Анализ и выбор диагностических гипотез на основе модифицированных моделей принятия решений

Проф. Бескровный И. М., Москва,
Российский государственный медицинский университет (РГМУ)

В настоящее время известен широкий спектр методов и моделей эффективного выбора альтернатив, объединяемых в рамках дисциплины, именуемой “Теория принятия решений”. Подавляющее большинство описанных моделей методологически обоснованы и значительная их часть проверена на практике, доказав достаточно высокую эффективность их использования. Тем не менее, ряд базовых моделей в их классической постановке имеют определенные ограничения, сужающие возможную область их применения и снижающих достижимую эффективность их использования. Цель настоящей работы – предложить подход, позволяющий снять указанные ограничения путем модификации известных моделей, придающей им определенную универсальность. При этом повышается возможность их использования при анализе диагностических гипотез и выборе альтернативных стратегий лечения.

Базовые модели классической теории принятия решений

Любая сфера человеческой деятельности, в особенности экономика, медицина или бизнес, связана с принятием решений в условиях неполноты информации. Источники неопределенности могут быть самые разнообразные:

неоднозначность связи наблюдаемых симптомов с истинным характером заболевания наблюдаемого больного;

недостаточная надежность процессов производства, неточность информации и др.

Решения с учетом перечисленных и множества других неопределенных факторов принимаются в рамках так называемой теории принятия решений – аналитического подхода к выбору наилучшего действия (альтернативы) или последовательности действий. В зависимости от степени определенности возможных исходов или последствий различных действий, с которыми сталкивается лицо, принимающее решение, в теории принятия решений рассматриваются три типа моделей:

– выбор решений в условиях определенности, если относительно каждого действия известно, что оно неизменно приводит к некоторому конкретному исходу;

– выбор решения при риске, если каждое действие приводит к одному из множества возможных частных исходов, причем каждый исход имеет вычисляемую или экспертно оцениваемую вероятность появления;

– выбор решений при неопределенности, когда то или иное действие или несколько действий имеют своим следствием множество частных исходов, но их вероятности зависят от состояния окружающей среды.

Стратегия игрока B		B_1 B_2 … B_n
Стратегия игрока A	A_1	a_{11} a_{12} … a_{1n}
	A_2	a_{21} a_{22} … a_{2n}
	…	… … … …
	A_m	a_{m1} a_{m2} … a_{mn}

Табл. 1. Матрица платежей

Методы принятия решений в условиях риска разрабатываются и обосновываются в рамках теории статистических решений, одним из базовых понятий которой является понятие платежной матрицы – одно из базовых понятий в теории игр. В теории игр платежная матрица используется для выбора оптимальной стратегии и для двух игроков представляется в виде таблицы 1, где приняты следующие обозначения:

$A_1 \ldots A_m$ – стратегии игрока A; $B_1 \ldots B_n$ – стратегии игрока B;

$a_{11} \ldots a_{mn}$ – платежи игроков на пересечениях i – й строки и j – го столбца. Так, если игрок A выберет стратегию A_2, а игрок B -стратегию B_n, то игрок A выигрывает (проигрывает) у игрока B сумму a_{2n}.

Анализируя матрицу платежей, игрок получает возможность выбрать оптимальную стратегию, ориентируясь на максимизацию своего выигрыша или на минимизацию возможного проигрыша.

Принятие решений при выборе альтернативной стратегии лечения также предполагает наличие ситуаций выбора наиболее выгодного варианта поведения из нескольких имеющихся вариантов в условиях неопределённости. Такие задачи могут быть описаны матричными играми особого типа, в которых игрок взаимодействует не со вторым игроком, а с окружающей средой. Объективно окружающая среда не заинтересована в проигрыше игрока, однако при наступлении некоторых из ее состояний, проигрыш становится неизбежным. В процессе принятия решения о выборе варианта поведения игрок имеет информацию о том, что окружающая среда может принять одно из нескольких возможных состояний и сталкивается с неопределённостью относительно того конкретного состояния, которое примет окружающая среда в данный момент времени. Применительно к задаче выбора метода лечения в качестве состояний окружающей среды могут рассматриваться такие обстоятельства как резкое осложнение после операции, проявление аллергических реакции, проявившиеся последствия ранее перенесенных заболеваний и т. п.

Матричная игра, в которой игрок взаимодействует с окружающей средой, не заинтересованной в его проигрыше, и решает задачу определения наиболее выгодного варианта поведения с учётом неопределённости состояния окружающей среды, называется статистической игрой или «игрой с природой». Игрок в этой игре называется лицом, принимающим решение (ЛПР). Создателем теории статистических решений считается А. Вальд.

