МЕТОД РИТЦА В ПРИБЛИЖЕННОМ ВЫЧИСЛЕНИИ НАИМЕНЬШЕГО СОБСТВЕННОГО ЧИСЛА ОДНОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Солоник Марианна Владимировна

ГОУ ВПО «Соликамский государственный педагогический институт»

Как известно, основой прямых методов вариационного исчисления является построение минимизирующих последовательностей функций. Одним из наиболее распространенных прямых методов является метод Ритца. Суть его в следующем. Пусть на каком-либо многообразии, лежащем в некотором линейном нормированном пространстве *E*, ищется минимум функционала *Y(y)* (1). Рассмотрим некоторую последовательность функций $\{j_n(x)\}$ (2) из *E* такую, что как сами функции, так и их линейные комбинации $y_n = \sum_{i=1}^{n} C_i j_i(x)$ (3) являются допустимыми для функционала (1). Ставится задача: при заданном *n* определить коэффициенты $Ci\ (i=\overline{1,n})$, чтобы $Y(C_1 j_1 + C_2 j_2 + \mathbf{K} + C_n j_n)$ (4) было наименьшим. Сформулированная задача является задачей о нахождении минимума функции от *n* переменных (ими являются C_i), т.е. она значительно легче, чем нахождение минимума функционала (1). При каждом *n* мы получим соответствующий минимум m_n, причем при увеличении *n* этот минимум не возрастает $(m_1 \geq m_2 \geq m_3 \geq \mathbf{K} m_n)$, так как среди линейных комбинаций первых (*n*+1) функций содержатся линейные комбинации первых *n* функций.

Если функционал в смысле метрики того пространства *E*, на котором оно рассматривается, непрерывен, а система (2) – полная (линейные комбинации (3) этих функций образуют множество, всюду плотное в пространстве, на котором задан (1)), то $\lim_{n\to\infty} m_n = m$ есть минимум функционала (1).

Быстрота сходимости метода Ритца для данной вариационной задачи зависит как от самой задачи, так и от выбора функций $\{j_n(x)\}$. Во многих случаях для получения результата, достаточно близкого к истинному решению, нужно взять всего лишь три или четыре координатные функции. Метод Ритца построения минимизирующих последовательностей может быть применен и в проблеме собственных чисел.

Пусть *A* – ограниченный снизу оператор, $(Ay, y) \geq k\|y\|^2$ (4). Нахождение собственных чисел оператора *A* сводится к отысканию собственных чисел положительно определенного оператора. Действительно, пусть g - любое число, большее $|k|$. Уравнение $Ay - ly = 0$, определяющее собственные числа оператора A, перепишем в виде $\tilde{A}y - \tilde{l}y = 0$, где $\tilde{A}y = Ay + gy$, $\tilde{l} = l + g$. Оператор $\tilde{A}y$ - положительно определенный, т.к. $(\tilde{A}y, y) = (Ay, y) + g(y, y) \geq (g + k)\|y\|^2$, а $g + k > 0$. Если $\tilde{l}$ - собственное число $\tilde{A}$, то $l = \tilde{l} - g$ - собственное число А, и наоборот.

Положим $d = \inf \frac{(Ay, y)}{(y, y)}$ (5). Известно, что d – наименьшее собственное число оператора А, если существует такая функция y_0, что $d = \frac{(Ay_0, y_0)}{(y_0, y_0)}$. Если допустить, что такая функция существует, то определение наименьшего собственного числа оператора А сводится к определению точной нижней границы функционала (Ay,y) (6) при дополнительном условии (y,y) = 1 (7). Как известно, эта задача может быть решена методом Ритца. Если ограничиться только тремя координатными функциями, то уравнение для l будет иметь вид:

$$(8)\quad \begin{vmatrix} (Aj_1, j_1) - l(j_1, j_1) & (Aj_2, j_2) - l(j_2, j_1) & (Aj_3, j_1) - l(j_3, j_1) \\ (Aj_1, j_2) - l(j_1, j_2) & (Aj_2, j_2) - l(j_2, j_2) & (Aj_3, j_2) - l(j_3, j_2) \\ (Aj_1, j_3) - l(j_1, j_3) & (Aj_2, j_3) - l(j_2, j_3) & (Aj_3, j_3) - l(j_3, j_3) \end{vmatrix} = 0$$

Рассмотрим метод Ритца, примененный к дифференциальному уравнению Штурма-Лиувилля (напомним, что оно имеет вид $-(Py')' + Qy = ly$) при условии $Q(x) \equiv 0$ и $P(x) = \sqrt{1+x}$ >0, т.е. $(\sqrt{1+x}y')' + ly = 0$ (9) и граничными условиями y(0)=y(1)=0 (10). Заметим, что уравнение (9) есть уравнение Эйлера, отвечающее следующей задаче на условный экстремум: найти минимум функционала $Y(y) = \int_0^1 \sqrt{1+x}(y')^2 dx$ (10) при условиях $\int_0^1 y^2 dx = 1$ (11) и $y(0) = y(1) = 0$ (12). Очевидно, что интеграл (10) ограничен снизу: $\int_0^1 \sqrt{1+x}y'^2 dx \geq 0$.

