Опубликовано по п.23 Приложения №1

ФИНИТНОСТЬ И СИНГУЛЯРНОСТЬ В ПОНЯТИИИ РАЗМЕРНОСТИ ПРОСТРАНСТВА

П. А. Вертинский г. Усолье -Сибирское
pavel-35@mail.ru

1.Краткое историческое вступление.

26 мая 1917 года Нобелевский лауреат, Организатор и Председатель Сольвеевских Конгрессов физиков Г. А. Лоренц по просьбе профессора Лейденского Университета П. Эренфеста представил на заседании Амстедамской Академии доклад П. Эренфеста «Каким образом в фундаментальных законах физики проявляется то, что пространство имеет три измерения?», в котором П. Эренфест выразил вековечную мечту мыслителей о ясном представлении себе всех свойств нашего мира [1].

Действительно, начиная с Пифагора (VI в. до н. э.), философы и математики, физики и астрономы, историки и геологи не прекращают своих попыток добиться исчерпывающей надёжности в определении понятия РАЗМЕРНОСТЬ МИРА, РАЗМЕРНОСТЬ ПРОСТРАНСТВА, РАЗМЕРНОСТЬ пространственно-временного КОНТИНУУМА. За прошедший период в 2500 лет сама концепция ПРОСТРАНСТВА – ВРЕМЕНИ претерпела минимум четыре революции: аристотелевскую, ньютоновскую, и две релятивистские, связанные с именем А. Эйнштейна [2]. Но даже последний 24-й Международный Семинар по фундаментальным проблемам физики в Институте физики высоких энергий (Протвино), прошедший в в августе 2001 года, в работе которого приняли личное участие авторы двух современных концепций ПРОСТРАНСТВА - ВРЕМЕНИ И. Р. Пригожин [3] и А. А. Логунов [4], решил снова провести такой Семинар по проблемам ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ в 2002 году, что и является фактитческим признанием актуальности этой древней проблемы [5].

2. Возникновение вопроса.

Чтобы избежать кривотолков и недоразумений, автору здесь придётся прибегнуть к обширной цитате из упомянутого доклада П. Эренфества [1]:

«…Для притяжения, под влиянием которого планета движется по орбите в пространстве R_n, мы полагаем: $g\dfrac{Mm}{r^{n-1}}$, при $n > 2$ этому соответствует потенциальная энергия: $V(r) = -\dfrac{Mm}{(n-2)r^{n-2}}$ (1). Мы выводим этот закон притяжения из дифференциального уравнения Лапласа-Пуансона. Это значит: мы предполагаем, что сила направлена к центру и является функцией только от r, так что она может быть получена из потенциала; и мы применяем теорему Гаусса для интеграла от нормальной компоненты силы по замкнутой

поверхности (поток силы). Уравнения движения, таким образом, имеют форму: $m\dfrac{d^2x_h}{dt^2} = -g\dfrac{Mm}{r^{n-1}}\dfrac{x_h}{r} = -\dfrac{dV}{dx_h}$ **(2), где** $h = 1,....n$**.**
Движение происходит в плоскости. В этой плоскости мы вводим полярные координаты. Тогда сразу же могут быть написаны два первых интеграла: $\dfrac{m}{2}\left[\left(\dfrac{dr}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dj}{dt}\right)^2\right] + V(r) = E$ **(3) и**

$mr^2\left(\dfrac{dj}{dt}\right) = \Theta$ **(4) Исключая** $\left(\dfrac{dj}{dt}\right)$**, мы находим для** $\left(\dfrac{dr}{dt}\right)$**:**

$\left(\dfrac{dr}{dt}\right) = \sqrt{\dfrac{2E}{m} - \dfrac{2V}{m} - \dfrac{\Theta}{m^2r^2}}$ **(5) или** $\left(\dfrac{dr}{dt}\right) = \dfrac{1}{r}\sqrt{Ar^2 + Br^{4-n} - C^2}$ **(6).**

Поскольку r **может колебаться вдоль траектории между положительными значениями,** $\left(\dfrac{dr}{dt}\right)$ **должна иметь действительные и непременно положительные и отрицательные значения. Поэтому выражение, из которого должен быть извлечен корень, должно быть всегда положительным между двумя значениями** r**, для которого оно обращается в ноль…» [1].**