Абрахам Вальд (1939), показал, что две центральных проблемы ортодоксальной статистической теории, а именно, статистическое испытание гипотез и статистическая теория оценивания, могли бы быть расценены как специфические специальные случаи более общей теории принятия решений. Эта работа вводила большую часть «ментального пейзажа» современной теории принятия решений, включая функции потерь, функции риска, допустимые решающие правила, априорные распределения, байесовские правила решения, и минимаксные решающие правила. Термин «теория принятия решений» непосредственно начал использоваться в 1950 году Э. Л. Леманном.

В настоящее время при разработке компьютерных методов анализа диагностических гипотез большей частью используются байесовские правила решения и минимаксные решающие правила. В то же время хорошо развитый аппарат статистической теории решений, базирующийся на использовании матричных таблиц решений, используется в недостаточной мере. С одной стороны это обусловлено некоторыми ограничениями, свойственными моделям принятия решений в классической постановке. С другой стороны сказывается фактор привычности к байесовским методам и недостаточность представлений о возможностях матричных процедур, используемых в теории принятия решений.

Теория статистических решений представляет ЛПР как лицо, производящее выбор из совокупности альтернатив $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ при условии, что заданы:

1. Набор состояний окружающей среды $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$, факт наступления которых не поддаются управлению, но вероятности их наступлений $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ известны (то есть состояние s_1 будет иметь место с вероятностью p_1 и т. д.).

2. Задана матрица платежей в терминах затрат или выигрышей $\boldsymbol{V_{ij}}$, ассоциированных с каждой парой “альтернатива - состояние окружения”.

Если решение принимается в условиях частичной неопределенности, то, согласно теории принятия решений, статистические игры являются основным подходом.

Основными отличиями статистической игры от игры стратегической являются:

– отсутствие стремления к выигрышу у игрока-«окружающей среды», т. е. отсутствие антагонистического противника;

– возможность для игрока – «ЛПР» провести статистический эксперимент для получения дополнительной информации о стратегиях природы.

Таким образом, теория статистических решений является теорией проведения статистических наблюдений, обработки этих наблюдений и их использования.

В теории статистических решений основные правила могут быть детерминированными и рандомизированными.

ЛПР определяет наиболее выгодную стратегию в зависимости от целевой установки, которую он реализует в процессе решения задачи.

Результат решения задачи ЛПР определяет по одному из критериев принятия решения. Для того чтобы прийти к однозначному и по возможности наиболее выгодному варианту решению, необходимо ввести оценочную (целевую) функцию. При этом каждой стратегии ЛПР ($\boldsymbol{V_i}$) приписывается некоторый результат $\boldsymbol{E(V_i)}$, характеризующий все последствия этого решения. Из массива $\boldsymbol{i}$ результатов принятия решений ЛПР выбирает элемент $\boldsymbol{E(V_{ij})}$, который наилучшим образом отражает мотивацию его поведения.

В тех случаях, когда ЛПР известны вероятности состояний окружающей среды, применяется критерий максимального математического ожидания выигрыша. Платёжная матрица дополняется столбцом, каждый элемент которого представляет собой значение математического ожидания выигрыша при выборе соответствующей стратегии ЛПР:

Если все перечисленные выше элементы матрицы платежей заданы, то предпочтительная альтернатива может быть определена вычислением математического ожидания ценности $\boldsymbol{E(V_i)}$ каждой из рассматриваемых альтернатив по формуле:

Окружающая среда		s_1 s_2 … s_n	Ожидаемая ценность альтернативы
Вероятности наступления		p_1 p_2 … p_n	
Альтернативы	Альтернатива a_1	v_{11} v_{12} … v_{1n}	$E(V_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i V_{ij}$
	Альтернатива a_1	v_{21} v_{22} … v_{2n}	
	…	… … … …	
	Альтернатива a_1	v_{m1} v_{m2} … v_{mn}	

Таблица 2. Матрица решений статистической игры

$$E(V_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i V_{ij}$$

и последующим выбором альтернативы, имеющей наибольшую ожидаемую ценность

$$E(V^*) = \max_i E(V_i).$$

Термин, теперь известный как «ожидаемая ценность» (математическое ожидание ценности), был известен с 17-ого столетия. Блез Паскаль использовал этот термин в его известном пари, которое описано в его работе «Pensées», изданной в 1670. Понятие ожидаемой ценности предлагается применять в ситуации, когда каждое из решений может с различными вероятностями привести к нескольким возможным исходам. Рациональная процедура должна идентифицировать все возможные исходы, определить их ценности (положительные или отрицательные) и вероятности их наступления. Затем следует перемножить соответствующие ценности и вероятности и сложить, чтобы дать в итоге «ожидаемую ценность». Действие, которое будет выбрано, должно обеспечить наибольшую ожидаемую ценность.

