

# Численная модель распространения волн, порожденных излучателями сложной пространственной конфигурации в присутствии неоднородностей среды

Печенкин Н.С., Проскурин Д.К., Земцов А.В.

Воронежский государственный архитектурно-строительный университет

В настоящее время актуальной проблемой физической оптики остается эффективное численное решение задачи дифракции. Основная сложность реализации решения связана с большой вычислительной трудоемкостью выполнения интегральных преобразований, обусловленной природой их быстроосциллирующего ядра. Известны работы [1,2], посвященные созданию эффективных алгоритмов для решения этой проблемы, но представленные в данных работах алгоритмы предназначены для получения амплитудно - фазового распределения только на поверхности приемника. Такой подход мало пригоден для решения задач, требующих вычисления поля во всех точках среды распространения между приемником и излучателем. Такая необходимость возникает при численном моделировании рассеяния коротких волн на объектах сложной пространственной конфигурации [3] в присутствии неоднородностей среды распространения.

В данной работе рассмотрено применение алгоритма [1], в задачах рассеяния электромагнитного излучения видимого спектра на совокупности плоских треугольных полигонов в присутствии неоднородностей на пути распространения волн.

Актуальность моделирования плоских треугольных апертур определяется широким распространением полигональных моделей, аппроксимирующих с разной степенью точности реальные макрообъекты со сложной пространственной структурой.

## Модель распространения

Рассмотрим модель распространения [1] электромагнитных волн в пространстве. Как показано в [4,5], получение амплитудно-фазового распределения в любой точке пространства  $P_0$  в приближении Кирхгофа в самом общем случае описывается выражением

$$U(P_0) = \iint_{\Sigma} U_1(P_1) \frac{\exp\left(ikR_{(P_0P_1)}\right)}{R_{(P_0P_1)}} ds. \quad (1)$$

Рассмотрим частный случай, когда излучатель описывается распределением поля на

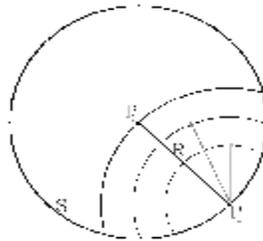
поверхности сферы  $S$  с центром в точке  $P_0$  (Рисунок 1). Тогда  $R_{(P_x, P_y)} = CONST$  и выражение

(1) для поля в точке  $P_0$  примет вид:

$$U(P_0) = \frac{\exp(ikR)}{R} \iint_{\Sigma} U_1(P_1) ds. \quad (2)$$

Численное решение может быть получено как:

$$U(P_0) = \frac{\exp(ikR)}{R} \sum_a \sum_b U_1(P_1(a, b)) \Delta a \Delta b. \quad (3)$$



**Рисунок 1.** Случай излучателя-сферы  $S$  с центром в  $P_0$  и радиусом  $R$ .

В силу того, что приближение Кирхгофа базируется на принципе Гюйгенса — Френеля [4], поверхность излучателя можно представить как множество точечных источников сферических волн (Рисунок 1. Центр сферических волн — точка  $P_1$ ). Вклад комплексного поля каждой точки  $P_s$  излучателя  $S$  в поле  $U(P_0)$  равен:

$$U_{P_s}(P_0) = \frac{\exp(ikR)}{R} U_1(P_s) \Delta a \Delta b. \quad (4)$$

Окончательное комплексное значение поля является суперпозиций вкладов полей  $U_{P_1}(P_0)$  точек  $P_1$ , лежащих на поверхности сферы  $S$ . Очевидно, что вклады точек  $P_1$  имеют одинаковую составляющую  $\Gamma_R$ , зависящую только от параметра  $R$ :

$$\Gamma(R) = \frac{\exp(ikR)}{R} \quad (5)$$

$$U_{P_s}(P_0) = \Gamma_R U_1(P_s) \Delta a \Delta b \quad (6)$$

Таким образом, вычисление интеграла (3) в представленном виде имеет значительную вычислительную избыточность, обусловленную необходимостью вычисления множителя (5), который неоднократно принимает идентичное значение для различных точек на поверхности приемника и излучателя в случае их дискретного представления.