В качестве координатных выберем три функции $j_1(x) = (1-x)$, $j_2(x) = (1-x)x^2$, $j_3(x) = (1-x)x^3$. Для них уравнение (8) будет выглядеть так:

$$(8^*)\quad \begin{vmatrix} 0{,}40475774 - \frac{1}{30}l & 0{,}216156130 - \frac{1}{60}l & 0{,}135002282 - \frac{1}{105}l \\ 0{,}216156130 - \frac{1}{60}l & 0{,}510789821 - \frac{1}{150}l & 0{,}67536333 - \frac{1}{168}l \\ 0{,}135002282 - \frac{1}{105} & 0{,}675363337 - \frac{1}{168}l & 1{,}023822057 - \frac{1}{252}l \end{vmatrix} = 0.$$

Наиболее грубое приближение к первому собственному числу получим, приравнивая к нулю диагональный минор первого порядка:

$0{,}404757774-\frac{1}{30}l=0 \Rightarrow l_1^{(1)}=12{,}14273$. Это соответствует использованию в методе Ритца только одной координатной функции $j_1(x)$. Второе приближение получим, приравняв к нулю минор второго порядка:

$$\begin{vmatrix} 0{,}40475774-\frac{1}{30}l & 0{,}216156130-\frac{1}{60}l \\ 0{,}216156130-\frac{1}{60}l & 0{,}510789821-\frac{1}{105}l \end{vmatrix}=0.$$

Меньший из корней этого уравнения равен $l_1^{(2)}=12{,}12781$, что дает более точное приближение к наименьшему собственному числу задачи (9)-(10).

Выбрав наименьшее из решений уравнения (8*), получим $l^{(3)}=12{,}12255$ (А). Найденные числа $l_1^{(1)}, l_1^{(2)}, l_1^{(3)}$ больше собственного числа l_1. Приближение к l_1 снизу получим, используя метод, основанный на сведение поставленной задачи к интегральному уравнению $y(x)-l\int_0^1 G(x,s)y(s)ds=0$, (13). Где G(x,s) – функция Грина данной задачи. Для её построения проинтегрируем уравнение $\frac{d}{dx}(\sqrt{1+x}\frac{dv}{dx})=0$, общий интеграл которого имеет вид $v=C_1\sqrt{1+x}+C_2$. При $C_1=1$ и $C_2=-1$ получим $v_2=\sqrt{1+x}-1$, заметим, что $v_1(0)=0$, а при $C_1=1$ и $C_2=-\sqrt{2}$ получим $v_2=\sqrt{1+x}-\sqrt{2}$ и $v_2(1)=0$. Т.е. v_1 и v_2 удовлетворяют (10). Функцию Грина найдем, полагая $v_1(x)=A(s)(\sqrt{1+x}-1)$ и $v_2(x)=B(s)(\sqrt{1+x}-\sqrt{2})$. При этом потребуем, чтобы $v_1=v_2$ при $x=s$, а $(\frac{\partial v_1}{\partial x}-\frac{\partial v_2}{\partial x})\big|_{x=s}=-\frac{1}{\sqrt{1+s}}$, что приведет к системе

$$\begin{cases} A(s)(\sqrt{1+s}-1)=B(s)(\sqrt{1+s}-\sqrt{2}) \\ \frac{A}{2\sqrt{1+s}}-\frac{B}{2\sqrt{1+s}}=-\frac{1}{\sqrt{1+s}} \end{cases}.$$ Откуда $B(s)=\frac{2(\sqrt{1+s}-1)}{\sqrt{2-1}}$.

Таким образом, $G(x,s)=\frac{2(\sqrt{1+s}-1)(\sqrt{1+x}-\sqrt{2})}{\sqrt{2}-1}$ при $x\ge s$. Так как $G(x,s)=G(s,x)$, то $G(x,s)=\frac{2(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+s}-\sqrt{2})}{\sqrt{2}-1}$ при $x\le s$. Функция $G(x,s)$ является ядром уравнения (13), припишем ей индекс 1: $G_1(x,s)$.

Второе интегрированное ядро теперь найдется так:

$$G_2(x,s)=\frac{4}{3(3-2\sqrt{2})}\left\{(\sqrt{2}-\sqrt{1+s})\left[(\sqrt{2}-1)(-2-x-\frac{x^2}{2}-2\sqrt{1+x}+x\sqrt{1+x})+4(\sqrt{2}-\sqrt{1+x})\right]+\right.$$

$$\left.+(\sqrt{1+x}-1)\left[(\sqrt{2}-1)(2+s+\frac{s^2}{2}+2\sqrt{2}\sqrt{1+s}-\sqrt{2}s\sqrt{1+s}-\frac{11}{2}(\sqrt{1+s}-1)\right]\right\},$$ при условии $x \le s$.

Значение $G_2(x,s)$ при $x \ge s$ получается путем перестановки аргументов x и s.

Найдем следы интегрированного ядра $G_1(x,s)$ с четными индексами:

$a_2=\int_0^1\int_0^1 G_1^{\,2}(x,s)dxds$. Учитывая, что ядро симметрично, можно записать

$a_2=2\int_0^1 ds\int_0^s G_1^{\,2}(x,s)dx\approx 0{,}0076414951$. Для $G_2(x,s)$: $a_4=2\int_0^1 ds\int_0^s G_2^{\,2}(x,s)dx\approx 0{,}000050092905$.

Так как $l_1 \ge \frac{1}{\sqrt[2k]{a_{2k}}}$, то $l_1 \approx \frac{1}{\sqrt[2k]{a_{2k}}}$ дает приближение l_1 с недостатком. В нашем случае

$l_1' = \frac{1}{\sqrt{a_2}} \approx 11{,}4395997$; $\quad l_1'' = \frac{1}{\sqrt{a_4}} \approx 11{,}886553$. Учитывая теперь ($A$), можно записать, что

$11{,}886553 < l_1 < 12{,}12255$ (B). Если теперь в качестве l_1 взять среднее арифметическое найденных приближений, то получим $l_1 \approx \overline{l}_1 = 12{,}00455$.