Следовательно, теория статистических решений сводит проблему анализа альтернатив к анализу содержащейся в них ***мотивировки*** и предлагает считать наиболее предпочтительной ту альтернативу, для которой математическое ожидание мотивировки имеет наибольшее значение. Однако, в общем случае, многие ситуации выбора не могут быть удовлетворительно описаны моделью анализа альтернатив в классической постановке вследствие множественности критериев, которые подлежат учету в этой модели. Поэтому достаточно широкое распространение получили модифицированные (или расширенные) модели анализа альтернатив.

Расширенная модель анализа альтернатив

Расширенная модель анализа альтернатив была получена на базе классической модели путем внесения следующих изменений:

1. Заменой $\boldsymbol{n}$ состояний окружающей среды набором целевых показателей

$\boldsymbol{G} = \{\boldsymbol{G}_1, \boldsymbol{G}_2. ..., \boldsymbol{G}_n\}$, которые ЛПР желает достигнуть;

2. Заменой платежной матрицы матрицей вероятностей $\boldsymbol{p}_{ij}$, характеризующих шансы на достижение каждого из целевых состояний при реализации каждой из исследуемых альтернатив;

3. Заменой вектора вероятностей реализации состояния окружающей среды на вектор, элементами которого является относительная оценка или кардинальный ранг каждого из назначаемых целевых показателей $\boldsymbol{W} = \{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, ..., \boldsymbol{w}_n\}$.

Оценки целевых показателей (мотивировки)		w_1	w_2	…	w_n	Ценность альтернативы $E(V_i)$
Целевые показатели		G_1	G_2	…	G_n	
Альтернативы	Альтернатива a_1	p_{11}	p_{11}	…	p_{1n}	$E(V_i) = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} w_j$
	Альтернатива a_2	p_{11}	p_{11}	…	p_{2n}	
	Альтернатива a_1	…	…	…	…	
	Альтернатива a_m	p_{11}	p_{11}	…	p_{mn}	

Таблица 3. Модифицированная матрица решений

Таким образом, в модифицированной модели ЛПР освобождается от необходимости устанавливать количественную меру мотивировки для каждой пары “альтернатива - состояние окружения”, задавая платежную матрицу. Вместо этого он оценивает мотивировку, содержащуюся в каждой из альтернатив, на основе ожидаемого вклада этой альтернативы в достижение целей более высокого порядка, мотивировка которых задана извне в виде вектора $\boldsymbol{W}$. Естественно, что в ряде случаев это существенно упрощает проблему для ЛПР, освобождая его от ответственности за назначение оценок мотивировки и сводя задачу просто к логическому анализу.

Структура модифицированной модели представлена таблицей 3. В соответствии с этой моделью наиболее предпочтительной альтернативой является та, которая доставляет максимум полезности (или мотивировки):

$$E(V^*) = \max_i \sum_{j=1}^{n} p_{ij} w_j .$$

По существу, в расширенной модели используется та же самая платежная матрица, как и классической постановке. Действительно, в обоих случаях вклад каждого ***ij***–го элемента матрицы в ожидаемую ценность ***i***–й альтернативы определяется произведением величины выигрыша (проигрыша) на его вероятность. Разница состоит в том, что в классической постановке вероятность наступления ***j***-го состояния среды одинакова для всех альтернатив, а величина ***ij***–го выигрыша (проигрыша) специфична для каждой ***i***–й строки. В модифицированной модели наоборот – выигрыш (проигрыш) по каждому ***j***–му целевому показателю является постоянным, а вероятность получения этого выигрыша (проигрыша) специфична для каждой ***i***–й альтернативы.

В представленном виде таблица решений становится удобней в использовании и получила достаточно широкое распространение. Например, таблицу можно использовать для выбора наиболее вероятного заболевания из группы болезней, имеющих сходные совокупности симптомов.

Для этого:

1. В качестве альтернатив a_i рассматриваются те заболевания, при которых характерными являются наблюдаемые симптомы (гипотезы d_i);

2. В качестве целевых показателей G_j принимаются сами наблюдаемые симптомы s_j;

3. В качестве вероятностей p_{ij} в данном применении проставляются условные вероятности того, что при ***i***-м заболевании наблюдается ***j***-й симптом.

В такой постановке ЛПР исходит из того, что гипотеза d_i (при решении задачи диагностики заболеваний альтернативы называют гипотезами), обладающая наибольшей ожидаемой ценностью, является наиболее вероятной.