С целью избавиться от избыточных вычислений предлагается проводить предварительные вычисления выражения

$$\Gamma(R_{a \in [c;d]}) = \frac{\exp(ikR_a)}{R_a} \quad (7)$$

для всех возможных значений  $R \in [R_c : R_d]$ , исследуемой совокупности приемников и излучателя.

Суперпозиция поля в точке  $P_0$  в таком случае будет сводиться к вычислению выражения

$$U(P_0) = \sum_a \sum_b \Gamma(0)_{(a,b)} U_1(P_{(a,b)}) \Delta a \Delta b, \quad (8)$$

где  $\Gamma(0)$  - матрица значений, полученных из (7) для всех  $a$ , актуальных для характеристик рассматриваемой модели. Будем называть матрицу  $\Gamma(0)$  базовой, а под  $\Gamma(0)_{(a,b)}$  будем понимать оператор табуляции матрицы на  $a$  и  $b$  элементов соответственно. При этом, значение  $\Gamma(0)$  зависит только от масштаба моделей и шагов дискретизации, принятых в модели, и никак не зависит от геометрии моделируемой системы и длины волны.

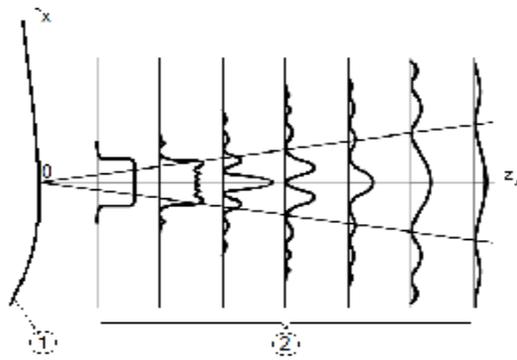


**Рисунок 2.** Алгоритм вычисления поля на основе предварительного расчета  $\Gamma(0)$ .

Можно заметить, что для произвольного случая полученные выражения также справедливы: одинаково верно вычислять поле на приемнике как последовательным взятием

интеграла (1) для каждой точки приемника, так и итерационным сложением «вкладов» в поле каждой точки приемника от каждой точки излучателя. Алгоритм расчета с применением предвычисленной базовой матрицы  $\Gamma(0)$  представлен на рисунке 2.

Поскольку получение значения  $R$  было исключено из алгоритма расчета операции, то в ходе вычисления получаем значение поля во всех точках плоскости  $Z$  (Рисунок 3).



**Рисунок 3.** Динамика изменений поля в плоскости  $Z$ . 1-излучатель, 2- плоскости приема.

В таком случае имеется возможность исследовать динамику изменения поля в пространстве между приемником и излучателем. Данный результат позволяет моделировать наличие неоднородностей среды распространения. Так, к примеру, можно исключать влияние поля в точке  $P(x, y)$  из окончательного распределения на приемнике следующим образом:

$$\hat{U}(P_0) = U(P_0) - \Gamma(0)_{(x,y)} U_1(P_1(x, y)) \Delta a \Delta b, \quad (10)$$

что позволяет учитывать наличие примесей с линейными размерами соизмеримыми шагу дискретизации  $\Delta a \Delta b$ , обладающих свойствами абсолютно черного тела (модель однократного рассеяния в среде со случайными неоднородностями [6]).

Следует отметить, что при данном способе расчета не учитывается взаимное расположение неоднородностей относительно излучателя. Для получения результатов, адекватных экспериментальным данным, следует применять оператор (10) последовательно в порядке соответствующему расстоянию  $R$ :

$$\forall (x, y) \in (X, Y), R(P_1(x_j, y_j)) < R(P_1(x_{j+1}, y_{j+1})). \quad (11)$$

Оценим выигрыш в производительности вычислений при использовании выражения (3) и (8) для вычисления распределения как на конечном приемнике, так и на промежуточных плоскостях. В случае (3) для получения полной картины амплитудно-фазового распределения необходимо совершить  $N_1$  элементарных операций<sup>1</sup> для всего пространства между

<sup>1</sup> Под элементарными операциями понимаются операции обращения на запись и чтение к элементам массива, арифметические операции.

