать многие научные и инженерные задачи, решение которых аналитическим путём часто приводят к использованию чрезвычайно громоздкого математического аппарата. Умело, подбирая линии, дизайнер имеет возможность придать изящные и эстетичные формы конструируемым изделиям. Кроме самостоятельного значения, линии широко используются при конструировании поверхностей различных технических форм.

Линию можно рассматривать как траекторию перемещения точки в пространстве. Такое представление линии позволяет дать определение линии как непрерывное множество всех принадлежащих ей точек. Если учесть, что положение точки при её движении по заданной траектории будет зависить от непрерывно меняющейся величины d - расстояния от точки до начала координат, то можно утверждать что положение точки, принадлежащей линии, определяется непрерывно меняющейся величиной d. Тогда, приняв d за параметр, приходим к следующему определению: **линия есть непрерывное однопараметрическое множество точек.**

Далее рассмотрим классификацию линий. Линии подразделяются на **алгебраические**, если в декартовой системе координат они определяются алгебраическим уравнением, и **трансцендентные** в том случае, когда описываются трансцендентными уравнениями.

Линии бывают пространственными и плоскими. **Пространственными** или линиями двоякой кривизны называют линии, все точки которых не принадлежат одной плоскости (рис. 12). Линии, у которых все точки принадлежат одной плоскости, называются **плоскими**.

Если алгебраическое уравнение, описывающее линию n-ой степени, то алгебраическая кривая считается n-ого порядка. Порядок алгебраической линии может быть определён также числом точек её пересечения с прямой (для плоских кривых, или плоскостью, если кривые пространственные). В число точек пересечения включаются точки с действительными и мнимыми координатами.

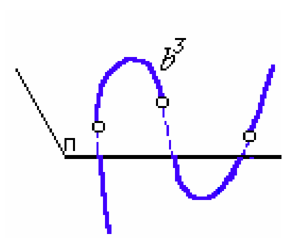


Рис.12

Проецирование кривых

Свойства кривых, инвариантные относительно ортогонального проецирования.

При построении ортогональных проекций кривых необходимо знать те свойства кривых, которые сохраняются (являются инвариантными) при ортогональном проецировании.

К таким свойствам относятся:

1. Касательные к кривой проецируются в касательные к её проекциям.

2. Несобственным точкам кривой соответствуют несобственные точки её проекции.

3. Порядок проекции алгебраической кривой равен порядку самой кривой.

4. Число узловых точек (точек, в которых кривая пересекает самоё себя) на проекции кривой равно числу узловых точек на самой кривой.

Для построения ортогональных проекций кривой необходимо построить проекции ряда точек, принадлежащей этой кривой и соединить между собой одноимённые проекции точек в той же последовательности, в какой они находились на оригинале.

Следует иметь в виду, что по двум ортогональным проекциям кривой нельзя сразу ответить на вопрос о том, какой кривой (плоской или пространственной) соответствуют данные проекции.

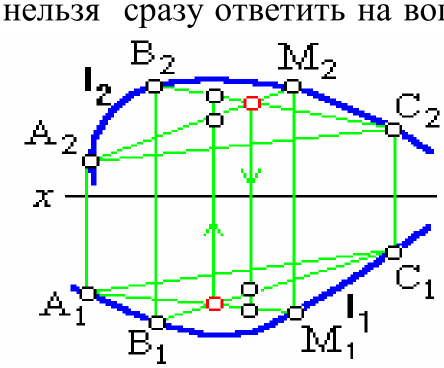


Рис.13

Чтобы определить, какая (плоская или пространственная) кривая задана на комплексном чертеже, необходимо выяснить, принадлежат ли все точки кривой одной какой-либо плоскости. Если принадлежат - кривая плоская, в противном случае – пространственная. На рис. 13 дана пространственная кривая $l(l_1,l_2)$, т.к. точка M $(M_1,M_2)\in l(l_1,l_2)$ не принадлежит плоскости $\Delta(ABC)$, где $\{A,B,C,M\}\in l$.

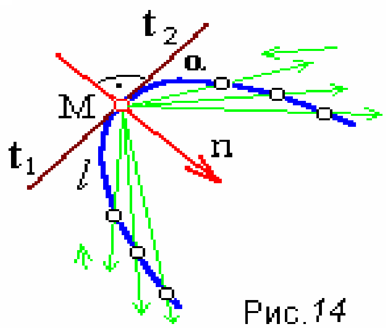


Рис.14

Касательная и нормаль к кривой

Касательная к кривой, это прямая, образованная полукасательными t_1 и t_2 к кривой a в точке M.