Таким образом, модель в классической постановке ориентирована на выбор альтернативы, обеспечивающей достижение наиболее благоприятных результатов в различных состояниях окружающей среды, наступление которых ЛПР контролировать не может. То есть, модель ориентирована, в основном, для целей анализа. Она позволяет выбрать оптимальный характер поведения в условиях неуправляемого наступления состояний окружающей среды. Такую стратегию выбора решений условно можно определить как «оборонительную»

А модифицированная модель ориентирована на более активный характер исследований. Она позволяет сравнивать между собой альтернативные варианты разрабатываемых конструкций, лечебных средств, организационных решений и т. д., и выбирать альтернативу, обеспечивающую выбор такой альтернативы, которая повышает вероятность достижения желательных целевых показателей и снижает вероятность наступления негативных последствий принятия того или иного решения. При этом под выбором предпочтительной альтернативы может также подразумеваться выявление (распознание) наиболее вероятной альтернативы (причины) появления некой совокупности последствий (наблюдаемых ***j***–х признаков). Следовательно, выбор той или другой модели зависит от целей проводимого анализа.

При всей кажущейся простоте постановки применение модифицированной модели требует обязательного дополнительного рассмотрения для выбора используемых критериев оценки полезностей. Прежде всего, следует иметь в виду, что в качестве целевых показателей следует иметь в виду не только желательные результаты, достигаемые при выборе конкретной альтернативы, но и все неизбежные последствия, обусловленные этим выбором, в том числе, естественно и негативные. При этом целевые показатели (последствия) могут иметь и количественную меру.

Рассмотрим в качестве примера проблему выбора количества резервируемых коек для больных, доставляемых службой скорой медицинской помощи (СМП) в больницу скорой помощи. Известно, что госпитализация в такую больницу осуществляется из трех источников:

а) Так называемые “плановые” больные, госпитализируемые по направлениям поликлиник. Госпитализация таких больных осуществляется в определенный, заранее назначаемый день, и поддается целенаправленной регулировке.

б) Так называемый “самотёк” - это больные, обращающиеся непосредственно в больницу сами, или доставляемые родственниками или ещё кем-нибудь. Этот поток также поддается регулировке, но уже в ограниченных пределах, поскольку трудно отказать в госпитализации человеку, находящемуся действительно в плохом состоянии. Однако часть таких больных может получить отказ по причине отсутствия свободных коек.

в) Больные и пострадавшие, доставляемые бригадой СМП, так называемые “экстренные” больные. По статусу больницы скорой помощи такие больные должны госпитализироваться в обязательном порядке, независимо от наличия или отсутствия свободных коек.

Таким образом, проблема управления коечным фондом в такой больнице состоит в оптимальном выборе количества коек, резервируемых для экстренных больных. Если это количество будет чрезмерным, то койки будут простаивать, что влечет за собой потери, связанные с нерациональным использованием ресурсов (питания, медикаментов, больничного персонала). Если резерв не выделяется или выделяется в недостаточном количестве, то больные, доставляемые бригадами СМП, будут госпитализировать с “перегрузом”, на приставных койках в коридорах и неприспособленных помещениях. Возникают дополнительные проблемы, связанные с перегрузкой больничного персонала, нехваткой питания, медикаментов и т. п. Сам механизм резервирования при этом реализуется достаточно просто - в поликлиники с упреждением на несколько дней сообщается количество больных, которые могут быть госпитализированы в плановом порядке. Это количество можно определяеть, исходя из количества больных, подлежащих выписке на этот день (вполне определенное число) за вычетом количества коек, резервируемых для экстренных больных.

Рассмотрим, в качестве примера, ситуацию, когда поток экстренных больных по наблюдению персонала имеет следующее вероятностное распределение, представленное в таблице 4. Для поиска оптимального решения потери, связанные с недогрузкой и с перегрузкой коечного фонда не обязательно выражать в абсолютных числах - достаточно определить их относительные значения. Пусть потери, связанные с простаиванием одной койки, равны единице, а потери, связанные с нехваткой одной койки для госпитализации экстренного больного – 1,5 единицам. Рассматривая в качестве альтернатив выделение резерва в количестве 2, 4, 6, 8, 10 коек, получим следующую таблицу 5 ожидаемых потерь, связанных с выбором каждой из альтернатив. В табл. 5 в строке “Величина дисбаланса” показана величина возможного несоответствия между выделенным резервом и реально поступившим количеством экстренных больных. То есть каждый целевой показатель G_j соответствует определенной величине дисбаланса межу количеством зарезервированных коек и количеством фактически поступивших экстренных больных.

Положительные числа соответствуют недогрузке, а отрицательные - перегрузке (или дефициту).

Количество больных N	<2	2	4	6	8	10	>10
Вероятность поступления P_N	0	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1	0

Таблица 4. Распределение вероятностей поступления больных

При этом нечетные количества пропущены для упрощения таблицы. Цена простаивания одной койки принята равной единице, а цена дефицита одной койки - 1,5 единицы. Отрицательный знак цены при дефиците, выражаемом в строке “Величина дисбаланса”, принят для того, чтобы величина потерь при дефиците так же выражалась положительным числом.