приемником и излучателем:

$$N_1 \approx z(N_{\text{exp}})^n \prod_{i \in 1:n} s_i r_i, \quad (12)$$

где  $s_n$ ,  $r_n$  количество отсчетов по измерению  $n$  на приемнике и излучателе соответственно,  $N_{\text{exp}}$  — количество необходимых операций для вычисления ядра преобразования, а  $z$  — количество промежуточных плоскостей приема. Выражение (12) базируется на следующих соображениях:

- 1) для получения значения поля в одной точке на поверхности приемника необходимо вычислить ядро интегрального преобразования для каждой точки излучателя, или  $\prod_i (s_i N_{\text{exp}})$ ;
- 2) общее число контролируемых точек на приемнике  $\prod_i (r_i)$ ;
- 3)  $N_{\text{exp}}$  не меняется.

Тогда, для случая (8), величину  $N_2$  можно оценить следующим образом:

$$N_2 \approx z(N_{\text{exp}})^n + s^{(n)} N_{\text{tab}}, \quad (13)$$

где  $N_{\text{tab}}$  - количество операций, затрачиваемых на табуляцию матрицы  $\Gamma^{\bullet\bullet}$ , при этом первое слагаемое обозначает вклад, необходимый для ее первоначальной генерации (рисунок 2).

### Моделирование треугольных излучателей

Как упоминалось выше, для моделирования объектов сложной пространственной конфигурации целесообразно использовать полигональное представление моделей. В качестве базового формата в работе применялся широко распространенный формат 3ds, который позволяет хранить пространственную структуру объекта в виде совокупности плоских треугольных полигонов в пространстве, заданных тремя вершинами  $P_1, P_2, P_3$ . Именно это представление использовалось при численном моделировании треугольных излучателей.

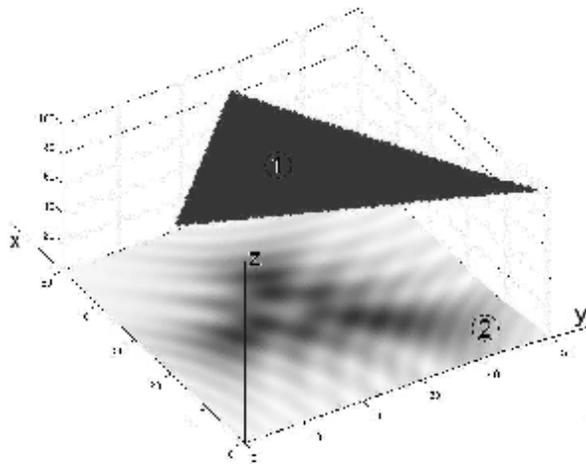
Представление полигона в модели основывалось на известном правиле [7] аналитической геометрии: точка  $P(x, y, z)$  лежит внутри выпуклого многоугольника, если она находится по одну сторону от всех его ребер. Таким образом, принадлежность точки (из дискретной области определения) полигону в пространстве определялась выполнением двух условий: проекция точки  $P(x, y, z)$  на плоскость  $XU$  лежит внутри треугольника, образованного проекциями трех прямых, проходящих попарно через вершины  $P_1, P_2, P_3$ , и

точка  $P(x, y, z)$  принадлежит плоскости, проходящей через все вершины полигона.

