В.Л. Крупенин

Виброударные процессы в распределенных системах, оснащенных ограничителями хода, составленными из точки и прямой.

Учреждение Российской академии наук институт машиноведения им. А.А Благонравова РАН

1.В работах [1-12] теоретически и экспериментально изучались виброударные системы с параллельными ударными парами и (или) распределенными ударными элементами и, в частности, установлена возможность существования синхронных периодических режимов движения типа "хлопков". При их реализации пространственно удаленные части ударных элементов - сосредоточенных или распределенных – могут синхронно соударяться с соответствующими частями различного рода ограничителей, а профили стоячих волн оказываются изломанными. В то же время в работах [6, 9-14] изучались струны, взаимодействующие с точечными ограничителями хода, а в работе [14] результаты экспериментов с подобными системами.

Кроме того, предварительные эксперименты показали возможность существования волн иного вида в одно- и многомерных системах с ограничителями, форма которых отличается от идеальных точечной или прямолинейной. При этом возникает проблема оценки грубости моделей ограничителей. В рамках предлагаемого подхода могут будь исследованы вопросы перехода от одного вида волн к другому при изменении некоторых геометрических параметров препятствий: расположения плоских ограничителей относительно плоскости расположения струны и направления возбуждения; кривизна поверхности ограничителя, размеры и расположение дискретных ограничителей.

Ранее были обнаружены нелинейные стоячие волны, составленные из прямолинейных отрезков, в частности трапециевидные волны, при колебаниях распределенных систем с различного вида точечными, протяженными линейными и решетчатыми препятствиями. В реальных конструкциях точечные препятствия имеют определенные размеры, а протяженные ограничители отклонения от линейности и параллельности объекту. При этом, с одной стороны, возникает проблема оценки грубости моделей ограничителей, а с другой - проблема отыскания волн иных типов, например, набегающих на ограничитель. Описание возможных видов сильно нелинейных волн, их структуры и переходов из одного вида в другой представляет фундаментальную задачу, частично рассматриваемую ниже. Рассматриваемый в данной работе ограничитель моделируется при помощи составного объекта, состоящего из упомянутых прямого и точечного ограничителей хода и поэтому именуется иногда «тавровым».

2. Рассмотрим струну, вибрирующую вблизи одно-таврового ограничителя хода (рис.1,а). Протяженная часть ограничителя параллельна оси статического равновесия струны.

Пусть искомый прогиб есть $u(x,t)$; $t\geq 0$, $x\in[-1/2, 1/2]$. Имеем:

$u(x,t) \geq \Delta>-1$; $u(0,t) \geq \Delta_1>\Delta$; (1)

При реализации здесь строгих неравенств система описывается линейным волновым уравнением $\bullet u\equiv u_{tt}-u_{xx}=0$, где без ограничения общности приняты единичными погонная масса и натяжение. Граничные и начальные условия

$u(-1/2,t)= u(1/2,t)=0$; $u(x,0)=u_0(x)$; $u_t(x,0)=0$, (2)

предполагаются обеспечивающими существование и единственность решения задачи Коши для уравнения $\bullet u=0$, по крайней мере, в обобщенном смысле [15]. Кроме того, имея в виду изучать стоячие волны в определенном смысле подобные первой форме колебаний, будем предполагать, что функция $u_0(x)$ – унимодальная и четна на отрезке $x\in[-1/2, 1/2]$ (рис.1,а). Приведем соотношения, описывающие взаимодействие струны с препятствием.

При достижении точками струны плоских частей ограничителя сохраняются условия, типа данных, например, [4, 11]: при $x\neq 0$, если $u\leq 0$, то $\bullet u\geq 0$. Оперируя с обобщенными решениями, потребуем, чтобы $\mathrm{supp}\ \bullet u\subset\{(x,t);x=0,\ |u(x,t)|=\Delta\}$. Предполагается, что потери энергии при ударе не происходит, т.е. как и для линейной струны в смысле обобщенных функций $(|u_x|^2+|u_t|^2)_t=(2u_tu_x)_x$. Это соотношение в данном, уже нелинейном случае постулируется и, в частности, выражает гипотезу взаимодействия, т.к. отсюда непосредственно следует аналог классической гипотезы об абсолютно упругом ударе:

$u_t(x,t-0)=-u_t(x,t+0)$, $(x,t)\in \mathrm{supp}\bullet u$; $u(x,t)= \Delta$; $x\neq 0$. (3)

Вопрос о введении, каких-либо аналогов коэффициента восстановления оказывается связанным не только с типом распределенного ударного элемента [6], но и с типом устанавливаемой стоячей волны [3] и в настоящей статье не рассматривается.

