ПРИМИНЕНИЕ СГЛАЖИВАЮЩЕГО КУБИЧЕСКОГО СПЛАЙНА ДЛЯ АППРОКСИМАЦИИ ТЕМПЕРАТУНЫХ ПОЛЕЙ ПРИ РЕШЕНИИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

А.А. Черепахина

Тамбовский Государственный Технический Университет, Тамбов, Россия

Особым классом задач теплофизики являются обратные задачи. Обратные задачи позволяют определять причину (теплофизические характеристики материала) по следствиям (известным из эксперимента температурным полям). Методы решения обратных задач являются научной основой эффективных автоматизированных средств лабораторного и натурного теплового эксперимента. Требования высокой точности решений, без которой невозможна оптимизация по тепловым критериям, стали причиной повышенного интереса к решениям обратных задач [1]. Большинство обратных задач являются некорректно поставленными - малым возмущениям исходных данных могут соответствовать сколь угодно большие возмущения решения. То есть ошибки при решении обратных задач существенно зависят от качества входных экспериментальных данных. Однако экспериментальная информация всегда содержит ошибки, обусловленные методом измерения. Таким образом, при решении обратных задач теплопроводности по восстановлению теплофизических свойств по температурным измерениям возникает необходимость сглаживания опытных данных.

Целью данной работы является разработка метода предварительной математической обработки экспериментальных данных, направленного на сглаживание случайных помех и не затрагивающего исследуемую зависимость температурного поля.

Используем для сглаживания экспериментальных данных кубическую сплайн-функцию. Кубическим сплайном $S_i(t)$ называется полином со следующими свойствами [2,3]:

1. На каждом интервале $[x_i, x_{i+1}) \in [a,b]$, $i = 1..n$, где $[a,b]$ – область определения сплайна, сплайн $S_i(x)$ можно представить кубическим полиномом в виде
$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3.$$
2. На всей области определения $[a,b]$ сплайна функция $S_i(x)$ дважды непрерывно дифференцируема.

В отличие от интерполяционного сплайна, точно проходящего через экспериментальные точки (x_i, y_i), $i = 1..n$, сглаживающий сплайн «проходит» в определенной близости от этих точек, тем самым «сглаживая» погрешности задания координат (x_i, y_i). Таким образом задача сглаживания формулируется в виде минимизации функционала [2,3]:

$$\Phi[S] = \int_a^b (S''(x))^2 dx + \sum_{i=1}^{n} P_i^{-1}(y_i - S(x_i))^2 ,$$

где $P_i \in [0,1]$ – весовые коэффициенты. Структура функционала обеспечивает минимальную кривизну сплайна (первое слагаемое) и наименьшее отклонение прохождения сплайна от экспериментальных значений (второе слагаемое). Однако эти условия являются противоречивыми, так как приближение кривой сплайна к экспериментальным точкам увеличивает кривизну. Оптимальное соотношение между этими требованиями обеспечивается выбором весовых коэффициентов P_i, характеризующих значимость i-го измерения. Чем меньше значение коэффициентов, тем сплайн-функция проходит ближе к экспериментальным точкам.

Необходимое условие минимума функционала записывается в виде

$$S_i + P_i D_i = y_i, \text{ где } D_i = \begin{cases} S'''(x_0+), \ i = 0, \\ S'''(x_i+) - S'''(x_i-), \ i = 1...n-1, \\ -S'''(x_n-), \ i = n. \end{cases}$$

Естественные краевые условия $S''(a) = S''(b) = 0$.

Обозначим $M_i = S''(t_i), \ h_i = x_{i+1} - x_i, \ i = 0...n$.

Тогда имеем $D_i = \begin{cases} (M_1 - M_0)/h_0, \ i = 0 \\ (M_{i+1} - M_i)/h_i - (M_i - M_{i-1})/h_{i-1}, \ i = 1...n-1 \\ -(M_n - M_{n-1})/h_n, \ i = n. \end{cases}$

Кубический сплайн на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ определяется четырьмя коэффициентами, поэтому для его построения на все отрезке $[a, b]$ необходимо определить $4n$ коэффициентов. Условие непрерывности сплайна и его первой и второй производных во всех внутренних узлах $x_i, i = 0...n$ сетки дают $4n$-2 равенств. Два дополнительных равенства получаем из краевых условий. Таким образом, имеем систему уравнений относительно M_i [2,3]:

$$\begin{cases} a_0 M_0 + b_0 M_1 + c_0 M_2 = g_0, \\ b_0 M_0 + a_1 M_1 + b_1 M_2 + c_1 M_3 = g_1, \\ \dots\dots\dots \\ c_{i-2} M_{i-2} + b_{i-1} M_{i-1} + a_i M_i + b_i M_{i+1} + c_i M_{i+2} = g_i, \ i = 2...n-2, \\ \dots\dots\dots \\ c_{n-3} M_{n-3} + b_{n-2} M_{n-2} + a_{n-1} M_{n-1} + b_{n-1} M_n = g_{n-1}, \\ c_{n-2} M_{n-2} + b_{n-1} M_{n-1} + a_n M_n = g_n. \end{cases} \tag{1}$$

