Математическое моделирование процессов функционирования сложных систем

Анализ научной и технической литературы показал, что наиболее удобно при оценивании показателей функционирования (ПФ) сложных систем (СС) представлять их процесс функционирования в виде полумарковского процесса (ПМП), если заданы: граф состояний $G(P,Q)$ и возможные переходы $\{i,j\}$; матрица $Q(t)=\{Q_{ij}(t)\}$ независимых функций распределения времени пребывания СС в i-том состоянии перед переходом в j-е состояние, если бы данный выход из состояния i был единственным; начальное состояние в момент $t=0$. В этих условиях алгоритм оценивания и исследования показателей эксплуатационных свойств (ЭС) и функционирования СС должен включать следующие составляющие [1].

1. Выявление возможных признаков выделения состояний, определение их содержания на основании описательной модели функционирования, т. е. анализа особенностей, динамики и режимов функционирования, условий и стратегий применения, видов и характера негативных воздействий, способов восстановления надежности и готовности и других факторов и эксплуатационных мероприятий, влияющих на готовность СС .

Адекватность описания функционирования СС существенно зависит от правильного определения содержания их состояния. Анализ существующих научных работ показал, что возможными признаками классификации состояний СС могут быть следующие: число отказавших подсистем; число неготовых подсистем; уровень пропускной способности (мощности, производительности); вид и число мероприятий (операций), выполненных или выполняемых СС и т.д. При таком подходе к определению состояний процесса функционирования СС в условиях марковского процесса (МП) параметры потоков переходов между ними представляют собой величины, равные интенсивностям отказов или восстановлений, различных видов подготовок и проведения технических обслуживаний, поступления заявок и их обслуживание, а также интенсивностям проведения других мероприятий при функционировании СС. В условиях ПМП требуется провести анализ переходов процесса на предмет выбора независимых функций распределения времени пребывания $Q_{ij}(t)$. Теоретические исследования [1,2] и анализ статистических данных показывают, что при выборе независимых функций распределения $Q_{ij}(t)$ наиболее часто эти функции встречаются в виде:

$$Q_{ij}(t) = 1 - e^{-a_{it}},\ \ Q_{ij}(t) = 1-(1+g_i t)e^{-g_{it}},$$
$$Q_{ij}(t) = t/T_i, t < T_i,\ \ Q_{ij}(t) = 0, t < t,$$
$$1, t \geq T_i,\ \ 1, t \geq t \text{ и другие.}$$

Таким образом, на основе выбранных признаков идентификации состояний выделяются все состояния, в которых может находиться СС, образующих полную группу несовместных событий. При проведении анализа и определения состояний следует выбрать и обосновать независимые функции распределения времени пребывания СС $Q_{ij}(t)$ в i-ом состоянии перед переходом в j-е.

2. Разработка моделей функционирования (МФ) СС в виде графа состояний и переходов $G(P,Q)$, под которым понимается графическое представление состояний СС (пространство состояний процесса) и возможных переходов между ними, где P- множество вершин графа, представляющие вектор вероятностей P_i, и Q - множество ветвей графа, операторами которых являются безусловные вероятности перехода процесса p_{ij} из i-го в j-е состояние и среднее значение времени пребывания процесса в i-ом состоянии до перехода в j-е состояние. Построение графа состояний и переходов СС начинается с составления полного набора ее состояний. Состояния СС можно разделить на полностью готовые к применению или частично готовые к применению состояния; состояния полностью или частично неготовые к применению; состояния полного или частичного отказов; состояния проведения эксплуатационных мероприятий, которые определяются режимами и динамикой

функционирования, типами решаемых задач, условиями и способами применения, наличием негативных воздействий и т.д. Для удобства исследования готовности следует пронумеровать вершины графа состояний и переходов в определенном порядке.