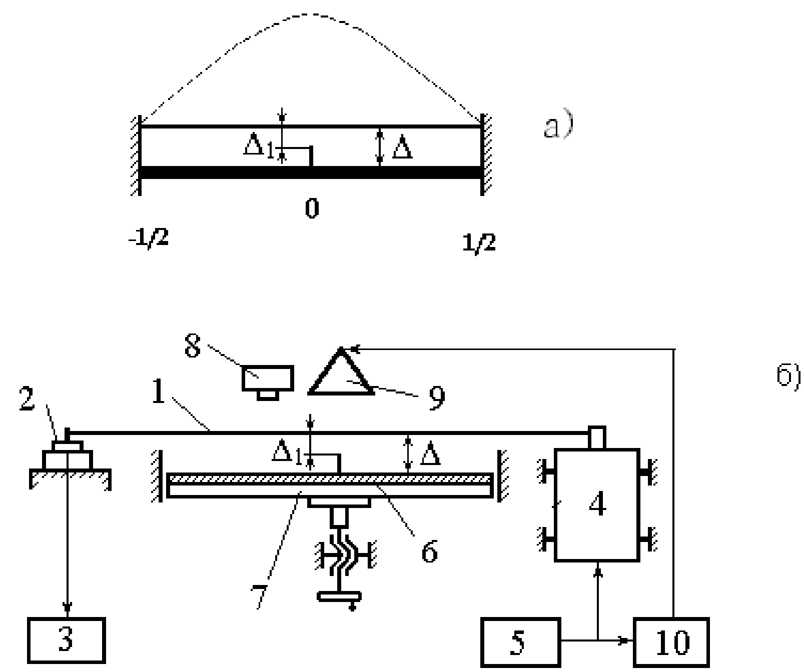

Рис.1

При взаимодействии с серединными частями ограничителей при x=0 образуются временные выстои струны [10-14]. При этом во время выстоя на струну при $u(0,t)=\Delta_1$ ($t\in[t_k, \theta_k]$) действует сила реакции «точечной части» ограничителя $R_k(t)$, где t_k и θ_k - моменты начала и конца выстоя; *k* -целочисленный индекс - здесь и везде отвечает некоему *k*-му взаимодействию.

Тогда, если записать обобщенную функцию $\Phi_0[u]$, символически выражающую силу ударного взаимодействия, она, будет представляться в виде двух обобщенных функций: $\Phi_0[u]=\Phi_1[u]+\Phi_2[u]$. Причем при *n-м* взаимодействии, $\Phi_1[u]=J(x)\delta[t-t_n(x)]\gamma(x;\Delta)$.Здесь $J(x)$ –плотность ударного импульса, $t_n(x)$ – распределение *n*-й «фазы» удара, определяемой в данном случае как решение уравнения $u[x, t_n(x)]|= \Delta$, где $x\neq0$;

$\delta(t)$ - δ-функция Дирака. Индикаторная функция $\gamma(x;\Delta)=0$ при тех x, когда струна не взаимодействует с плоской частью ограничителя и $\gamma(x;\Delta)=1$, когда такое взаимодействие возможно.

Для второй составляющей силы взаимодействия в некоем j-м случае [ср. 13] имеем: $\Phi_2[u]= R_j(t)\ \delta(x)[\eta(t- t_j) - \eta(t-\theta_j)]$, $R_j(t)= u_x(-0,t) - u_x(+0,t)\geq 0$,; $t\in[t_j, \theta_j]$, где $\eta(t)$ – единичная функция Хевисайда. Анализируемая задача, следовательно, может быть записана в виде нелинейного уравнения типа Клейна – Гордона $\bullet$ u-$\Phi_0[u]=0$ с краевыми и начальными условиями (2).