### Описание численных экспериментов

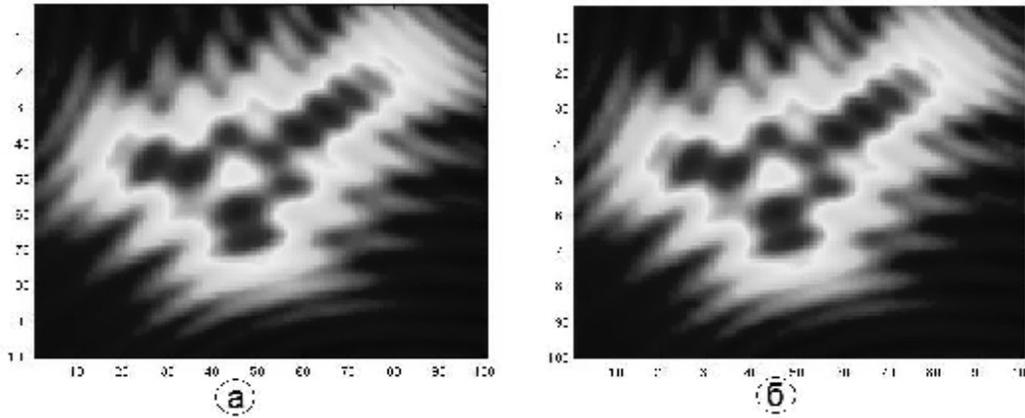
Описанный выше алгоритм, а также способ задания полигонов были реализованы на языке MATLAB. Результаты моделирования среды распространения на основе алгоритма, приведенного в данной работе, сравнивались с результатами, полученными численным решением интеграла Кирхгофа (1).

На рисунке ниже (Рисунок 4) приведена общая схема эксперимента.



**Рисунок 4.** Общая схема эксперимента. Все цены деления в  $\lambda$ , 1-излучатель, 2-приемник, область определения:  $[0:50\lambda]$  по обоим измерениям, шаг дискретизации  $\frac{1}{4}\lambda$ , расстояние между приемником и излучателем  $100\lambda$ , координаты вершин треугольника:  $((0,20,100);(25,45,100);(50,0,100)) * \lambda$ ,  $\lambda = 6 * 10^{-7}$  м.

В результате вычислений получены следующие распределения интенсивности на приемнике (Рисунок 5)



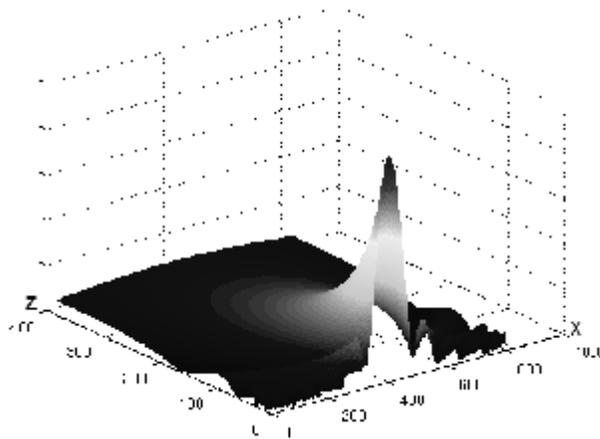
**Рисунок 5.** Интенсивность поля на приемнике посчитанная алгоритмом с табуляцией (а) и численным взятием интеграла Киргофа (б). Цена деления  $1\lambda$

Среднеквадратичное отклонение, вычисляемое как

$$\delta = \sqrt{\frac{\iint_{\Sigma} (I_a(x, y) - I_b(x, y))^2 dx dy}{\iint_{\Sigma} (I_a(x, y))^2 dx dy}}, \quad (14)$$

где  $I(x, y, z)$ - интенсивность в точке, для приведенного выше примера составила  $1.5 \cdot 10^{-4} \%$ , при этом выигрыш в производительности составил  $4.742 \cdot 10^3 \%$ .

Можно заметить, что предлагаемый алгоритм позволяет вычислять поле не только в параллельных плоскостях приемника и излучателя, но и в ортогональных плоскостях. Так, вычисление интенсивности дифракционной картины от экрана размером  $400\lambda$  с щелью  $50\lambda$  на дистанциях  $1000\lambda - 20000\lambda$  с шагом  $50\lambda$  (на экран падает плоская волна  $\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$  м.) предлагаемым способом заняла 9 сек. и 25 сек. вычислением интеграла Кирхгофа.

