О применении сплайн-функций для моделирования процентных ставок

Глушков И.Н., ГУ-ВШЭ

Using splines for modeling interest rates

Glushkov Ivan, SU HSE

В настоящей работе рассматриваются методы определения дисконтной функции, ставки спот и мгновенной форвардной ставки по ценам купонных облигаций, основанные на использовании сплайн-функций. Использовать сплайны для моделирования процентных ставок было предложено в работе [4] и затем этот подход применялся во многих работах. Здесь обсуждаются различные методы определения структуры процентных ставок по ценам купонных облигаций с помощью сплайн-функций.

Структура процентных ставок обычно представляется тремя кривыми: дисконтной функцией, ставкой спот (кривой доходности) и мгновенной форвардной ставкой [1].

Дисконтная функция $\delta:[0,+\infty)\to(0,1],\ \delta(0)=1$ описывает текущую стоимость одного рубля, выплаченного через t лет. Для облигации с погашением в момент времени $\bar{t}$ ее текущая стоимость, характеризуемая текущей ценой облигации $B(t)$, выражается через дисконтную функция $d(t)$ при помощи формулы

$$B(t)=F\delta(\bar{t}-t)+c\int_0^{\bar{t}-t}\delta(s)\mathrm{d}s,$$

где c – купонная ставка и F – номинал облигации.

Ставка спот (кривая доходности) $\eta:(0,+\infty)\to[0,+\infty)$ получается из дисконтной функции следующим образом

$$\eta(t)=-\frac{1}{t}\ln\delta(t).$$

Мгновенная форвардная ставка $\rho:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ представляет ставку доходности на инвестиции, сделанные в бесконечно малый промежуток времени $[t,t+\Delta t]$. Мгновенная форвардная ставка связана с дисконтной функцией следующим соотношением

$$\rho(t)=-\frac{\delta'(t)}{\delta(t)}.$$

Из этих определений ясно, что если одна из трех функций известна, другие две могут быть найдены. Определение мгновенной форвардной ставки подразумевает также, что дисконтная функция $\delta(t)$ должна быть непрерывно дифференцируема, т.е. должна быть функцией класса C^1.

Наиболее распространенным вариантом определения структуры процентных ставок с помощью сплайнов является построение с их помощью дисконтной функции.

Дисконтную функцию представляют как линейную комбинацию n непрерывно дифференцируемых функций $\{f_j(x)\}_{j=1}^n$ (например, B-сплайнов, экспоненциальных сплайнов): $\delta(t)=a_0+\sum_{j=1}^n a_j f_j(t)$.

Поскольку стоимость 1 рубля в настоящий момент равна 1, необходимо, чтобы $d(0)=1$. Поэтому $a_0=1$ и $f_j(0)=0$. Таким образом, дисконтная функция приобретает вид

$$\delta(t)=1+\sum_{j=1}^n a_j f_j(t).$$

Предположим, что модель для цены каждой облигации (плюс некоторый начисленный процент a) имеет вид

$$B+\alpha = c\sum_{k=1}^{\bar{t}}\delta(t_k)+F\delta(t_x)+\varepsilon\,,$$

где e – нормально распределенная случайная величина с нулевым средним и дисперсией s^{2}. В случае, если сплайны применяются к дисконтной функции,

$$\delta(t)=1+\sum_{j=1}^{n}a_j f_j(t)=1+\mathbf{a}'\mathbf{f}(t),$$

где $\mathbf{f}(t)=\left(f_1(t), \mathbf{K},\ f_n(t)\right)'$ – n-мерный вектор, составленный из набора базисных функций $\left\{f_j(t):\ j=1, \mathbf{K}, n\right\}$, и $\mathbf{a}=(a_1, \mathbf{K}, a_n)'$ – это неизвестный вектор параметров, который необходимо оценить. Тогда функция плотности распределения цены облигации может быть выражена следующим образом:

$$f\left(y\,|\,\mathbf{t};\mathbf{a},\sigma^2\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{(B-\mathbf{c}'\Phi\mathbf{a})^2}{2\sigma^2}\right\},$$

где $\mathbf{t}=(t_1,\mathbf{K},t_n)'$ – вектор моментов времени, в которые производятся выплаты, $y=B+a$, $\Phi=(\mathbf{f}(t_1),\mathbf{K},\mathbf{f}(t_n))'$ и $\mathrm{c}=(c,\mathbf{K},c,c+R)'$. Эта спецификация удобна для оценивания параметров, поскольку дисконтная функция линейна по отношению к неизвестным параметрам.

Однако сплайны можно применять не только напрямую к дисконтной функции, но и к доходности бескупонной облигации или к мгновенной форвардной ставке.