Здесь можно прервать цитирование, так как полученное выражение (6) полностью раскрывает сущность анализа П. Эренфестом проблемы устойчивости движения планет. Вместе с тем здесь необходимо заметить, что поле центральных сил, каким является гравитация, не является единственным силовым полем в Природе. Уже во времена П. Эренфеста были известны поля электрическое и магнитное, современники П. Эренфеста и он сам активно штурмовали тайны внутриатомных и внутриядерных сил, уже тогда стоял вопрос о происхождении космических сил [6].

Поэтому, не ограничиваясь рассмотрением П. Эренфестом сил гравитации, применим его метод анализа устойчивости движения сил другой природы, например, для сил вида $b\dfrac{Ww}{r^{n-2}}$**, которые соответственно порождают поля с потенциальной энергией:** $V(r) = -b\dfrac{Ww}{(n-3)r^{n-3}}$ **(7) Разумеется, физическое содержание величин** b, W, w **здесь другое по отношению к величинам** g, M, m **в выражении (1) для потенциальной энергии гравитационного поля, но её значение также определяется относительным расстоянием между источниками таких сил. Помня об этом обстоятельстве, не станем изменять символику в преобразованиях П. Эренфеста, а значение** $V(r)$

из выражения (7) подставим в (5), что нас приводит к выражению:
$\left(\frac{dr}{dt}\right)=\sqrt{\frac{2E}{m}-\frac{2\left(-g\,\frac{Mm}{(n-3)r^{n-3}}\right)}{m}-\frac{\Theta^2}{m^2r^2}}$ **(8).Теперь это выражение одновременно умножим и разделим на** r **:** $\left(\frac{dr}{dt}\right)=\frac{1}{r}\sqrt{\frac{2E}{m}r^2+\frac{2gmMr^2}{m(n-3)r^{n-3}}-\frac{\Theta^2}{m^2r^2}}$ **(9), то есть:**
$\left(\frac{dr}{dt}\right)=\frac{1}{r}\sqrt{\frac{2E}{m}r^2+\frac{2gM}{(n-3)}r^{(2+3-n)}-\frac{\Theta^2}{m^2}}$ **(10) или:** $\left(\frac{dr}{dt}\right)=\frac{1}{r}\sqrt{\frac{2E}{m}r^2+\frac{2gM}{(n-3)}r^{5-n}-\frac{\Theta^2}{m^2}}$ **(11).**
Для упрощения выражения (11) вслед за П. Эренфестом обозначим постоянными коэффициентами дроби, не содержащие r **:** $A=\frac{2E}{m}$**,** $B=\frac{2gM}{(n-3)}$ **и** $C=\frac{\Theta}{m}$**. Тогда итоговое выражение принимает вид:**
$\left(\frac{dr}{dt}\right)=\frac{1}{r}\sqrt{Ar^2+Br^{5-n}-C^2}$ **(12). Сравнение нашего выражения (12) с аналогичным выражением (6) в докладе П. Эренфеста обнаруживает расхождение в значении показателя степени** r**: вместо** r^{4-n} **под корнем при коэффициенте** B **должно быть** r^{5-n}**!**

В качестве конкретного примера подобной силы можно назвать электромагнитные силы взаимодействия электрических токов, которые образуют потенциальное поле не центральной симметрии, как в случае гравитации, а симметрии центрально-осевой [7]. Действительно, силовая характеристика такого поля - магнитное натяжение $T=m_o\,\frac{I}{2pr}$ **(13) является примером центрально-осевой симметрии и порождает поток через замкнутую поверхность** $N_T=m_oIL$ **f** 0 **(14), что и обнаруживает его потенциальный характер [8].**

3. Необходимые поправки к выводам П. Эренфеста.