Нормаль n кривой a в данной точке M–перпендикуляр к касательной к кривой в той же точке (рис.14).

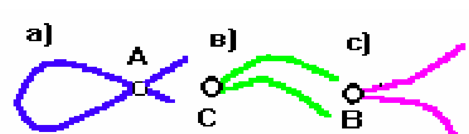


Рис.15 а,в,с

Плоские кривые имеют простые точки, например, точка M (рис.14), двойные (узловые), например, точка A рис. 13 а, точки возврата, например, точки B и C (рис. 15 в, с).

Обводы

Решение ряда задач требует построение линии, проходящий через упорядоченный массив точек. Все задачи такого типа сводятся к построению **аппроксимирующей** функции, нахождение которой выполняется одним из трех методов аппроксимации:

1) **интерполирование функции,**
2) **приближение функции,**
3) **конструирование обвода.**

Мы рассмотрим только конструктивное решение задач аппроксимации. Для упрощения решения конструктивных задач аппроксимации в качестве линии конструируют - **обвод**.

Обводом называется линия, составленная из дуг кривых выбранного вида, которые в стыковых точках имеют определенный порядок соприкосновения.

Стыки дуг обвода, т. е. точки А, В, С, К называются узлами обвода (рис. 16).

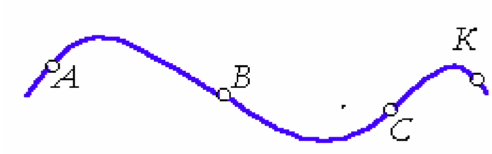


Рис. 16

Дуги кривых в точках стыков могут соприкасаться по определенному порядку гладкости. Если дуги кривых пересекаются, то они имеют нулевой порядок гладкости. Если дуги кривых в точках стыков имеют общую касательную, то они имеют первый порядок гладкости, т. к. в этих точках они имеют равные первые производные, если кривые имеют равные вторые производные, то порядок гладкости у обвода будет второй и т.д.

Радиусографический способ построения обвода

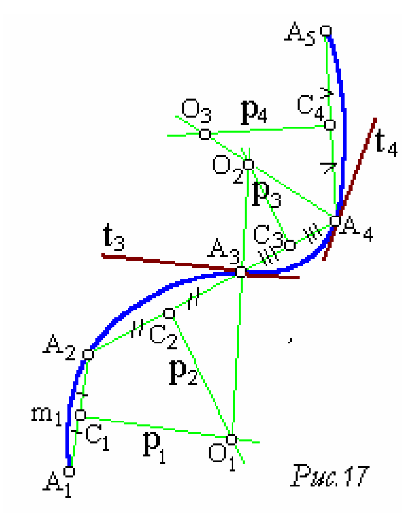


Рис.17

Задача 1. Построить обвод первого порядка гладкости дугами окружностей точек $A_1, A_2, \ldots A_n$ (рис. 17).

Чтобы построить дугу окружности между точками A_1 А необходимо найти центр этой окружности точку O_1, который будет лежать на пересечении срединных перпендикуляров к $[A_1A_2]$ и $[A_2A_3]$. Радиусом $|O_1A_1|$ строим составляющую m_1- дугу окружности между точками A_1, A_2, A_3.

Вторая и последующие составляющие определяются двумя точками и касательной, например, для точек A_3, A_4 и касательной t_3, проведенной в точке A_3 перпендикулярно радиусу A_3 O_1. Центр O_2 определяется как пересечение срединного перпендикуляра точек A_3 и A_4 с перпендикуляром, проведенным из точки A_3 к касательной t_3 и т.д.

Существует много способов построения обводов, например, способ кривых второго порядка, лекальными кривыми, сплайн - аппроксимация и т.д.