Рассматривая консервативную нелинейную задачу, будем искать стоячие периодические волны некоторого периода $T(E)=2\pi/\omega$ где ω - частота вибрации струны; E – полная энергия системы. Воспользуемся методами частотно-временного анализа виброударных процессов [9,15] и перейдем к интегральному уравнению T-периодических колебаний

$$u(x,t)=\int_0^T\int_{-1/2}^{1/2}\chi(x,y;\ t-s)\Phi_0[u(x,t-s)]dsdy; \qquad (4)$$

При этом периодическая функция Грина (ПФГ) струны [13,15] $\chi(x,y;t)= =\sum \mathbf{sin}\pi n(x+1/2)\mathbf{sin}\pi n(z+1/2)\chi_n(t)$; n=1,2,…..Здесь функции $\chi_n(t)$ – «элементарные» ПФГ линейных осцилляторов с частотами, отвечающими спектру струны $\{\Omega_n\}=\{2\pi n\}$. При $0\leq t<T$ имеет место формула: $\chi_n(t)=(2\Omega_n\mathbf{sin}0{,}5\Omega_n T)^{-1}\mathbf{cos}[\Omega_n(t-0{,}5T)]$ [9, 15]. Внося представление для силы удара в (4), находим, предполагая, что за каждый период искомого периодического движения происходит лишь одно взаимодействие, представление искомого процесса. Обозначив φ (x) – распределение фазы удара, найдем

$$u(x,t)= \int_{-1/2}^{1/2}J(y)\ \gamma(y;\Delta)\ \chi\ (x,y;t-\varphi\ (y)]dy+\int_{t_1}^{q_1}R(s)\ \chi\ (x,0;t-s)ds, \qquad (5)$$

3. Изучая волны с изломанными профилями, подобные упомянутым в п.1 «хлопкам», положим во втором начальном условии (3): $u_0(x)=L(1-2|x|)$, где L=const>0 - величина взаимно однозначно связанная с полной энергией E. В отсутствии ограничителей линейная струна совершает периодические колебания с периодом $T_0=2$.

Допустимые профили стоячих волн могут быть двух родов. Если начальный запас потенциальной энергии недостаточно велик и $|\Delta_1|\leq L$, $|\Delta|>L$, то имеется стоячая волна, взаимодействующая только с выступом тавра – ситуация [10-14]. Если $|\Delta_1|\leq|\Delta|\leq L_*$, возможно двойное взаимодействие.

Первый случай рассматривается аналогично, например, работам [10-14]. Так, учитывая найденное в [10,13], имеем: $t_1={}^1/_2(L-\Delta_1)L^{-1}$, $\theta=1$, $R(s)=4L$. и период стоячей волны $T\equiv T_1$ связан с «энергетическим параметром» L соотношением $T_1={}^1/_2(3L-\Delta_1)L^{-1}$. Соответственно $L(\omega_1)=\Delta_1\omega_1(3\omega_1-4\pi)^{-1}$, $\omega_1=2\pi/T_1$. И, так как здесь $\Delta_1<0$, колебания возможны только, когда $\pi<\omega_1<{}^4/_3\pi$. Причем первое неравенство следует из линейности системы при $\omega_1=\pi$: $L=-\Delta_1$.

Для профилей второго рода $T\equiv T_2=1+2|\Delta|L^{-1}$. Соответственно $L(\omega_2)=2|\Delta|\omega_2(2\pi-\omega_2)^{-1}$; колебания возможны, когда $\omega_0<\omega_2<2\pi$, где ω_0- частота свободных колебаний, отвечающая возникновению хлопков (достижению участками струны плоской части таврового ограничителя). Очевидно, значение $\omega_0=8\pi|\Delta|(2|\Delta|-|\Delta_1|)^{-1}$. Таким образом, для данной нелинейной системы получаем полуинтервал «собственных частот» [9,15] $\Lambda=\{\omega|\ \omega\in[\pi,2\pi)\}$; $\omega=2\pi/T$.

Необходимые для нахождения искомой стоячей волны параметры трехфункционального представления (5) определяются рутинно. Для волн первого типа задача фактически решена в [13]. Это решение имеет вид $u(x,t)=B_{o2}(L;\ x,\ t)=8L\sum D_k(t_o;\omega_1;\ t-\varphi)\ \sin\ k\pi(x+{}^1/_2)$, причем здесь и далее суммирование ведется по положительным целочисленным индексам; $D_k(t_o;\omega_1;\ t)$ – T_1-периодическая легко вычислимая функция [13]

Для волн второго типа после преобразований приходим к представлению вида: $u(x,t)=B_{o1}(L;x,t-\varphi_0)+B_{o2}(L;\ x,\ t)$, $\varphi_0=1+|\Delta|L$. Здесь функция B_{o2} имеет вид подобный данному выше, однако параметры, определяющие пределы интегрирования в (5) (время выстоя) становятся зависящими еще и от значения зазора Δ; $B_{o1}(L;x,t-\varphi_0)=$