Предполагая, что сплайны применяются к доходности бескупонной облигации $\eta(t)$, она выражается как $\eta(t)=\sum a_j f_j(t)$. Тогда дисконтная функция выражается по формуле $\delta(t)=\exp\left(-t\sum a_j f_j(t)\right)$. Видно, что $\delta(t)$ нелинейно выражается через $\{a_j\}$. Следовательно, применение сплайнов к доходности бескупонной облигации приводит к следующей экспоненциальной форме:

$$\delta(t,\mathbf{a})=\exp\left(-t\sum_{j=1}^{n}a_j f_j(t)\right).$$

В случае применения сплайнов для построения мгновенной форвардной ставки имеем $f(t)=\sum_{j=1}^{n}a_j f_j(t)$. Тогда дисконтную функцию можно выразить через форвардную ставку следующим образом:

$$\delta(t,\mathbf{a})=\exp\left(-\sum_{j=1}^{n}a_j\psi_j(t)\right),$$

где $y_j(t)=\int_0^t f_j(s)ds$. Эта функциональная форма напоминает случай, когда при помощи сплайнов строится кривая доходности бескупонной облигации, однако выбор базисных функций отличается. Интегральная форма ведет к тому, что базисные функции в модели являются монотонными, что предпочтительно при аппроксимации функции $\delta(t)$, которая должна монотонно убывать с ростом t.

Для обоих этих случаев (применение сплайнов к доходности бескупонной облигации либо к мгновенной форвардной ставке) функция плотности распределения цены облигации принимает форму:

$$f\left(y\,|\,\mathbf{t};\mathbf{a},s^{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2ps^{2}}}\exp\left\{-\frac{(B-\mathbf{c}'\delta(\mathbf{t},\mathbf{a}))^2}{2s^{2}}\right\},$$

где $y = B + a$, $\delta(\mathbf{t}, \mathbf{a}) = (d(t_1, \mathbf{a}), \mathbf{K}, d(t_n, \mathbf{a}))'$ – дисконтный вектор и $\mathbf{a} = (a_1, \mathbf{K}, a_n)'$ – вектор неизвестных параметров для оценивания на основе исходных данных.

Для определения вектора неизвестных параметров $\mathbf{a} = (a_1, \mathbf{K}, a_n)'$ и параметра σ^2 максимизируют логарифмическую функцию правдоподобия

$$l_\lambda(\mathbf{a}, \sigma^2) = \sum_{i=1}^{M} \log f(y_i \mid \mathbf{t}_i; \mathbf{a}, \sigma^2).$$

Однако, в ряде случаев оцененная структура процентных ставок, полученная с использованием традиционных методов сплайн-регрессии, может выглядеть нереалистичной с финансовой точки зрения, когда построенные дисконтные функции имеют сильные колебания и не сохраняют монотонность [5].

Поэтому важным вопросом при использовании сплайнов является выбор количества базисных функций. Если количество базисных функций n слишком мало, тогда не удастся хорошо передать дисконтную функцию, когда она имеет сложную форму. Если же n слишком велико, дисконтная функция может чутко реагировать на «посторонние» колебания или выбросы в ущерб гладкости. В работе [4] предлагается использовать в качестве n ближайшее целое к квадратному корню из числа наблюдений.

Другой подход к решению этой проблемы – использование информационных критериев и введение штрафных членов в функцию правдоподобия [2].

Нестабильность оцененных кривых доходности всегда порождается плохой природой регрессионных сплайнов в большей степени, чем неверным выбором базисных функций [2]. Для того, чтобы избежать переопределения, в логарифмическую функцию правдоподобия вводится штрафное слагаемое. Функция правдоподобия со штрафом выглядит следующим образом:

$$l_\lambda(\mathbf{a}, \sigma^2) = \sum_{i=1}^{M} \log f(y_i \mid \mathbf{t}_i; \mathbf{a}, \sigma^2) - \frac{M\lambda}{2} \sum_{j=2}^{n} (\Delta^2 a_j)^2,$$

где λ – параметр гладкости, контролирующий гладкость дисконтной функции, $\Delta a_k = a_k - a_{k-1}$ – оператор разности.

Задавая λ и n, неизвестные параметры $\mathbf{a}$ и σ^2 могут быть получены путем максимизации функции правдоподобия $l_\lambda(\mathbf{a}, \sigma^2)$.

Однако остается проблема – критерий, на основании которого необходимо выбирать сглаживающий параметр l и число базисных функций n. Поскольку в функцию правдоподобия добавлено штрафное слагаемое, применение информационного критерия Акаике (Akaike Information Criteria – AIC) является теоретически необоснованным [2]. Вместо него применяется обобщенный информационный критерий (Generalized Information Criteria – GIC) [3].

Библиографический список

[1] Chiu N.-C., Fang S.-C., Lavery J.E., Lin J.-Y., Wang Y. Approximating Term Structure of Interest Rates Using Cubic L_1 Splines // *European Journal of Operational Research.* 2008. Vol. 184. P. 990-1004.

[2] Kawasaki Y., Ando T. Estimating Term Structure Using Nonlinear Splines: a Penalized Likelihood Approach // *International Congress on Modeling and Simulation, section: Econometric modelling and financial econometrics.* December 2005. Melbourne University, Vic P. 864-870.

[3] Konishi S., Kitagawa G. Information Criteria and Statistical Modeling. Springer, 2008.

[4] McCulloch J.H. Measuring the Term Structure of Interest Rates // *The Journal of Business.* 1971. Vol. 44. No. 1. P. 19-31.

[5] Ramponi A. Adaptive and Monotone Spline Estimation of Cross-Sectional Term Structure // *International Journal of Theoretical and Applied Finance*. 2003. Vol. 6. No 2. P.195-212.