Элементы матрицы в пересечении строки величины резерва и колонки дисбаланса отражают вероятности возникновения такого дисбаланса. Значения этих вероятностей определены в соответствии с данными табл. 4. Так, например, при выборе альтернативы a_1 (резерв 2 койки) вероятность дефицита в 4 койки возникает при поступлении шести экстренных больных. Стало быть, вероятность такого события в соответствии с табл. 3 равна 0,2 и т. д.

Проводя расчеты в соответствии с формулой

$$E(V_i) = \sum_j p_{ij} w_j G_j,$$

где G_j - величина дисбаланса, получаем результаты, приведенные в табл. 5 в колонке “Общие потери”.

Цена дисбаланса		1	1	1	1	0	-1,5	-1,5	-1,5	-1,5	Общие потери
Величина дисбаланса		2	4	6	8	0	-2	-4	-6	-8	
Резерв коек	2	0	0	0	0	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1	6,0
	4	0,1	0	0	0	0,2	0,4	0,2	0,1	0	3,5
	6	0,2	0,1	0	0	0,4	0,2	0,1	0	0	2,0
	8	0,4	0,2	0,1	0	0,2	0,1	0	0	0	2,5
	10	0,2	0,4	0,2	0,1	0,1	0	0	0	0	4,0

Таблица 5

Поскольку в данном случае оценивались не выигрыши, а потери, то, естественно, наилучшей альтернативой по критерию минимума общих ожидаемых потерь следует признать альтернативу a_3 (резерв - 6 коек).

Однако критерий максимума общего ожидаемого выигрыша (или минимума общих потерь), рассчитываемых по математическим ожиданиям, не является единственным, используемым при выборе предпочтительных альтернатив. Применение критерия максимального математического ожидания выигрыша оправдано лишь тогда, когда ситуация, в которой принимается решение, следующая:

1. ЛПР известны вероятности всех состояний окружающей среды.
2. Минимизация риска проигрыша представляется ЛПР менее существенным фактором принятия решения, чем максимизация среднего выигрыша.

Необходимость иметь информацию о вероятностях состояний окружающей среды ограничивает область применения данного критерия.

Поэтому на практике применяются и другие критерии такие, как критерий Лапласа, Минимаксный (Максиминный) критерий, критерий Сэвиджа, критерий Гурвица. Выбор того или иного критерия связан, главным образом, с той мерой риска, на которую может пойти ЛПР в той или иной ситуации.

Критерий Лапласа опирается на известный принцип недостаточного обоснования. Если вероятности разных событий не определены с достаточной достоверностью, то нет никакого основания считать что эти вероятности различаются. Стало быть, в условия неопределенности, вполне разумной является гипотеза о том, что вероятности наступления разных событий равновероятны. Тогда исходную задачу можно рассматривать как задачу принятия решений в условиях риска, когда выбирается альтернатива $\boldsymbol{a}_{\mathbf{i}}$**,** доставляющая наибольший ожидаемый выигрыш (или наименьшие ожидаемые потери). В этом случае предпочтительная альтернатива определяется по формуле

$$E\left(V^*\right) = \max_i \left(\min\right) \left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} w_j G_j \right\}.$$

В рассматриваемом примере в соответствии с критерием Лапласа примем, что вероятность поступления экстренных больных в количестве от 2-х до 8-ми одинакова и равна 0,2. Поэтому, в таблице решений (табл. 5) заменяем все вероятности (в тех ячейках, где они имеют ненулевые значения) на величину 0,2 и получаем новую таблицу решений (табл. 6). В соответствии с данными табл. 6 ожидаемые величины потерь, рассчитанных по критерию Лапласа, будут иметь следующие значения:

$E(V_1) = 0{,}2(3+6+9+12) = 6;$ $E(V_2) = 0{,}2(2+3+6+9) = 4;$ $E(V_3) = 0{,}2(2+4+3+6) = 3;$

$E(V_4) = 0{,}2(2+4+6+3) = 3;$ $E(V_5) = 0{,}2(2+4+6+8) = 4{,}0.$

Цена дисбаланса		1	1	1	1	0	-1,5	-1,5	-1,5	-1,5	Общие потери
Величина дисбаланса		2	4	6	8	0	-2	-4	-6	-8	
Резерв коек	2	0	0	0	0	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	6,0
	4	0,2	0	0	0	0,2	0,2	0,2	0,2	0	3,5
	6	0,2	0,2	0	0	0,2	0,2	0,2	0	0	2,0
	8	0,2	0,2	0,2	0	0,2	0,2	0	0	0	2,5
	10	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0	0	0	0	4,0

Таблица 6

Из полученных результатов следует, что по критерию Лапласа можно выбрать либо альтернативу $\boldsymbol{a}_{\mathbf{3}}$ (резерв 6 коек), либо альтернативу $\boldsymbol{a}_{\mathbf{4}}$ (резерв 8 коек).