3. Составление матрицы переходных вероятностей $P=|p_{ij}|$ предусматривает определение условных вероятностей p_{ij} переходов процесса (СС) из i-го состояния в j-е по соответствующим зависимостям, а именно, вероятность $p_{ij}(t)$ перехода из состояния i в состояние j за время не более t определяется выражением:

$$p_{ij}(t)=\int_0^t \prod_{k\neq j}[1-Q_{ik}(t)]\partial Q_{ij}(t), \quad (1)$$

а для неограниченного времени ($F_{ij}(t)=1$)

$$p_{ij}(\infty)=\int_0^\infty \prod_{k\neq j}[1-Q_{ik}(t)]\partial Q_{ij}(t), \quad (2)$$

где $Q_{ij}(t)$ - независимая функция распределения времени пребывания СС в i-ом состоянии перед переходом в j-е состояние, если бы данный выход из состояния i был единственным.

4.Составление матрицы безусловных функций распределения времени пребывания СС в каждом i-м состоянии

$$F=|F_i(t)|, \qquad (3)$$

где $F_i(t)$- безусловная функция распределения времени пребывания в состоянии i определяется выражением

$$F_i(t)=\sum_{j\in k} p_{ij}F_{ij}(t) \text{ или } F_i(t)=1-\prod_{j\in k}[1-Q_{ij}(t)], \quad (4)$$

где $F_{ij}(t)$ - условная функция распределения, т. е. вероятность того, что время пребывания в состоянии i не превосходит t, при условии, что из состояния i процесс переходит в состояние j.

5. Составление матрицы СС в каждом состоянии $T=|t_i|$, $i=1,n$, где t_i- математическое ожидание времени пребывания СС в i-ом состоянии определяется выражением

$$t_i=\int_0^\infty [1-F_i(t)]\partial t=\int_0^\infty \prod_{j\in k}[1-Q_{ij}(t)]\partial t. \quad (5)$$

Иногда приходится для определения t_i находить условные математические ожидания

$$t_{ij}=\int_0^t [1-F_{ij}(t)]\partial t, \text{ где } F_{ij}(t)=p_{ij}(t)/p_{ij}. \quad (6)$$

6. Сведение полученных функций $Q_{ij}(t)$, p_{ij}, $F_{ij}(t)$, T_i в соответствующую таблицу, удобную для использования при решении задач.

7. Составление системы алгебраических уравнений

$$z=zP \text{ при } \sum_{i=1}^{k} z_i=1, \quad (7)$$

где z - вектор- строка, $z=z(z_1,z_2,...,z_k)$, определяющая стационарные вероятности z_i застать вложенный марковский процесс в момент произвольного перехода в состояние i; k-общее число состояний процесса (СС).

8. Решение системы уравнений $z=zP$ с целью получения формул для коэффициентов A_i путем выражения всех вероятностей z_i через одну, принимаемую за базовую z_δ т.е.

$$z_i=A_i z_d. \quad (8)$$

9. Выбор подмножества состояний СС, суммарная вероятность пребывания которых нас интересует. К таким состояниям в зависимости от решаемой задачи могут относиться, например, пребывание в режиме готовности, в режиме подготовки к выполнению тех или

других функций, в режиме выполнения возложенных функций и др.

10. Определение среднего интервала (математического ожидания) времени t_{ij} между последовательными попаданиями СС в состояние

$$t_{ij} = t / z_i, \text{ где } t = \sum z_i t_i, i = 1, k. \quad (9)$$

Характеристики t_{ij} в ряде конкретных задач являются искомыми величинами, так как определяют, например. средние сроки эксплуатации СС между ремонтами, обслуживаниями, отказами и т. д. Иногда возникает необходимость в определении (прогнозировании) средних интервалов между попаданиями СС в каждое состояние, которое находится по формуле

$$t_{ij} = t_i + \sum p_{ik} t_{kj}. \quad (10)$$

11. Определение математического ожидания времени одного перехода по формуле

$$t = \sum_{i=1}^{k} z_i t_i = z_d [t_d + \sum_{i=1}^{k} A_j t_i] = z_d A, \text{ где } A = \mathrm{t}_d + \sum_{i=1}^{k} A_i t_i. \quad (11)$$