Конические сечения

Кривые второго порядка называются также коническими сечениями, так как получаются сечением конической поверхности вращения некоторой плоскостью. Как известно, кривые второго порядка бывают: **неприводимые** (окружность, эллипс, парабола и гипербола), **приводимые** или **распавшиеся** (две действительные или мнимые пересекающиеся прямые, две совпавшие прямые, две действительные или мнимые параллельные прямые). Если секущая плоскость пересекает все образующие конической поверхности, то в сечении получается **эллипс**. В частном случае, когда плоскость перпендикулярна оси конической поверхности, в сечении получается окружность. Если секущая плоскость параллельна одной образующей конической поверхности, то получается **парабола**. Если секущая плоскость параллельна двум образующим конической поверхности, то - **гипербола** (рис. 18). Если секущая плоскость проходит через вершину конической поверхности, то кривая второго порядка распадается на две пересекающиеся прямые. Они будут действительными различными, если плоскость пересекает телесный угол, определяемый конической поверхности, и будут мнимыми, если секущая плоскость находится вне телесного угла. И, наконец, две указанные прямые будут параллельными, если их точка пересечения (вершина конической поверхности) будет несобственной, т.е. коническая поверхность выродится в цилиндрическую.

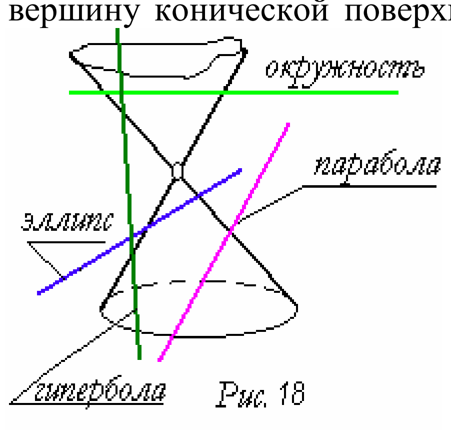


Рис. 18

Касательная плоскость к поверхности

Плоскость, касательная к поверхности в заданной на поверхности точке, есть множество всех прямых - касательных, проведенных к поверхности через эту точку.

Касательная прямая к поверхности в точке на ней, определяется как касательная прямая к кривой, полученной в результате пересечения поверхности плоскостью инцидентной прямой. Так как плоскость определяется двумя пересекающимися прямыми, то для построения касательной плоскости к поверхности в точке на ней, достаточно построить два сечения поверхности в точке касания и к сечениям построить касательные прямые, которые определят искомую касательную плоскость (рис.19).

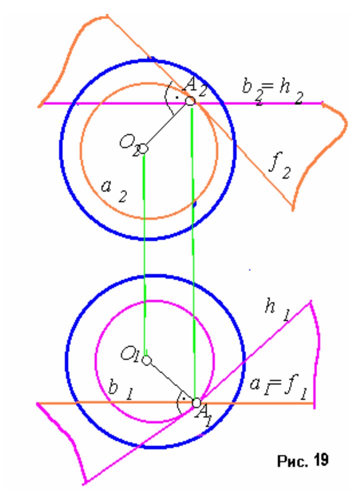


Рис. 19

Так как касательная плоскость τ однозначно определяется двумя, например, пересекающимися прямыми, то алгоритм ее построения состоит из следующих этапов:

- через данную точку A поверхности Ф проводятся две секущие плоскости (желательно частного положения), которые пересекают поверхность Ф по двум кривым a и b;

из точки A строятся две касательные прямые t_a и t_b к полученным линиям a и b; пересекающиеся касательные прямые t_a и t_b определяют искомую касательную плоскость τ.

Пример 1. Построить плоскость τ, касающуюся сферы Ф (O, R) в точке $A \in$ Ф (рис. 19).

По алгоритму на сфере Ф через точку A строим, на пример, горизонтальную плоскость уровня $\Delta_2=b_2=t_{b2}$. На горизонтальной проекции строим t_{b1} касательно к окружности b_1, т.е. перпендикулярно радиусу $[O_1A_1]$. Далее через точку A на Ф строим, например, фронтальную плоскость уровня $\Sigma_1=a_1=t_{a1}$ и на фронтальной плоскости проекций строим касательную t_{a2} перпендикулярно к радиусу $[O_2A_2]$. Искомая плоскость определяется как $t\,(t_a \cap t_b)$, где t_a - горизонталь, а t_b - фронталь.