Обсуждая свои исследования проблемы, П. Эренфест дал сводку выводов об устойчивости движений в пространствах различной размерности, иллюстрируя эти выводы графически, на которых он заштриховал области устойчивого движения [1]. Снова, во избежание кривотолков и недоразумений я здесь с помощью сканера воспроизвожу графики П. Эренфеста для размерностей $n=3, n=4, n$ **f** 4**, на которых с учётом изложенного выше по. П 2 анализа добавлены линии** Br^{5-n} **и суммарные линии, обозначенные** Σ **в отличие от суммарных линий П. Эренфеста, обозначенных** s **(см. рис.1-а), рис. 1-б), рис.2-а), рис.2-б), рис.3-а, рис.3-б)). Помня, что на всех рисунах пунктирными линиями изображены графики членов подкоренного выражения уравнений (6) и (12), горизонтальная линия - график постоянного члена** C^2**, а**

сплошная кривая представляет их сумму как функцию r, приходится теперь признать, что области устойчивых движений, заштрихованные П. Эренфест уже значение коэффициента ом, значительно смещаются, искажаются или вообще исчезают. Другими словами, теперь нельзя вслед П. Эренфесту оптимистически вторить, что: «… в R_3 малое возмущение оставляет траекторию финитной, если энергия не слишком велика…» [1], так как уже значение коэффициента B при $n = 3$ приводит нас к сингулярности при любых значениях A и C.

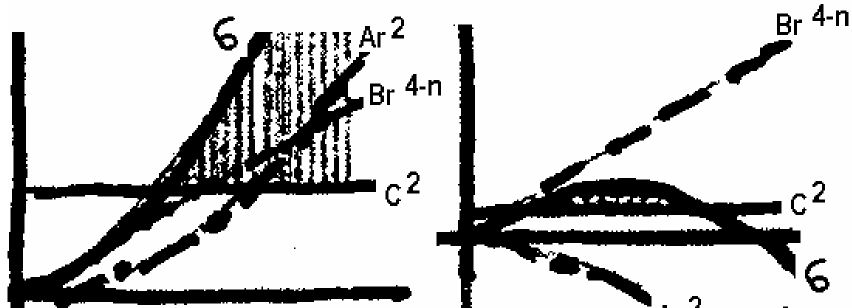

Рис. 1-а) n=3 $A > 0$ Рис. 1-б) n=3 $A < 0$

Действительно, для $n = 3$ на рис. 1-а) и рис. 1-б) финитность сменяется сингулярностью, на рис.2-а) и рис.2-б) наоборот области финитных траекторий значительно расширяются.

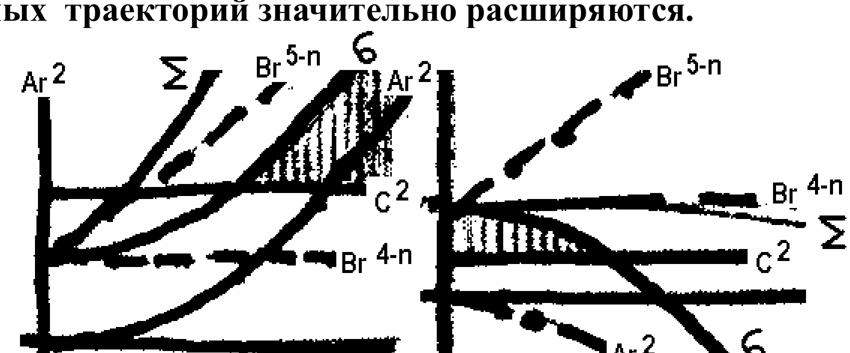

Рис. 2-а) n=4 $A > 0$ Рис. 2-б) n=4 $A < 0$

Значительные искажения областей устойчивого движения представляются и на рс.3-а) и рис. 3-б) для n f 4, из которых кроме того следует также невозможность финитных траекторий при A p 0, а при A f 0 остаётся лишь одна из двух прежних областей финитности траекторий.