Минимаксный (максиминный) критерий является наиболее осторожным, поскольку он основывается на выборе наилучшей из наихудших (или наихудшую из наилучших) возможностей. В соответствии с этим критерием предпочтительная альтернатива выбирается исходя из соотношения

$$E\left(V^*\right) = \min_i \max_j \left(\max_i \min_j \right) w_j G_{j.}$$

В рассматриваемом примере применение этого критерия приводит к следующим результатам:

$E(V_{1max}) = E(V_{17}) = 2{,}4$; $E(V_{2max}) = E(V_{26}) = 1{,}2$; $E(V_{3max}) = E(V_{36}) = E(V_{37}) = 0{,}6$;

$E(V_{4max}) = E(V_{41}) = E(V_{42}) = 0{,}8$; $E(V_{5max}) = E(V_{57}) = 1{,}6$;

Следовательно, минимаксный критерий при выбранном наборе числовых данных указывает альтернативу $\boldsymbol{a_3}$ (резерв 6 коек) в качестве предпочтительной. Выбранная таким образом стратегия полностью исключает риск. Применение минимаксного критерия оправдано, если ситуация, в которой принимается решение следующая:

1. О возможности появления состояний окружающей среды ничего не известно;.
2. Решение реализуется только один раз;
3. Необходимо исключить какой бы то ни было риск.

Поэтому, для "исправления" чрезмерной "пессимистичности" минимаксного критерия предпочтительно использовать критерий Сэвиджа (критерий минимального риска).В случае использования критерия минимаксного риска Сэвиджа величина $\boldsymbol{a_{maxj} - a_{ij}}$, где $\boldsymbol{a_{maxj}}$ – максимальный элемент $\boldsymbol{j}$-го столбца, может быть интерпретирована как дополнительный выигрыш, получаемый в условиях состояния окружающей среды Sj или вклад в достижение показателя Gj при выборе ЛПР наиболее выгодной стратегии, по сравнению с выигрышем, получаемым ЛПР при выборе в тех же условиях любой другой стратегии. Эта же разность может быть интерпретирована как величина возможного проигрыша при выборе ЛПР $\boldsymbol{i}$-й стратегии по сравнению с наиболее выгодной стратегией.

На основе данной интерпретации разности выигрышей производится определение наиболее выгодной стратегии по критерию минимаксного риска. Таким образом, *критерий Сэвиджа* "исправляет" положение введением новой матрицы потерь, в которой значения потерь $\boldsymbol{L(a_i, G_j)}$ заменяются значениями "приведенных" потерь $\boldsymbol{L^*(a_i, G_j)}$, вычисляемых следующим образом:

$$L^*\left(a_i, G_j\right) = \begin{cases} \max\limits_{a_k}\left\{L\left(a_k, G_j\right)\right\} - L\left(a_i, G_j\right) & \text{если } L \text{ - доход;} \\ L\left(a_i, G_j\right) - \min\limits_{a_k}\left\{L\left(a_k, G_j\right)\right\}, & \text{если L - потери.} \end{cases}$$

Ситуация, в которой оправдано применение критерия Сэвиджа, аналогична ситуации минимаксного критерия, однако наиболее существенным в данном случае является учёт степени воздействия фактора риска на величину выигрыша.

Еще большей гибкостью обладает *критерий Гурвица*, который охватывает ряд различных подходов к принятию решений: от наиболее оптимистичного до наиболее пессимистичного.

Критерий Гурвица устанавливает баланс между случаями крайнего оптимизма и крайнего пессимизма взвешиванием обоих способов поведения введением соответствующих весов a и $1 - a$, где a принимает значение $0 \le a \le 1$. Если $\boldsymbol{L(a_i, G_j)}$ представляет выигрыш, то наилучшая из альтернатив выбирается в соответствии с выражением:

$$E\left(V_i^*\right) = \max_{a_i}\left\{a \max_{G_j} L\left(a_i, G_j\right) + (1 - a)\min_{G_j} L\left(a_i, G_j\right)\right\}.$$

А в том случае, когда $L(a_i, G_j)$ представляет потери, для выбора наилучшей альтернативы используется выражение

$$E\left(V_i^*\right) = \min_{a_i}\left\{a \min_{G_j} L\left(a_i, G_j\right) + \left(1 - a\right) \max_{G_j} L\left(a_i, G_j\right)\right\}.$$

Параметр а выбирается как показатель оптимизма: при a = 1 критерий получается чрезмерно оптимистичным; при a = 0 он чрезмерно пессимистичен. Значение a между 0 и 1 может определяться в зависимости от склонности ЛПР к риску и от абсолютного уровня ожидаемого выигрыша или потерь. Как правило, чем большее значение имеет ожидаемая величина выигрыша или потерь, тем меньшую склонность к риску проявляет практически любой ЛПР.