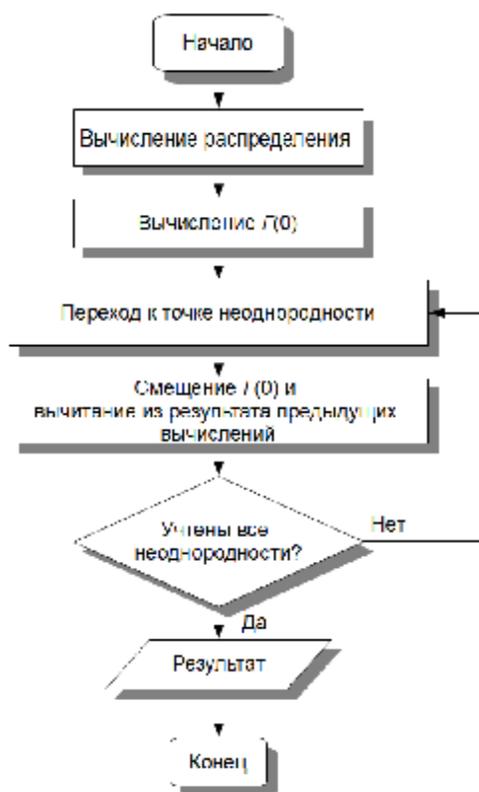


**Рисунок 6.** Динамика изменения интенсивности в зависимости от расстояния до плоскости приёма. Цена деления по оси  $x$ - $1\lambda$ ,  $z$  -  $50\lambda$ .

**Таблица 1:** Результаты численных экспериментов

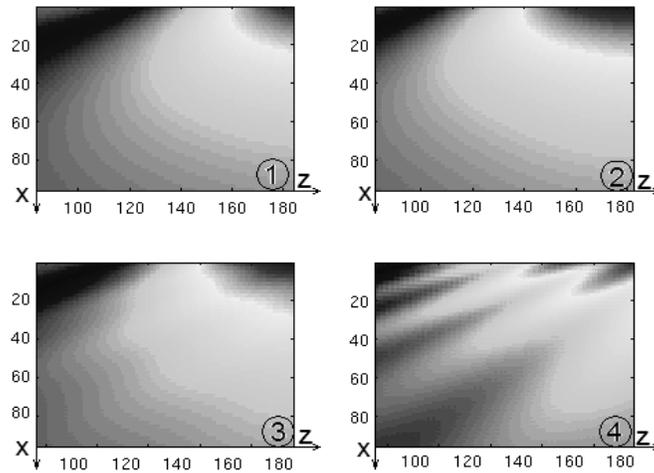
| Описание численного эксперимента   | Время вычислений |                |  |
|--|------------------|----------------|--|
|  | $N_1$ (12), с.   | $N_2$ (13), с. | $N_2$ (13), с.<br>(без первого слагаемого) |
| Вычисление дифракционной картины от экрана размером $400\lambda$ с щелью $50\lambda$ на дистанциях $1000\lambda - 20000\lambda$ с шагом $50\lambda$ . На экран падает плоская волна $\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$ м.     | 25               | 14             | 9  |
| Вычисление дифракционной картины от экрана размером $1000\lambda$ с щелью $5\lambda$ на дистанциях от $1000\lambda - 20000\lambda$ с шагом $25\lambda$ . На экран падает плоская волна $\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$ м.  | 236              | 128            | 102  |
| Вычисление дифракционной картины от экрана размером $4000\lambda$ с щелью $50\lambda$ на дистанциях от $1000\lambda - 20000\lambda$ с шагом $50\lambda$ . На экран падает плоская волна $\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$ м. | 1811             | 808            | 770  |
| Вычисление дифракционной картины от экрана размером $10000\lambda$ с щелью $50\lambda$ на дистанции $10000\lambda$ . На экран падает плоская волна $\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$ м.                                      | 29               | 22             | 21   |

