Неклассическая задача Дирихле

Сергиенко Л.С., Кусов М.С.

Иркутский государственный технический университет.

Иркутск. Россия

При математическом моделировании процессов самой различной природы (трансзвуковых течений в гидро – и газовой динамике, бесконечно малых изгибаний выпуклых поверхностей вращения, колебаний оболочек с кривизной переменного знака и мн. др.) встречаются уравнения математической физики, которые могут менять тип на различных многообразиях вырождения пространства – времени.

Рассмотрим уравнение при заданном

$$u_{xx} + u_{yy} + \frac{x^2 + y^2}{R^2 + x^2 + y^2} u_{zz} = 0, \tag{1}$$

эллиптическое во всём пространстве за исключением точек оси аппликат, в которых оно параболически вырождается.

Возьмём цилиндр с боковой поверхностью Г, верхним основаниями. Обозначим D_0 часть оси , лежащую внутри D.

<u>З а д а ч а.</u> Найти регулярное в области D решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям

$$u|_{\Gamma} = f, \quad u|_{(\Gamma_0)} = 0, \quad u|_{(\Gamma_1)} = 0,$$

(2) где f - заданная дважды непрерывно дифференцируемая функция, обращающаяся в нуль на границе Г.

Под регулярным решением задачи (1) – (2) понимается дважды непрерывно дифференцируемое в области D решение, непрерывное вплоть до границы цилиндра и ограниченное в точках отрезка D_0.

Докажем, что при определённых условиях поставленная задача корректна, то есть имеет единственное решение вида

$$u(x,y,z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z)\, b_k(x,y). \qquad (3)$$

Разделяя переменные в (1), получим

$$a_k'' + \mu_k a_k = 0, \qquad \Delta b_k - \frac{x^2+y^2}{R^2+x^2+y^2} b_k = 0.$$

При краевых условиях $a_k(0) = 0,$ $a_k(h) = 0$ и находим

$$a_k(z) = \sin k\pi z/_h, \qquad k = 1, 2, 3, \dots .$$

(4) Найдём b_k в виде где - полярные координаты. По методу Фурье

$$\Phi_n'' + \tau_n \Phi_n = 0,$$

$$\rho^2 \Psi_n'' + \rho \Psi_n' - \left(\mu^2 \frac{\rho^4}{R^2+\rho^2} + \tau_n \right) \Psi_n = 0. \qquad (5)$$

Однозначное периодическое решение при $\tau_n = n^2$.

(6) Второе уравнение (5) всегда имеет интеграл в виде ряда

$\Psi = \rho^{\varepsilon} \sum_{i=0}^{\infty} c_i \rho^i,$ абсолютно и равномерно сходящегося в круге $|\rho| < R$ при целых значениях параметра ε.

При $\varepsilon = -n,\ c_0 = 1,$ $c_2 = c_3 = 0$ получаем единственное ограниченное при $\rho \to 0$ решение

$$\Psi_n(\rho) = \rho^{-n} \left(1 + \sum_{i=0}^{\infty} c_{4+2i,n} \rho^{4+2i} \right). \qquad (7)$$

где $$c_{4+2i,n} = \frac{\mu^2}{4R^{2i+2}} \sum_{j=0}^{i} c_{2j,n} \frac{R^{2j}}{(2+i)(2+i+n)}.$$

Тогда решение уравнения (1) в цилиндрических координатах

$$\mathbf{u}(\varphi,\rho,z) = \sum_{k,n=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{\Psi_{k,n}(\rho)}{\Psi_{k,n}(R)} \right] \times \sin {}^{k\pi z}/_{h} \times \quad \times \ [A_{k,n}\cos(n\varphi) + B \right. \tag{8}$$

Коэффициенты $A_{k,n}$ и $B_{k,n}$ определяются из условия

$f \ni C^2$

$[u|]_{\rho=R} = f(\varphi,z)$, если функцию и $f = 0$ разложить в абсолютно и равномерно сходящийся ряд Фурье

$$f(\varphi,z) = \sum_{k,n=0}^{\infty} \sin \left[k\pi z / h \right] (A_{kn} \cos(n\varphi) + B_{kn} \sin(n\varphi)), \tag{9}$$

$$n, k = 0, 1, 2, 3, \dots . \tag{10}$$

Сходимость построенного ряда (8) в виде

$$u(\varphi,\rho,z) = \sum_{k,n=0}^{\infty} \sin {}^{k\pi z}/_{h} \quad b_{kn}(\varphi,\rho)$$

доказывается по алгоритму

Список литературы:

1. Сергиенко Л.С. Математическое моделирование физико-технических процессов. - Иркутск: Изд-во Ир ГТУ, 2006. – 228 с.