Оба из рассмотренных классов моделей имеют достаточно серьезные ограничения в смысле адекватного отображения, как ситуации выбора, так и полноты оценки ожидаемых последствий этого выбора. Так, в классическом варианте элементами платежной матрицы являются выигрыши (проигрыши), оцениваемые единственным показателем. Этого может быть достаточно в простейших, например в игровых ситуациях, если под выбором альтернативы подразумевается выбор очередного хода, а под состоянием окружающей среды понимается ожидаемый ход противника. Тогда выигрыш в шахматах – это предпочтительность достигнутой позиции, степень которой может быть оценена количественно. Выигрыш в покере – вероятность получения (или потери) определенной суммы денег и т. п.

Но совсем иная ситуация возникает при оценке предпочтительности альтернативного организационного решения. В сколь-нибудь серьезных ситуациях любое решение влечет за собой несколько значительных последствий как позитивных, так и негативных. Конечно, ожидаемая ценность комплексного исхода может быть определена путем введения рангов полезностей для каждого из исходов и последующего суммирования. Однако адекватность такой оценки во многих случаях может оказаться недостаточной.

С этой точки зрения использование расширенной модели представляется предпочтительным. В платежной матрице в табл. предполагается оценка всех ожидаемых последствий G_j путем введения соответствующих рангов. Этот подход является более конструктивным, особенно, если при составлении перечня ожидаемых последствий не забывают о негативных. А вероятность последнего довольно велика. В известной мере это связано с тем, что последствия в рассматриваемой таблице решений именуются целями. Естественно предположить, что оценивая вероятность достижения ряда важных целей можно выпустить из виду, что достижение любой из них может повлечь за собой реализацию нежелательных последствий.

Серьезным недостатком расширенной модели является то обстоятельство, что ожидаемая значимость (полезность) любой из намеченных целей по существу оценивается только для одного состояния окружающей среды. Причем для этого состояния нет сформулированного описания. Между тем, значимость каждой из целей может значительно изменяться при изменении состояния окружающей среды. Даже если не забыты вероятные негативные последствия, то оценки их значимости могут кардинально измениться при наступлении определенных состояний среды.

Существует возможность объединения описанных моделей обоих классов в одну интегрированную модель, которая обладала бы достоинствами обеих моделей и, в то время, позволяла бы избавиться от недостатков, присущих каждой из них. с этой целью предлагается использовать модель с трехмерной матрицей решений, структура которой представлена на рис. 1.

Предлагаемая модель представляет ЛПР как лицо, производящее выбор из совокупности альтернатив $\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, ..., \boldsymbol{a}_m\}$ при условии, что заданы:

1. Набор состояний окружающей среды $\boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{s_1}, \boldsymbol{s_2}, ..., \boldsymbol{s}_k\}$, факт наступления которых не поддаются управлению, но вероятности их наступлений $\boldsymbol{P} = \{p_1^S, p_2^S, ... p_k^S\}$ известны (то есть состояние $\boldsymbol{s_1}$ будет иметь место с вероятностью $\boldsymbol{p_1}$ и т. д.).

2. Задана совокупность N возможных исходов $G_1, G_2, …, G_j$. При этом $1 \leq j \leq N$.

3. Задана матрица вероятностей p_{ij} того, что выбор i-й альтернативы приведет к j-му исходу. Исходы могут быть как взаимонезависимыми, так и связанными между собой определенными зависимостями. Это обстоятельство учитывается при оценке вероятностей p_{ij}. Позитивные исходы могут трактоваться как цели, для достижения которых и производится выбор наилучшей альтернативы. Негативные исходы отображают факт реализации возможных негативных последствий.

4. Задана матрица платежей в терминах затрат или выигрышей $\boldsymbol{w_{jk}}$, ассоциированных с каждой парой “исход - состояние окружения”.

В ситуациях, когда нет необходимости учитывать различные состояния окружающей среды, то есть, либо это состояние не оказывает существенного влияния, либо маловероятны заметные изменения этого состояния, модель, представленная на рис.3, сводится к двухмерной модифицированной матрице решений, предствленной таблицей 3.