$8L(\pi^2n)^{-1}\sum\chi_n(t-\varphi_0)\mathbf{sin}\tfrac{1}{2}\pi n(b+d+\tfrac{1}{2})\mathbf{sin}\tfrac{1}{2}\pi nb\,\mathbf{sin}\pi n(x-\tfrac{1}{2})$, где фигурируют числа b и d, определяемые геометрическими параметрами Δ и Δ_1, а также энергетическим параметром L; $J(y)=4L$.

4. Обозначив найденное решение $W(L;x,t)$, перейдем к рассмотрению задачи с более общими начальными условиями (2): $u(x,0)=u_0(x)$; $u_t(x,0)=0$, где функция $u_0(x)$ предполагается четной и унимодальной на отрезке $x\in[-\tfrac{1}{2};\tfrac{1}{2}]$ (см. п.1).

Будем искать решение (см. [8, 10-13]) общей задачи в виде: $u(x,t)=W[L;y_1(x,t);y_2(x,t)]$, где $y_{1,2}(x,t)=g(x+t)\pm g(x-t)$. Не ограничивая общности, примем, L=1. Зависящая, в частности, от начальных и граничных условий функция g(x) подлежит определению в два шага.

1) Положим $g(x)= {}^1/_2[1-u_0(x)]$, $0\leq x\leq {}^1/_2$; $g(x)= 0$, $x=0$, $g(x)={}^1/_2[u_0(x)-1]$, ${}^1/_2\leq x\leq 0$.

2) доопределим функцию g(x), исходя из двух соотношений: $g(x+1)={}^1/_2 - g(-x)$, $g(x+2)=1 + g(x)$, $x\in R$. Эти преобразования трансформируют унимодальную на отрезке $[-{}^1/_2; {}^1/_2]$ четную функцию $u_0(x)$ в нечетную монотонно возрастающую на всей числовой оси функцию g(x).

При этом если, например $u_0(x)\in C^2[-{}^1/_2; {}^1/_2]$, то легко показать, что $g(x)\in C^2(R^1)$. Также показывается, что $-{}^1/_2\leq y_1(x,t) \leq {}^1/_2$ и, кроме того, $y_1(x,t+2)=y_1(x,t)$; $y_2(x,t+2)=y_2(x,t)+2$. То есть функция y_1 – периодична с периодом колебаний линейной струны $T_0=2$, а функция y_2 – эволюционирует.

Учитывая определение функций g и $y_{1,2}$, легко установить, что представление u=W удовлетворяет исходному уравнению $\bullet u-\Phi_0[u]=0$, то есть всем .сформулированным в п.2 условиям взаимодействия, а также конфигурационным ограничениям (1) и начальным и граничным условиям (2) (ср. [4]).

Подставив представление u=W (здесь L=1!) в исходное уравнение Клейна-Гордона (10), найдем, после ряда преобразований, имея в виду, что сумма или разность двух бегущих волн удовлетворяют линейному волновому уравнению: $2g'(x+t)g'(x-t)\bullet w-\Phi_0[w(y_1, y_2)]=0$. При этом с учетом возрастания функции g(x) и справедливости второго неравенства (1) для решения W(x,t) получаем, что при $W\leq 0$: $\bullet W\geq 0$ при любых допустимых значениях аргументов функции W; совершенно аналогично проверяется выполнение и других условий п.2. Например, $R_0=8g'(t)>0$.

Итак, формула u=W действительно определяет искомый процесс, так как предположение L=1 никак не ограничивает общности рассуждений. Структура такого решения всецело определяется структурой приведенных выше представляющих рядов B_{01} и B_{02}, то есть решение строится как ряд, каждый член которого суть произведение T-периодической функции времени Q_{1k}, множимой на некоторую функцию Q_{2k} координаты x: $u(x,t)= w[L;y_1(x,t);y_2(x,t)]=\sum Q_{1k}[L; y_1(x,t)]Q_{2k}[L;y_2(x,t)]$. Все функции Q_{1k} – T- периодичны по переменной y_1 и в то же время $y_1(x,t+2)\equiv y_1(x,t)$; $y_2(x,t+2)\equiv y_2(x,t)$ +.2. Период (см. п.3) $T=T_1={}^1/_2(3L-\Delta_1)L^{-1}$, при $|\Delta_1|\leq L$, $|\Delta|>L$ и $T=T_2=1+2|\Delta|L^{-1}$, при $|\Delta_1|\leq|\Delta|\leq L$. Для того, чтобы последний ряд определял бы периодический процесс необходимо и достаточно, чтобы величины T и T_0=2 были бы соизмеримы. Таким образом, изучаемая нами задача может иметь периодическое решение тогда и только тогда, когда период T дается рациональным числом. В остальных случаях решение оказывается почти периодическим (ср.[8, 10-13]).