Коэффициенты системы определяются как:

$$a_i = 1/3(h_{i-1} + h_i) + 1/h_{i-1}^2 P_{i-1} + (1/h_{i-1} + 1/h_i)^2 P_i + 1/h_i^2 P_{i+1}, \ i = 1,2...n-1;$$
$$b_i = 1/6 h_i - 1/h_i((1/h_{i-1} + 1/h_i)P_i + (1/h_i + 1/h_{i+1})P_{i+1}), \ i = 1,...,n-2;$$
$$c_i = P_{i+1}/(h_i h_{i+1}), \ i = 1..n-3;$$
$$g_i = (y_{i+1} - y_i)/h_i - (y_i - y_{i-1})/h_{i-1}, \ i = 1...n-1.$$

Из краевых условий $S''(a) = S''(b) = 0$ следует, что

$$a_0 = a_n = 1,\ b_0 = c_0 = c_{n-2} = b_{n-1} = g_0 = g_n = 0$$

Решая полученную систему методом прогонки, находим M_i.

Наиболее важной задачей при построении сглаживающего сплайна является выбор весовых коэффициентов. На практике обычно известна величина абсолютной погрешности измерительного прибора, фиксирующего значение величин y_i, т.е. $|S_i - y_i| \le \delta_i$, $i = 0 \ldots n$ или $P_i|D_i| \le \delta_i$, $i = 0 \ldots n$. Используя эти ограничения, организуем итерационный процесс, реализация которого позволяет получить неизвестные M_i и коэффициенты P_i. На каждой итерации необходимо решать систему (1) для нахождения M_i и систему для нахождения P_i:

$$P_i^{(k+1)} = \begin{cases} \delta_i / |D_i^k|, & \text{если}\ \ D_i^k \ge \varepsilon_i \\ 0, & \text{если}\ \ D_i^k < \varepsilon_i. \end{cases}$$

Значение ε выбирается в соответствии со значением δ. При написании программы значения δ брались в интервале $(0;10]$. Для таких δ путем эксперимента подобраны значения $\varepsilon \in [10^{-3};10^{-2}]$.

В качестве начального приближения принимаем $P_i = 0$. Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока значения сплайна в узлах сетки не окажутся в выбранном “коридоре”, то есть не выполнится условие $|S_i - y_i| \le \delta_i$, $i = 0 \ldots n$. Первые пять-десять итераций следует выполнять в принудительном порядке, независимо от выполнения условия. Далее определяем значения сплайна в узловых точках $S_i = y_i + P_i D_i$.

На рисунке 1 приведен график сплайн-функции, сглаживающей экспериментальные данные, построенный согласно разработанному алгоритму при $d = 5$.

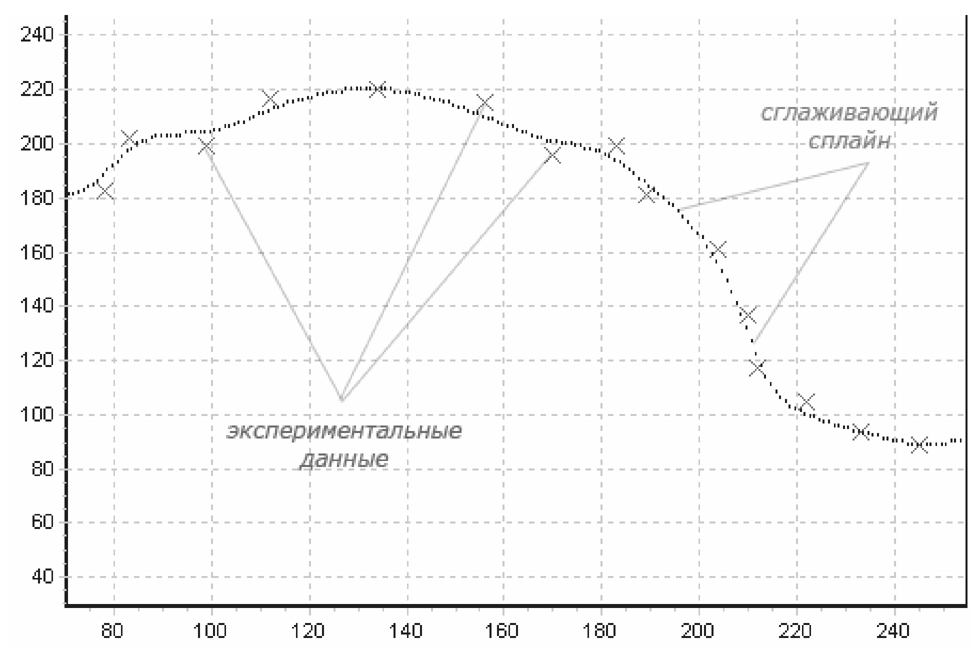

Рисунок 1. График сглаживающей сплайн-функции при $d = 5$.

Сглаживающая сплайн-функция, построенная описанным методом, позволяет устранять искажения экспериментального температурного поля, вызванные случайной погрешностью измерительных приборов, при этом не заглаживая локальные всплески температур, превышающие абсолютную погрешность измерительного прибора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коздоба Л.А., Круковский П.Г. Методы решения обратных задач теплопереноса. – Киев: Наук. Думка, 1982. – С. 360.
2. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980. – С. 352.
3. Воскобойников Ю.Е., Преображенский Н.Г., Седельников А.И. Математическая обработка эксперимента в молекулярной газодинамике. - Новосибирск: Наука, 1984. – С. 240.