12. Определение выражений для показателей функционирования с помощью найденных аналитических зависимостей для вероятностей пребывания СС в интересующих нас состояниях по формулам;

а) стационарные вероятности

$$p_i = z_i t_i / \sum_{i=1}^{k} z_i t_i \text{ или } p_i = A_i t_i / A, \text{где } A_{i=d} = 1, \text{ т.е. } p_i^{\,d} = t_i^{\,d} / A; \ (12)$$

б) нестационарные вероятности

$$p_{ij}(s) = [\det A_D(s)]^{-1} A_{ij}(s) y(s), \quad (13)$$

где $A_D(s) = I - j(s)$; $A_{ij}(s)$ - преобразования Лапласа адъюнкты $a_{ij}(t)$ матрицы $A_D(s)$;

$$y(s)=|y_i(s)|; \quad y_i(t) = \prod_j [1 - Q_{ij}(t)]; \quad j(s)=|p(s)|; \quad p(s)=|p_{ij}(s)|; \quad p_{ij}(t) = \int_0^t \prod_{k \neq j} [1 - Q_{ik}(t)] \partial Q_{ij}(t).$$

Далее, используя численные методы, находим оригинал $P_{ij}(t)$. В зависимости от содержания задачи исследования ЭС СС могут быть получены соответствующие выражения для них.

Таким образом, представленный алгоритм использования ПМП при оценивании (исследовании) показателей функционирования СС сводится к нахождению вероятностно-временных показателей интересующих нас состояний в произвольно выбранные моменты времени как для стационарного, так и переходного режимов.

При исследовании ЭС СС важной характеристикой являются затраты на выполнение того или иного эксплуатационного мероприятия, т.е. экономических показателей и т.д. Так затраты, например, средние затраты C за единицу времени могут определяться по формуле:

$$C = (1/t) \sum_{i=1}^{k} z_i [C_{ii} t_i + \sum_{j=1}^{n} p_{ij} C_{ij}], \quad (14)$$

где C_{ii} - средние затраты за единицу времени пребывания СС в i-м состоянии; C_{ij}- средние затраты за переход из i-го состояния в j-е. При вычислении показателя C значение показателей C_{ii},C_{ij}, образующих квадратную матрицу $C\{C_{ij}\}$, предполагаются известными, т. е. их предварительно находят для конкретных СС.

Таким образом, если заданы граф состояний $G(P,Q)$ и переходов $\{i,j\}$, матрица $Q(t)=\{Q_{ij}(t)\}$ независимых функций распределения времени пребывания СС в i-ом состоянии перед переходом в j-е, начальное состояние, а также матрица $C=\{C_{ij}\}$ затрат на пребывание в i-ом состоянии и переход из него в j-е, то можно определять (исследовать) следующие используемые в практике создания и эксплуатации в соответствии с разработанным алгоритмом оценивания вероятностно-временные ЭС СС: p_{ij}; $p_{ij}(t)$; p_i; $p_i(t)$; t_i; t_{ij}; z_i; t; t_{ii}; C; и другие.

Отметим, что получаемые вероятностно- временные экономические показатели СС позволяют не только проводить их исследование, но и находить функции ограничений в задачах оптимизации параметров СС. При этом выражения (12- 14) могут быть использованы как целевые функции (для различных ситуаций), а оптимизируемые параметры вектора $\{X\}$ СС обычно являются параметрами распределений $Q_{ij}(t)=\{Q_{ij}(t,x)\}$; $C(x)=\{C_{ii}(x), C_{ij}(x)\}$.

***

Представлены основные этапы разработки математических моделей на основе полумарковского алгоритма оценивания и исследования вероятностно-временных показателей функционирования систем управления, которые могут найти применение в научной и практической деятельности при их создании и эксплуатации.

Литература

1. Адерихин И.В., Чертов В.В. Методика построения полумарковских математических моделей показателей функционирования сложных систем. М.: МГАВТ, 1999, с.30-44.
2.Сильвестров Д.С. Полумарковские процессы и их приложения. К.: Наукова думка, 1982.