При посредстве методов частотно-временного анализа совершенно аналогично могут быть изучены и другие случаи. Такие, например, как случай ограничителя хода, содержащего тавр по обе стороны струны, а также различные сочетания типов ограничителей. Кроме того, возможно построение решений и для систем с малыми неконсервативными силами.

6. На рис. 1, б показана схема экспериментального стенда «Аллигатор-Тавр». Здесь тавровый ограничитель 6 выполненный из гетинакса установлен на каретке 7, перемещаемой микрометрическим винтом, при помощи которого можно изменять значение установочного зазора Δ. В качестве распределенного упругого элемента в экспериментальной установке использован резиновый жгут 1. Стоячие волны визуализировались при помощи стробоскопического анализатора движения 10, вспышки лампы 9 которого синхронизировались от управляющего генератора. Проведенные эксперименты находятся в удовлетворительном согласии со сделанными выше выводами.

Были визуализированы стоячие периодические волны только двух описанных выше типов. Волны первого типа наблюдались после прохождения линейного резонанса и не отличались от описанных в [14]. Волны второго типа возникали после увеличения амплитуды возбуждения, при увеличении частоты возбуждения (затягивание по частоте), при увеличении зазора Δ (затягивание по амплитуде).

Фотоизображение характерного профиля струны при f=27,3 Гц (выполнено А.И. Стерниным) дано на рис. 2. Здесь было выбрано: Δ_1=20 мм; Δ=25 мм. С помощью данной установки, как и обычно, для режимов с трапециевидными профилями (хлопков) регистрировались динамические эффекты, характерные для «ударных осцилляторов» [3, 4, 9, 14, 15]. Вместе с тем регистрировались и непериодические волны более сложной природы.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 01-01-00297).

Литература

1. Amerio L., Prouse G. //Rend. di Mat. Ser. 6(8). 1975. N.2. P. 563-585.
2. Крупенин В.Л. // Изв. АН СССР, МТТ. 1986, N1. С. 25-32.
3. Веприк А.М., Крупенин В.Л. //Машиноведение. 1988. № 6. С. 39-47.
4. Крупенин В.Л. // ДАН СССР, 1990, т.313, N6, с. 1390-1394.
5. Krupenin V.L., Veprik A.M. // Proceedings of the 2-nd European Nonlinear Oscillations Conference. V.1. Czech Prague: CTU, 1996, pp. 229-234.
6. Асташев В.К., Крупенин В.Л. // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1998, № 5, с. 13-30.
7. Krupenin V.L. // Dynamics of Vibro-impact systems. Proceeding of the Euromech Colloquium 15-18 September 1998. Berlin-Heidelberg-NY, Springer-Verlag. 1999, pp.39-48.
8. Крупенин В.Л. // Проблемы машиностроения и надежности машин, 1997, № 3. С. 20-25.
9. Babitsky V.L., Krupenin V.L. Vibration of Strongly Nonlinear Discontinuous Systems, Berlin-Heidelberg-NY, Springer-Verlag. 2001, 400 p.
10. Cabbanes H., Haraus A. // I.J. Non-linear Mecanics. 1981,V.55, №5/6, p.p. 449-457.
11. Cabannes H // Acustica,. 1984, V.55, p.p. 14-20.
12. . Citrini C, Marchionna C. // Eur. J. Mech., A/Solids, **8,** n^{o} 1,1989, p.p. 73-85.
13. Крупенин В.Л. // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1992,№2, с.29-36.
14. Асташев В.К., Крупенин В.Л.// ДАН, 2001, Т.379, №3, с.23-27.
15. Крупенин В.Л. // ДАН, 2003, т.388, №3, С.1-5.
16. Бабицкий В.И., Крупенин В.Л. Колебания в сильно нелинейных системах. М.: Наука. 1985. 320 с.