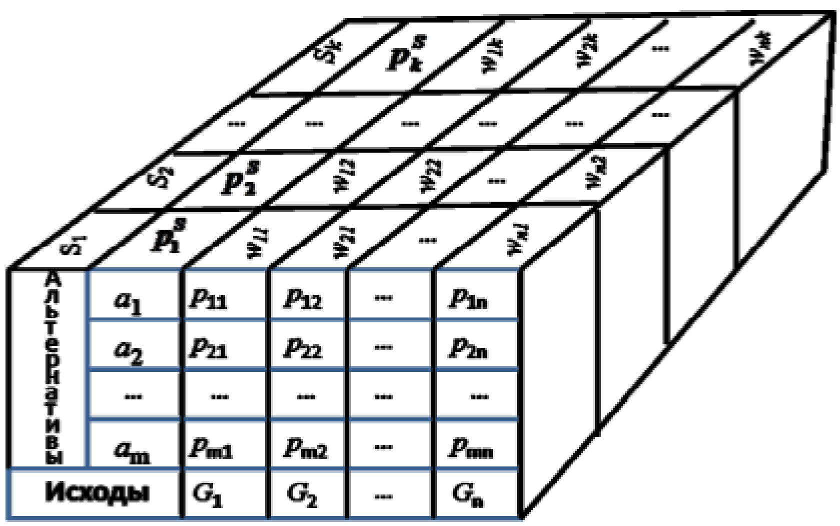

Рис.1 Трехмерная матрица решений

Ценность каждой i-ой альтернативы при k-ом состоянии окружающей среды определяется соотношением:

$$V(A_{ik}) = \sum_{j=1}^{N} p_{ij} w_{jk} \qquad (1)$$

Лучшей альтернативой является та, которая обладает наибольшей ожидаемой ценностью.

В ситуации, когда подразумевается, что каждая из анализируемых альтернатив заведомо приводит лишь к одному из исходов, трехмерная матрица решений сводится к двухмерной матрице статистической игры, представленной таблицей 2. На рис. 1 эта матрица отображена в плоскости XZ. В качестве выбираемых альтернатив в этом случае рассматриваются ожидаемые исходы, а элементы матрицы платежей, которые в табл. 3 обозначаются v_{ij}, в матрице на рис. 1 обозначены как w_{jk}. Наилучшей альтернативой в этой ситуации является та, выбор которой доставляет исход G_j, имеющий наибольшую ожидаемую ценность. Ожидаемая ценность каждого из исходов может быть определена из соотношения:

$$V(G_j) = \sum_{k=1}^{L} p_k^S w_{jk} \qquad (2)$$

Таким образом, трехмерная матрица на рис. 1 представляет совокупность LN двухмерных матриц. При этом L матриц, отображаемых в плоскости XY, являются модифицированными матрицами решений, а N матриц, отображаемых в плоскости YZ , являются матрицами статистической игры.

Эта особенность трехмерной матрицы придает ей свойство универсальности, поскольку позволяет более полно прогнозировать как ожидаемый выигрыш при выборе той или иной альтернативы, так и степень тяжести сопутствующих ей негативных последствий. Например, ожидаемая ценность каждой из анализируемых альтернатив можно оценить из соотношения:

$$V_{\Sigma}(A_i) = \sum_{k=1}^{L} V(A_{ik}) \qquad (3)$$

В предлагаемом виде трехмерная матрица может использоваться для анализа и выбора во множестве сложных ситуаций. Например, при решении задач диагностики в качестве альтернатив a_i выбираются альтернативные диагностические гипотезы. В качестве исходов G_j – набор симптомов присущих совокупности конкурирующих диагностических гипотез. Элементами платежной матрицы a_{ij} являются априорные вероятности того, что данный j-й симптом указывает на наличие i-го заболевания. В качестве факторов состояния окружающей среды S_l могут использоваться такие важные аспекты как наличие сопутствующих заболеваний, ранее перенесенные заболевания, общее состояние организма (истощенность и т. п.), возрастная группа и т. д. Для факторов, наличие которых известно достоверно (например, возрастная группа,), значения вероятностей p_l^S принимаются равными единице. Для факторов, наличие которых лишь предполагается, проставляются соответствующие оценки этих вероятностей.

Значения показателей диагностической значимости симптомов w_{il} выбираются с учетм наличия существенных факторов S_l . В качестве таковых могут использоваться также показатели степени проявления того или иного симптома (слабо, заметно, значительно, ярко выражено). Ясно, что более детальный учет этого обстоятельства может существенно повысить достоверность получаемых оценок.

Литература

1. Х. Таха Ведение в исследование операций. - М., Мир, 1985
2. Льюис Р., Райф Х. Игры и решения. - М..ИЛ. 1961
3. Коршунов Ю. М. Математические основы кибернетики, - М., Энергия,1980
4. Исследование операции. пер. с англ. под ред. Бескровного И. М., Макарова И. М. - М., Мир, 1981
5. Теория выбора и принятия решений: Учебное пособие. – М.,Наука, 1982
6. Питер Джексон. Введение в экспертные системы. 3-е издание