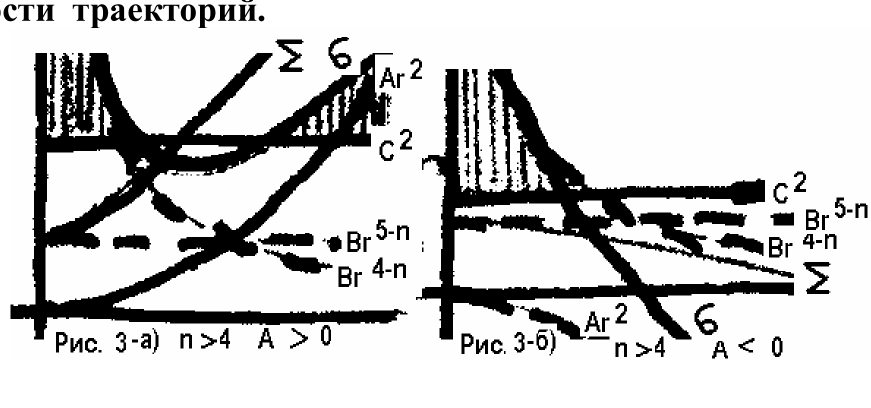

Рис. 3-а) n >4 $A > 0$ Рис. 3-б) n >4 $A < 0$

Разумеется, рассмотрение таких примеров можно было бы продолжить, но уже на основании изложенного необходимо отметить, что финитность и сингулярность в понятии размерности мира непосредственно определяется теми процессами, которые в нём протекают. Другими словами, размерность мира определяется теми процессами, которые в нём происходят. А такие миры - пространства Б. Риман называл функциональными [9]. После Б. Римана возникла и сформировалась в самостоятельную научную дисциплину топология, в недрах которой глубоко разработана топологическая теория размерности [10]. В настоящее время специалисты в этой области считают одним из основных препятствий на пути дальнейшего развития топологической теории размерности обнаруженный ими фактор немонотонности размерности пространства, то есть такую ситуацию, когда подпространство может иметь топологическую размерность большего значения, чем топологическая размерность всего пространства, которому принадлежит исследуемое подпространство.

Однако, в связи с нашим выводом на основе анализа устойчивости движения по П. Эренфесту о зависимости размерности пространства от природы протекающих в нём процессов такое обстоятельство, которое топологи считают препятствием, в действительности может быть использовано физиками для преодоления своей главной трудности, оставшейся нам в наследство со времен П. Эренфеста, то есть для создания той математической модели пространства-времени, которая будет обладать необходимой и достаточной гибкостью при описании всех свойств пространства-времени, включая обширные области современных физических явлений.

Обобщая всё вышеизложенное, можно согласиться с профессором Гореликом Г.Е. в заключительной фразе его фундаментальной монографии [2]: «…Однако современная ситуация в теоретической физике позволяет усмотреть некоторые признаки того, что понятию размерности ещё предстоит участвовать в важных событиях».

Литература:

1. Эренфест П. «Каким образом в фундаментальных законах физики проявляется то, что пространство имеет три измерения?»// Горелик Г.Е. Размерность пространства. М., МГУ, 1983 г., стр. 197-205.
2. Горелик Г.Е. Размерность пространства. М., МГУ, 1983 г., стр. 196.
3. Пригожин И. Р. и Стенгерс И. Порядок из хаоса. Новый диалог человека с природой. Пер. с англ., «Прогресс», 1986 г., стр.275, 364 и др.
4. Логунов А. А. «Релятивистская теория гравитации и новые представления о пространстве-времени» // Вестник МГУ. Физика. Астрономия. Т.27, вып.6, 1986 г. стр.3 и далее.
5. «Куда летит стрела времени?» // газета «ПОИСК» №32 – 33 от 17. 08. 2001 г., стр.
6. Дирак П. А. «Космология и гравитационная постоянная» // П. А. Дирак воспоминания о необычайной эпохе, пер. с англ. М., «Наука», 1990 г., стр.178- 188.
7. Вертинский П. А. «Оптимизация электрмеханических систем методами магнитодинамики» // Мат. V рег. конф. «Сибресурс-2002», Иркутск, 2002 г. стр. 40.
8. Вертинский П. А. К магнитодинамике электризации вращающегося магнита // ж. «Электротехника» N4 / 1998, стр. 47 –49.
9. Риман Б. Сочинения. М-Л. ОГИЗ, 1948 г.,стр.280.
10. Александров П.С. – ред. Пространство функций и размерность. М., МГУ, 1985 г., стр. 67