Полученные результаты могут найти применение в моделировании возмущений от неоднородностей на пути распространения волны, что позволяет вести разработку моделей, описанных в работе [8]. Кроме того, возможно использовать алгоритм совместно с любым способом вычисления интеграла (1). В этом случае, порядок действий, представленный на рисунке 2, будет изменен:



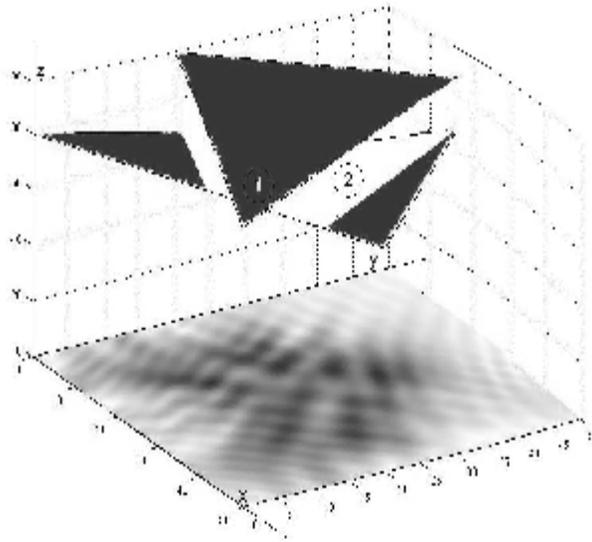
*Рисунок 7. Модификация алгоритма для моделирования неоднородностей.*

В качестве базовой модели распространения использовался алгоритм Кирхгофа (1), а для моделирования возмущений - выражение (10). Результат представлен на рис. 8.



**Рисунок 8.** Изменение распределения интенсивности в плоскости  $XZ$  при увеличении числа неоднородностей. №1 – эталонное изображение, №2 - одна неоднородность, №3 - 5 неоднородностей, №4 – 25 неоднородностей, цена деления по оси  $x$ - $1\lambda$ ,  $z$  -  $50\lambda$ .

Идентичным способом возможно учитывать геометрическую тень, образуемую в случае перекрытия совокупности полигонов. В таком случае точки, принадлежащие полигону 2 (Рисунок 9) и находящиеся в области геометрической тени полигона 1, исключаются из расчета способом, идентичным описанному выше при моделировании неоднородностей.



**Рисунок 9.** Исключение множества точек полигона (2), находящегося в геометрической тени другого(1), из вычислений. Светлая область треугольника 2 — множество точек, исключенных из вычисления. Все цены деления в  $\lambda$ , область определения:  $[0:50\lambda]$  по обоим

измерениям, шаг дискретизации  $\frac{1}{4}\lambda$ ,  $\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$  м

- [1] С.А. Балалаев, С.Н. Хонина. // Реализация быстрого алгоритма преобразования Кирхгофа на примере бесселевых пучков . Компьютерная оптика №30, 2006.
- [2] П.Н. Дагуров, А.В. Дмитриев. // О граничной дифракционной волне в теории Френеля–Кирхгофа . Письма в ЖТФ, 2009, том 35, вып. 10.
- [3] В.Н.Антифеев, А.Б.Борзов, Р.П.Быстров, А.В.Соколов. // Анализ радиолокационных характеристик объектов сложной пространственной конфигурации. Труды 5 Международной научно-технической конференции "Радиолокация, навигация, связь", Воронеж-1999-г.2.
- [4] Д. Гудмен. // Введение в фурье-оптику. М., Мир, 1970.
- [5] Сойфер В.А. (под ред.)//Методы компьютерной оптики. М., Физматлит, 2003.
- [6] Короленко П.В.// Оптика когерентного излучения. М.,2007.
- [7] А. Н. Канатников, А. П. Крищенко // Аналитическая геометрия. М., Издательство: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2005 г.
- [8] Проскурин Д.К., Земцов А.В., Печенкин Н.С. // Анализ спекл-структур с задачах дистанционного контроля строительных конструкций. Молодой ученый, 2008, №1, с. 26-32.