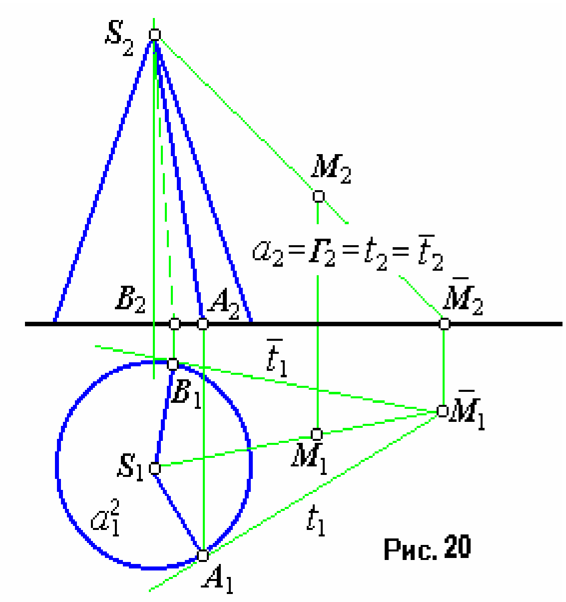


Рис. 20

Пример 2. Построить плоскость τ, касающуюся поверхности конуса вращения Ф и проходящую через данную точку $M \notin$ Ф (рис. 20).

Так как искомая плоскость τ касается поверхности конуса Ф по образующей, то она проходит через вершину S конуса, следовательно, и через образующую (SM). Строим точку $\bar{M}^*$ пересечения прямой (SM) с плоскостью Г основания a_1^2 конуса Ф. Из точки M строим касательные t_{a1} и t^*_{a1} к основанию a_1^2 конуса и отмечаем точки касания A, B. Задача имеет два решения: через точку M проходят две плоскости $\tau(SM \cap SA)$ и $\tau^*(SM \cap SB)$, касающиеся поверхности конуса Ф по образующим SA и SB.

Проекции прямого угла

Отметим ряд свойств проекций плоских углов:

1. Если стороны угла не параллельны плоскости проекций, то угол проецируется на эту плоскость с искажением.

2. Если одна сторона тупого, прямого, острого угла параллельна плоскости проекций, то проекция угла на эту плоскость проекций будет, тупой, прямой или острый угол.

3. Если стороны угла параллельны плоскости проекций, то на эту плоскость угол проецируется без искажения.

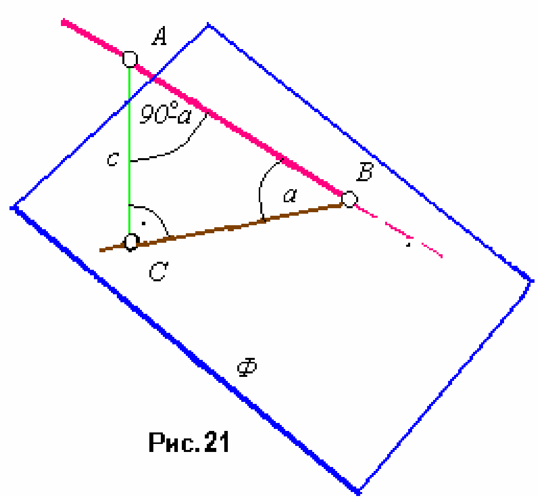


Рис. 21

На рис. 21 показан угол образованный произвольной прямой (AB) с плоскостью Ф.

Пример 1. Определить натуральную величину угла α между двумя скрещивающимися прямыми a и b (рис. 21).

Угол между скрещивающимися прямыми равен углу, составленному пересекающимися прямыми, параллельными данным. Поэтому выбираем точку К, например, на прямой b и через нее проводим прямую $c \,||\, \alpha$.

Тогда решение задачи сводится к определению натуральной величины угла между пересекающимися прямыми $b \cap c = K$. Так как прямые a и b общего положения, то угол между ними проецируется на плоскости проекций в искажении.

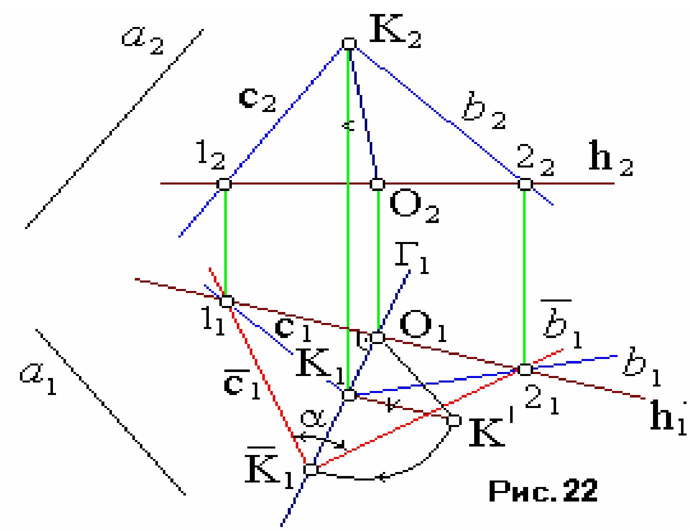


Рис. 22

Для ответа на поставленный вопрос задачи повернем плоскость $\Sigma(b \cap c)$ вокруг, например, горизонтали и сделаем плоскость Σ горизонтальной плоскостью уровня.

Алгоритм решения задачи будет состоять из следующих операций:

1. В плоскости Σ строим горизонталь $h(h_1,h_2)$;
2. Вращением точки К вокруг горизонтали h получаем искомый угол $1_1K_12_1$ - натуральную величину искомого угла.

Пример 2. Определить угол наклона α прямой b к плоскости Ф (рис. 23).

Простейшее решение этой задачи состоит из следующих операций

1) Строим точку пересечения $B = b \cap Ф$;

2) Из произвольной точки $K \in b$ опускаем перпендикуляр c на плоскость Ф;

3) Строим точку $C = c \cap Ф$

Любым известным способом строим натуральную величину угла $\alpha = \angle KBC$.

В построенном треугольнике ВКС $\angle BKC$ является дополнительным до 90° к искомому углу α. Это положим в основу более рационального алгоритма решения сформулированной задачи, который включает в себя следующие операции:

1. Из произвольной точки $K \in b$ опускаем перпендикуляр на плоскость Ф;

2. Способом вращения вокруг линии уровня, например, горизонтали строим натуральную величину угла $\angle BKC$, который будет дополнительным до 90° к искомому углу $\alpha = KBC$. (см. пример 1).

Пример 3. Определить величину двугранного угла α, образованного плоскостями Ф, Δ (рис. 23).

Как известно, двугранный угол измеряется соответствующим ему линейным углом, получающимся в сечении двугранного угла плоскостью Г, перпендикулярной его ребру l. Отсюда следует алгоритм решения данной задачи:

1. Строим прямую l пересечения плоскостей Δ, Ф; через произвольную точку $L \in l$ проводим плоскость Г, перпендикулярную прямой l;
2. Строим прямые d и g пересечения данных плоскостей с плоскостью Г.
3. Любым известным способом определяем натуральную величину угла α, составленного пересекающимися прямыми d, g.

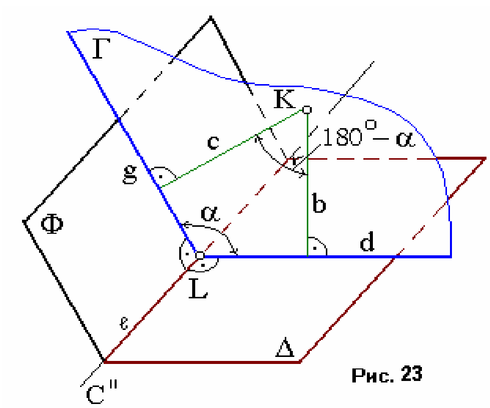


Рис. 23

Если в плоскости Г взять произвольную точку К и из нее опустить перпендикуляры на прямые d и g, то угол между прямыми с и b равен 180°–α. Отсюда следует рациональный алгоритм решения задачи:

1) Из произвольной точки К пространства строим перпендикуляры b и с к данным плоскостям Ф и Δ;

2) Способом вращения вокруг линии уровня определяем натуральную величину угла между прямыми с и b; искомый угол α будет дополнительным к найденному.

Выводы:

1. Применение цветных рисунков при решении метрических и позиционных задач позволяет углубить восприятие и понимание их, способствуя прочности усвоения изучаемого материала.
2. Широкое применение методов решения позиционных и метрических задач используются при решении задач на пересечение линии и поверхности, поверхностей, построении разверток поверхностей и др..

Литературные источники:

1. Фролов С.А. Начертательная геометрия. М.– Машиностроение. 1990.-247 с.
2. Иванов Г.С. Теоретические основы начертательной геометрии. М.: Машиностроение, 1998. 157 с.
3. Вертинская Н.Д. Лекции по начертательной геометрии. Иркутск, Изд-во ИрГТУ. 2008. 67 с.